Einführung zur Transkription des Manuskriptes „Einleitung in die höhere Analysis (Sommersemester 1863) (vorgetr. v. O. Hesse)“

(Bearbeiter: Maria Remenyi und Dirk Steinmetz)

Die vorliegende Ausarbeitung präsentiert eine Transkription des handschriftlichen Manuskriptes „Einleitung in die höhere Analysis (Sommersemester 1863); vorgetr. v. O. Hesse“ aus dem Besitz der Universitätsbibliothek Heidelberg (Signatur Heidelb. HS 3676)[1]. Es handelt sich um ein Quartformat, in dem etwa 40 Bögen verschiedener Größe und Qualität zusammengebunden sind. Als Besitzer und mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit auch Verfasser ließ sich auf Grund eines entsprechenden Vermerkes (Innenseite des Deckblattes) der Agrikulturchemiker und Virologe Adolf Eduard Mayer Gmelin (1843-1942) ermitteln, dessen Tochter, Ella Schönefeld, das Manuskript der Universitätsbibliothek 1965 übereignete. Mayer Gmelin, Enkel des angesehenen Chemikers und Professors an der Universität Heidelberg, Leopold Gmelin (1788-1853), studierte im Zeitraum 1862-1864 in Heidelberg Mathematik, Physik und Chemie.[2]

Ludwig Otto Hesse und seine Lehrtätigkeit in Heidelberg

Von 1856 bis 1868 lehrte auch der Mathematiker Ludwig Otto Hesse (1811-1874) in Heidelberg[3]. Hesse hatte 1832 ein Studium an der philosophischen Fakultät der Universität Königsberg mit den Schwerpunkten Mathematik und Physik aufgenommen. Die Liste seiner akademischen Lehrer umfasst dabei so klangvolle Namen wie Carl Gustav Jacobi (1804-1851), Friedrich Julius Richelot (1808-1875) und Friedrich Wilhelm Bessel (1784- 1846). Von nachhaltigem Einfluss auf Hesses Forschungsinteressen und seine Vorstellungen von einer erfolgversprechenden, akademischen Lehre war der Besuch des 1834 von Jacobi unter der Mitarbeit von Franz Neumann (1798-1895) gegründeten Königsberger mathematisch-physikalischen Seminars. Diese für die damalige Zeit einmalige Einrichtung versammelte besonders begabte Studenten in einer anregenden Atmosphäre, die sich durch gegenseitigen Ansporn zu selbstständiger wissenschaftlicher Arbeit auszeichnete. 1837 legte Hesse das Oberlehrerexamen (Schwerpunkt Mathematik und Physik) ab, und trat nach einer Wanderschaft durch die deutschen Länder und die Schweiz 1838 eine Stelle als Lehrer an der Provinzialgewerbeschule in Königsberg an, wo er 3 Jahre lang Bauhandwerker in Chemie und Physik unterrichtete. In dieser Zeit wuchs in ihm das Interesse an wissenschaftlicher Arbeit und er promovierte 1840 mit einer Dissertation über die 8 Schnittpunkte von 3 Flächen 2ter Ordnung. Diese Arbeit gