Approximationstheorie und Approximationspraxis

Martin Wagner

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
AG Optmierung und Approximation

3. Februar 2010

Motivation

- Ziel: Approximation von komplizierten Funktionen durch einfachere, mittels linearer Operatoren
- Weierstraß'scher Approximationssatz: Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder stetigen Funktion f existiert ein algebraisches Polynom p, so dass $||f - p||_\infty < \varepsilon$
- Möglicher Ansatz: Interpolation
- Betrachte die Funktion $f(x) := \frac{1}{1+25x^2}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ (Runge-Funktion) und das zugehörige Interpolationspolynom an äquidistanten Stützpunkten.

Motivation

- Ziel: Approximation von komplizierten Funktionen durch einfachere, mittels linearer Operatoren
- Weierstraß'scher Approximationssatz: Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder stetigen Funktion f existiert ein algebraisches Polynom p, so dass $||f - p||_\infty < \varepsilon$
- Möglicher Ansatz: Interpolation
- Betrachte die Funktion $f(x) := \frac{1}{1+25x^2}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ (Runge-Funktion) und das zugehörige Interpolationspolynom an äquidistanten Stützpunkten.

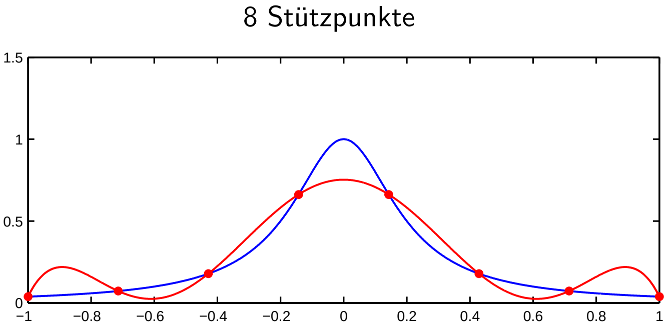
Motivation

- Ziel: Approximation von komplizierten Funktionen durch einfachere, mittels linearer Operatoren
- Weierstraß'scher Approximationssatz: Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder stetigen Funktion f existiert ein algebraisches Polynom p, so dass $||f - p||_\infty < \varepsilon$
- Möglicher Ansatz: Interpolation
- Betrachte die Funktion $f(x) := \frac{1}{1+25x^2}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ (Runge-Funktion) und das zugehörige Interpolationspolynom an äquidistanten Stützpunkten.

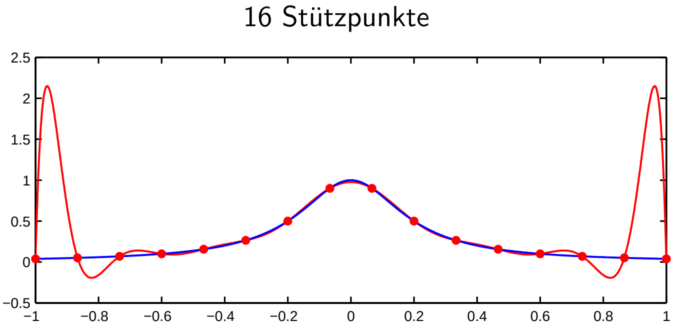
Motivation

- Ziel: Approximation von komplizierten Funktionen durch einfachere, mittels linearer Operatoren
- Weierstraß'scher Approximationssatz: Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder stetigen Funktion f existiert ein algebraisches Polynom p, so dass $||f - p||_\infty < \varepsilon$
- Möglicher Ansatz: Interpolation
- Betrachte die Funktion $f(x) := \frac{1}{1+25x^2}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ (Runge-Funktion) und das zugehörige Interpolationspolynom an äquidistanten Stützpunkten.

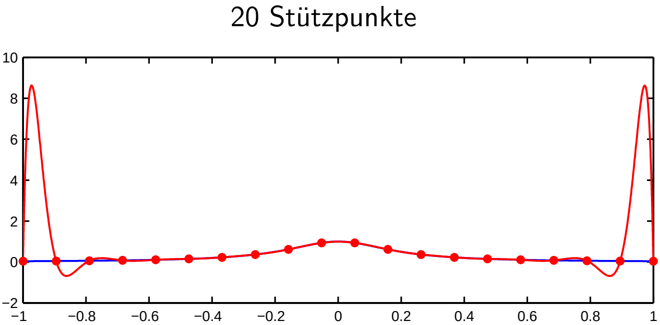
Runge-Funktion und Interpolationspolynom an äquidistanten Stützstellen



Runge-Funktion und Interpolationspolynom an äquidistanten Stützstellen



Runge-Funktion und Interpolationspolynom an äquidistanten Stützstellen



Voraussetzung für Konvergenz

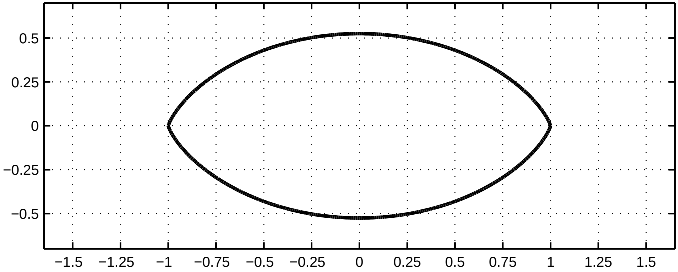
- Obwohl die Runge-Funktion reell analytisch auf $[-1, 1]$ ist, konvergiert das zugehörige Interpolationspolynom an äquidistanten Stützstellen nicht gegen f
- Um Konvergenz zu erreichen benötigt man sehr starke Voraussetzungen an die zu approximierende Funktion f: f muss analytisch auf einem 'american-football'-förmigen Gebiet in der komplexen Ebene sein

Voraussetzung für Konvergenz

- Obwohl die Runge-Funktion reell analytisch auf $[-1, 1]$ ist, konvergiert das zugehörige Interpolationspolynom an äquidistanten Stützstellen nicht gegen f
- Um Konvergenz zu erreichen benötigt man sehr starke Voraussetzungen an die zu approximierende Funktion f: f muss analytisch auf einem 'american-football'-förmigen Gebiet in der komplexen Ebene sein

Voraussetzung für Konvergenz

- Obwohl die Runge-Funktion reell analytisch auf $[-1, 1]$ ist, konvergiert das zugehörige Interpolationspolynom an äquidistanten Stützstellen nicht gegen f
- Um Konvergenz zu erreichen benötigt man sehr starke Voraussetzungen an die zu approximierende Funktion f: f muss analytisch auf einem 'american-football'-förmigen Gebiet in der komplexen Ebene sein



Voraussetzung für Konvergenz 2

- Genauer: f muss auf dem Gebiet analytisch sein, welches durch die Höhenlinie

$$\phi(z) := -1 + \frac{1}{2} Re \left(\frac{z+1}{\log(z+1)} - \frac{z-1}{\log(z-1)} \right)$$

  begrenzt ist
- Die Runge-Funktion $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ besitzt aber Polstellen bei $x = \pm \frac{i}{5}$

Voraussetzung für Konvergenz 2

- Genauer: f muss auf dem Gebiet analytisch sein, welches durch die Höhenlinie

$$\phi(z) := -1 + \frac{1}{2} Re\left(\frac{z+1}{\log(z+1)} - \frac{z-1}{\log(z-1)}\right)$$

  begrenzt ist
- Die Runge-Funktion $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ besitzt aber Polstellen bei $x = \pm\frac{i}{5}$

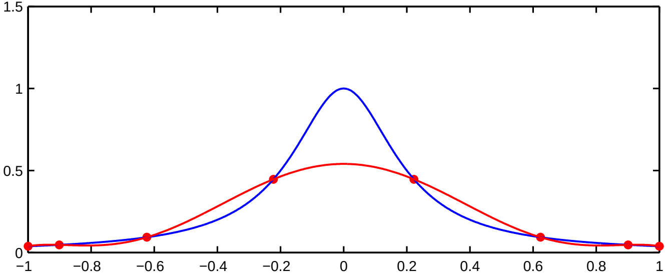
Interpolation an den Tschebyscheff-Knoten

- Bessere Ergebnisse erhält man, wenn man die Runge-Funktion an den Tschebyscheff-Knoten $x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$ (Extrema der Tschebyscheff-Polynome) interpoliert

Interpolation an den Tschebyscheff-Knoten

- Bessere Ergebnisse erhält man, wenn man die Runge-Funktion an den Tschebyscheff-Knoten $x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$ (Extrema der Tschebyscheff-Polynome) interpoliert

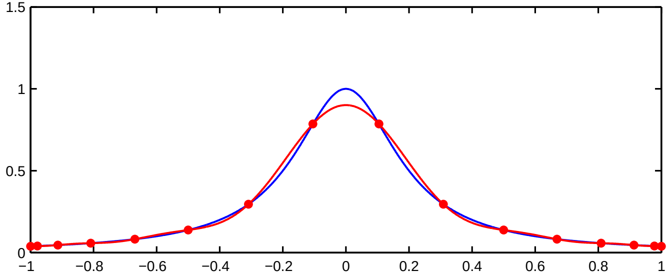
8 Stützpunkte



Interpolation an den Tschebyscheff-Knoten

- Bessere Ergebnisse erhält man, wenn man die Runge-Funktion an den Tschebyscheff-Knoten $x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$ (Extrema der Tschebyscheff-Polynome) interpoliert

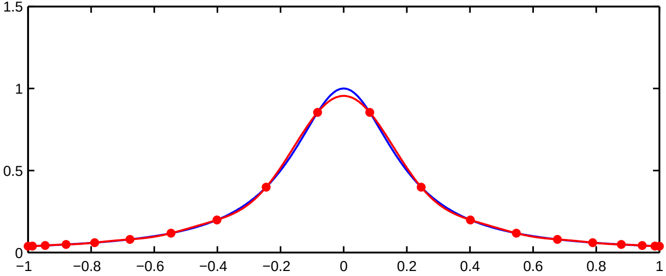
16 Stützpunkte



Interpolation an den Tschebyscheff-Knoten

- Bessere Ergebnisse erhält man, wenn man die Runge-Funktion an den Tschebyscheff-Knoten $x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$ (Extrema der Tschebyscheff-Polynome) interpoliert

20 Stützpunkte



Konvergenz der Tschebyscheff-Interpolanten

- Ist f Lipschitz-stetig auf $[a,b]$, so konvergiert die Folge der Interpolationspolynome an den Tschbeyscheff-Knoten gleichmäßig gegen die Funktion f
- Satz von Faber: Für jede Folge $(x_k^{(n)})$ existiert eine Funktion $f \in C[a,b]$, so dass die zugehörige Folge $(L_n f)$ von Interpolationspolynomen auf $[a,b]$ nicht gleichmäßig gegen f konvergiert
- Wie erhält man ein lineares Approximationsverfahren für alle Funktionen $f \in L^p[a,b]$?

Konvergenz der Tschebyscheff-Interpolanten

- Ist f Lipschitz-stetig auf $[a, b]$, so konvergiert die Folge der Interpolationspolynome an den Tschbeyscheff-Knoten gleichmäßig gegen die Funktion f
- Satz von Faber: Für jede Folge $(x_k^{(n)})$ existiert eine Funktion $f \in C[a, b]$, so dass die zugehörige Folge $(L_n f)$ von Interpolationspolynomen auf $[a, b]$ nicht gleichmäßig gegen f konvergiert
- Wie erhält man ein lineares Approximationsverfahren für alle Funktionen $f \in L^p[a, b]$?

Konvergenz der Tschebyscheff-Interpolanten

- Ist f Lipschitz-stetig auf $[a, b]$, so konvergiert die Folge der Interpolationspolynome an den Tschbeyscheff-Knoten gleichmäßig gegen die Funktion f
- Satz von Faber: Für jede Folge $(x_k^{(n)})$ existiert eine Funktion $f \in C[a, b]$, so dass die zugehörige Folge $(L_n f)$ von Interpolationspolynomen auf $[a, b]$ nicht gleichmäßig gegen f konvergiert
- Wie erhält man ein lineares Approximationsverfahren für alle Funktionen $f \in L^p[a, b]$?

Bernstein-Operatoren

- Beweis des Satzes von Weierstraß mit Hilfe der Bernstein-Polynome:

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0,1]$$

$$\text{mit } p_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

- Die Bernstein-Polynome liefern ein positives, lineares Approximationsverfahren für $f \in C[0,1]$ bezüglich der ∞-Norm, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} ||B_n f - f||_\infty = 0$$

Bernstein-Operatoren

- Beweis des Satzes von Weierstraß mit Hilfe der Bernstein-Polynome:

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0,1]$$

$$\text{mit } p_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

- Die Bernstein-Polynome liefern ein positives, lineares Approximationsverfahren für $f \in C[0,1]$ bezüglich der ∞-Norm, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} ||B_n f - f||_\infty = 0$$

Bernstein-Durrmeyer Operatoren

- Erweiterung der Bernstein-Operatoren auf Lebesgue-intergrierbare Funktion indem man die Punktauswertung durch Integrale der gewichteten Funktion ersetzt
- Sei $f \in L^p[0,1],\ 1 \leq p \leq \infty.$
  Dann ist der Bernstein-Durrmeyer Operator vom Grade n definiert durch

$$(M_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)(n+1) \int_0^1 p_{nk}(t) f(t) dt,\ x \in [0,1],$$

mit $p_{nk}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

Bernstein-Durrmeyer Operatoren

- Erweiterung der Bernstein-Operatoren auf Lebesgue-intergrierbare Funktion indem man die Punktauswertung durch Integrale der gewichteten Funktion ersetzt
- Sei $f \in L^p[0,1],\ 1 \leq p \leq \infty$.
  Dann ist der Bernstein-Durrmeyer Operator vom Grade n definiert durch

$$(M_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)(n+1) \int_0^1 p_{nk}(t) f(t) dt,\ x \in [0,1],$$

mit $p_{nk}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

Eigenschaften der BD-Opertaoren

- Die BD-Operatoren liefern ein positives, lineares Approximationsverfahren für $f \in L^p[0,1]$:

$$\lim_{n\to\infty} ||M_n f - f||_p = 0,$$

$1 \leq p < \infty$ bzw. $f \in C[0,1]$ für $p = \infty$

- Erhaltung von Konstanten: $M_n e_0 = e_0$ mit $e_0 = x^0 = 1$
- Kontraktionseigenschaft: $||M_n f||_p \leq ||f||_p$, $1 \leq p \leq \infty$
- Eigenwerte und Eigenfunktionen: $M_n p_m = \lambda_{n,m} p_m$, wobei $p_m := \frac{\sqrt{2m+1}}{m!} D^m(x^m(1-x)^m)$ die Legendre-Polynome sind und

$$\lambda_{n,m} := \begin{cases} \frac{n!}{(n-m)!}\frac{(n+1)!}{(n+m+1)!} & \text{für } n \geq m \\ 0 & \text{für } n < m \end{cases}.$$

Eigenschaften der BD-Opertaoren

- Die BD-Operatoren liefern ein positives, lineares Approximationsverfahren für $f \in L^p[0,1]$:

$$\lim_{n\to\infty} ||M_n f - f||_p = 0,$$

  $1 \leq p < \infty$ bzw. $f \in C[0,1]$ für $p = \infty$
- Erhaltung von Konstanten: $M_n e_0 = e_0$ mit $e_0 = x^0 = 1$
- Kontraktionseigenschaft: $||M_n f||_p \leq ||f||_p, \ 1 \leq p \leq \infty$
- Eigenwerte und Eigenfunktionen: $M_n p_m = \lambda_{n,m} p_m$, wobei $p_m := \frac{\sqrt{2m+1}}{m!} D^m(x^m(1-x)^m)$ die Legendre-Polynome sind und

$$\lambda_{n,m} := \begin{cases} \frac{n!}{(n-m)!} \frac{(n+1)!}{(n+m+1)!} & \text{für } n \geq m \\ 0 & \text{für } n < m \end{cases}.$$

Eigenschaften der BD-Opertaoren

- Die BD-Operatoren liefern ein positives, lineares Approximationsverfahren für $f \in L^p[0,1]$:

$$\lim_{n\to\infty} ||M_n f - f||_p = 0,$$

$1 \leq p < \infty$ bzw. $f \in C[0,1]$ für $p = \infty$

- Erhaltung von Konstanten: $M_n e_0 = e_0 \quad$ mit $e_0 = x^0 = 1$
- Kontraktionseigenschaft: $||M_n f||_p \leq ||f||_p,\ 1 \leq p \leq \infty$
- Eigenwerte und Eigenfunktionen: $M_n p_m = \lambda_{n,m} p_m$, wobei $p_m := \frac{\sqrt{2m+1}}{m!} D^m(x^m(1-x)^m)$ die Legendre-Polynome sind und

$$\lambda_{n,m} := \begin{cases} \frac{n!}{(n-m)!} \frac{(n+1)!}{(n+m+1)!} & \text{für } n \geq m \\ 0 & \text{für } n < m \end{cases}.$$

Eigenschaften der BD-Opertaoren

- Die BD-Operatoren liefern ein positives, lineares Approximationsverfahren für $f \in L^p[0,1]$:

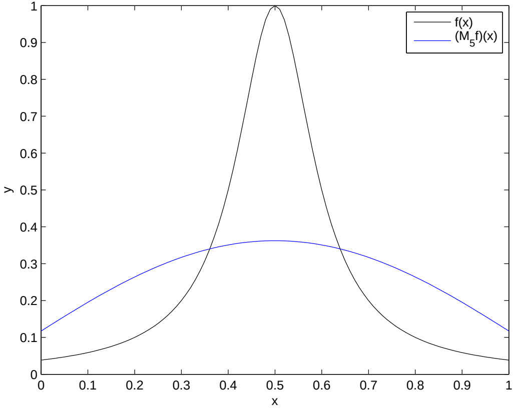
  $$\lim_{n\to\infty} ||M_n f - f||_p = 0,$$

  $1 \leq p < \infty$ bzw. $f \in C[0,1]$ für $p = \infty$
- Erhaltung von Konstanten: $M_n e_0 = e_0$ mit $e_0 = x^0 = 1$
- Kontraktionseigenschaft: $||M_n f||_p \leq ||f||_p,\ 1 \leq p \leq \infty$
- Eigenwerte und Eigenfunktionen: $M_n p_m = \lambda_{n,m} p_m$, wobei $p_m := \frac{\sqrt{2m+1}}{m!} D^m(x^m(1-x)^m)$ die Legendre-Polynome sind und

  $$\lambda_{n,m} := \begin{cases} \frac{n!}{(n-m)!}\frac{(n+1)!}{(n+m+1)!} & \text{für } n \geq m \\ 0 & \text{für } n < m \end{cases}.$$

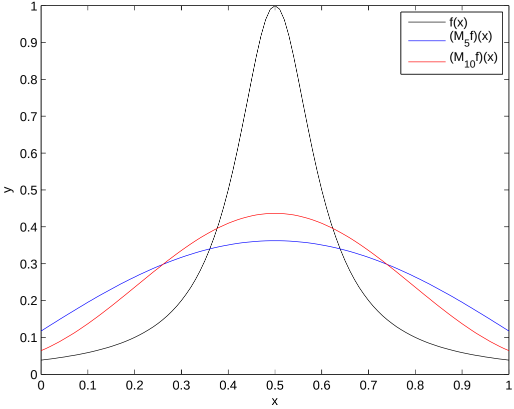
Plots1

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n f)(x)$.



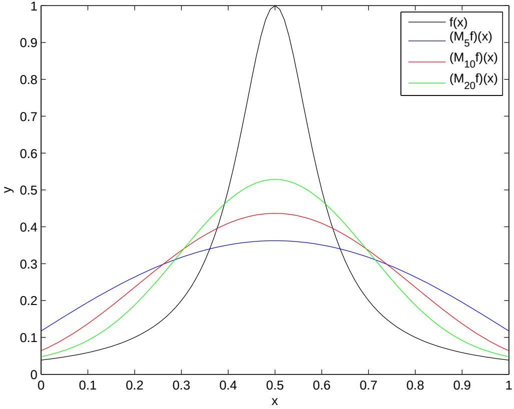
Plots1

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n f)(x)$.



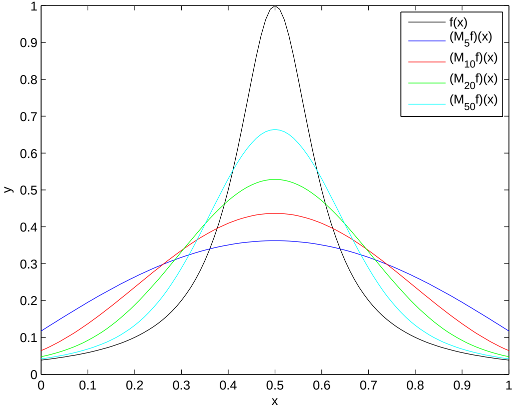
Plots1

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n f)(x)$.



Plots1

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n f)(x)$.



Voronovskaja-Typ Resultat

- Für $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C[0,1]$ und f an einer festen Stelle x 2-mal stetig differenzierbar gilt

$$\lim_{n\to\infty} n\big(f(x) - (M_n f)(x)\big) = \frac{d}{dx}\left\{x(1-x)\frac{d}{dx}f(x)\right\} =: \tilde{D}^2 f(x)$$

- $\Rightarrow$ globale Konvergenzordnung kann auch für sehr glatte Funktionen nicht besser als $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ sein.

Voronovskaja-Typ Resultat

- Für $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C[0,1]$ und f an einer festen Stelle x 2-mal stetig differenzierbar gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\big(f(x) - (M_n f)(x)\big) &= \frac{d}{dx}\left\{x(1-x)\frac{d}{dx}f(x)\right\} \\ &=: \tilde{D}^2 f(x) \end{aligned}$$

- $\Rightarrow$ globale Konvergenzordnung kann auch für sehr glatte Funktionen nicht besser als $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ sein.

Approximationsordnung bei der Tschebyscheffinterpolation

- Sei $f \in C^r[-1,1]$ und $f^{(r)}$ stückweise stetig differenzierbar in $[-1,1]$, dann gilt für $n > r$

$$\|f - p_n\|_\infty \leq Cn^{-(r+1)},$$

wobei p_n das Interpolationspolynom vom Grade n an den Tschebyscheff-Knoten bezeichnet.

- Ist f reell analytisch auf $[-1,1]$, so ist

$$\|f - p_n\|_\infty \leq C^{-n}$$

Approximationsordnung bei der Tschebyscheffinterpolation

- Sei $f \in C^r[-1,1]$ und $f^{(r)}$ stückweise stetig differenzierbar in $[-1,1]$, dann gilt für $n > r$

  $$\|f - p_n\|_\infty \leq Cn^{-(r+1)},$$

  wobei p_n das Interpolationspolynom vom Grade n an den Tschebyscheff-Knoten bezeichnet.
- Ist f reell analytisch auf $[-1,1]$, so ist

  $$\|f - p_n\|_\infty \leq C^{-n}$$

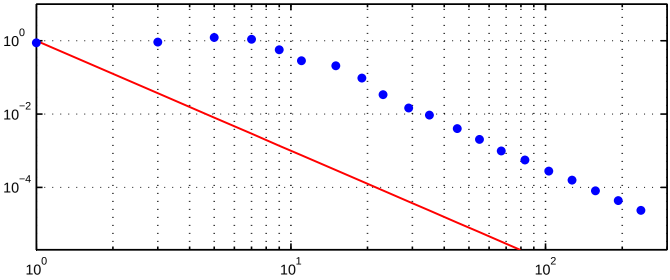
Beispiel

Betrachte $f(x) := |\sin(5x)|^3 \in C^2[-1,1]$, f'' ist stückweise stetig differenzierbar.
$\Rightarrow \|f - p_n\|_\infty \leq Cn^{-3}$

Beispiel

Betrachte $f(x) := |\sin(5x)|^3 \in C^2[-1,1]$, f'' ist stückweise stetig differenzierbar.

$\Rightarrow \|f - p_n\|_\infty \leq Cn^{-3}$



Die Quasi-Interpolanten

Der Differenzialoperator $\widetilde{D}^{2l}$

- $\widetilde{D}^{2l} := \frac{d^l}{dx^l} x^l (1-x)^l \frac{d^l}{dx^l}$
- $\widetilde{D}^{2l} p_m = \gamma_{l,m} p_m$,
  wobei $p_m := \frac{\sqrt{2m+1}}{m!} D^m(x^m(1-x)^m)$ die Legendre-Polynome sind und

$$\gamma_{l,m} := \begin{cases} (-1)^l \frac{(m+l)!}{(m-l)!} & \text{für } l \leq m \\ 0 & \text{für } l > m \end{cases}.$$

- Für $f \in C^{2l}[0,1]$ kommutiert der Differentialoperator $\widetilde{D}^{2l}$ mit den Bernstein-Durrmeyer Operatoren:

$$\widetilde{D}^{2l} M_n f = M_n \widetilde{D}^{2l} f$$

Der Differenzialoperator $\widetilde{D}^{2l}$

- $\widetilde{D}^{2l} := \frac{d^l}{dx^l} x^l (1-x)^l \frac{d^l}{dx^l}$
- $\widetilde{D}^{2l} p_m = \gamma_{l,m} p_m,$
  wobei $p_m := \frac{\sqrt{2m+1}}{m!} D^m (x^m (1-x)^m)$ die Legendre-Polynome sind und

$$\gamma_{l,m} := \begin{cases} (-1)^l \frac{(m+l)!}{(m-l)!} & \text{für } l \leq m \\ 0 & \text{für } l > m \end{cases}.$$

- Für $f \in C^{2l}[0,1]$ kommutiert der Differentialoperator $\widetilde{D}^{2l}$ mit den Bernstein-Durrmeyer Operatoren:

$$\widetilde{D}^{2l} M_n f = M_n \widetilde{D}^{2l} f$$

Der Differenzialoperator $\widetilde{D}^{2l}$

- $\widetilde{D}^{2l} := \frac{d^l}{dx^l} x^l (1-x)^l \frac{d^l}{dx^l}$
- $\widetilde{D}^{2l} p_m = \gamma_{l,m} p_m$,
  wobei $p_m := \frac{\sqrt{2m+1}}{m!} D^m(x^m(1-x)^m)$ die Legendre-Polynome sind und

$$\gamma_{l,m} := \begin{cases} (-1)^l \frac{(m+l)!}{(m-l)!} & \text{für } l \leq m \\ 0 & \text{für } l > m \end{cases}.$$

- Für $f \in C^{2l}[0,1]$ kommutiert der Differentialoperator $\widetilde{D}^{2l}$ mit den Bernstein-Durrmeyer Operatoren:

$$\widetilde{D}^{2l} M_n f = M_n \widetilde{D}^{2l} f$$

Konstruktion der Quasi-Interpolanten und Eigenschaften

- Die Bernstein-Durrmeyer Quasi-Interpolanten der Ordnung $(r, n),\ 0 \leq r \leq n$ sind für $f \in L^1[0,1]$ wie folgt definiert

$$M_n^{(r)} f := \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \frac{(n-l)!}{n!l!} \widetilde{D}^{2l} \big(M_n f \big).$$

- $M_n^{(r)} p_m = p_m,\ m = 0, ..., r$
- Gleichmäßige Beschränktheit von $M_n^{(r)}$:

$$||M_n^{(r)} f||_p \leq (2^{r+1} - 1)||f||_p$$

Konstruktion der Quasi-Interpolanten und Eigenschaften

- Die Bernstein-Durrmeyer Quasi-Interpolanten der Ordnung $(r, n),\ 0 \leq r \leq n$ sind für $f \in L^1[0,1]$ wie folgt definiert

$$M_n^{(r)} f := \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \frac{(n-l)!}{n!l!} \widetilde{D}^{2l}\big(M_n f\big).$$

- $M_n^{(r)} p_m = p_m,\ m = 0, ..., r$
- Gleichmäßige Beschränktheit von $M_n^{(r)}$:

$$||M_n^{(r)} f||_p \leq (2^{r+1} - 1)||f||_p$$

Konstruktion der Quasi-Interpolanten und Eigenschaften

- Die Bernstein-Durrmeyer Quasi-Interpolanten der Ordnung $(r, n),\ 0 \le r \le n$ sind für $f \in L^1[0,1]$ wie folgt definiert

$$M_n^{(r)} f := \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \frac{(n-l)!}{n!l!} \widetilde{D}^{2l}\big(M_n f\big).$$

- $M_n^{(r)} p_m = p_m,\ m = 0, ..., r$
- Gleichmäßige Beschränktheit von $M_n^{(r)}$:

$$||M_n^{(r)} f||_p \le (2^{r+1} - 1)||f||_p$$

Voronovskaja-Typ Resultat 2

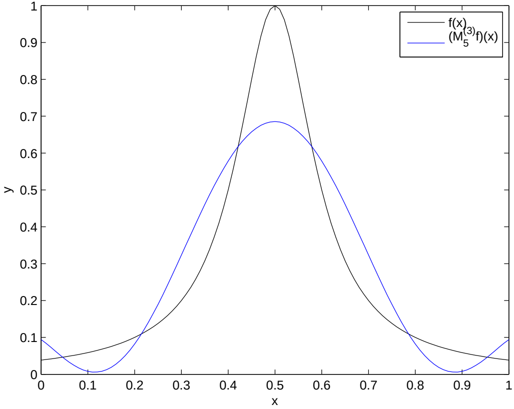
Für $r \in \mathbb{N}_0$ und $f \in C^{2(r+1)}[0,1]$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n-r)!}\Big(f - M_n^{(r)} f\Big)(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!}\widetilde{D}^{2(r+1)} f(x), \; x \in [0,1],$$

und die Konvergenz ist gleichmäßig bezüglich x.

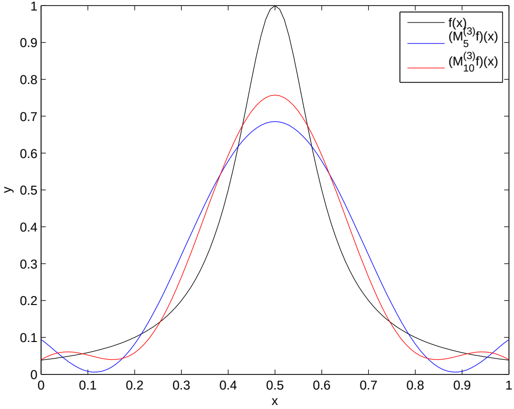
Plots2

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n^{(r)} f)(x)$.



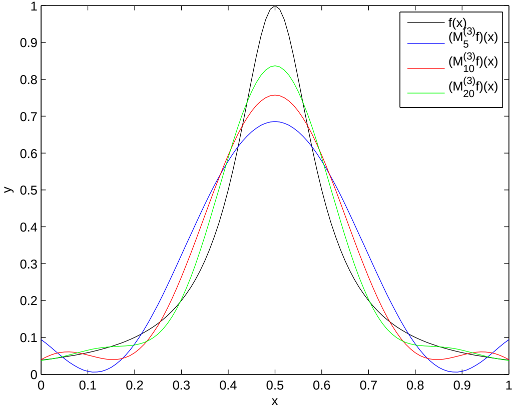
Plots2

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n^{(r)} f)(x)$.



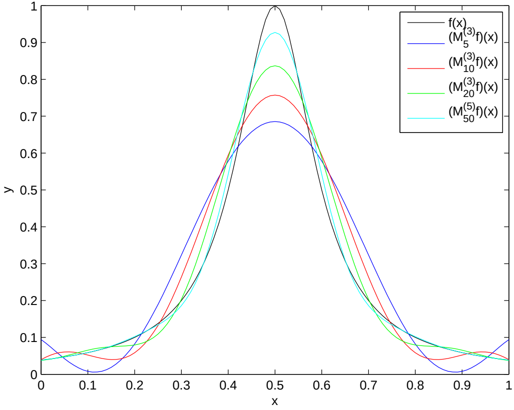
Plots2

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n^{(r)} f)(x)$.



Plots2

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n^{(r)} f)(x)$.



Plots3

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n f)(x)$ und $(M_n^{(r)} f)(x)$.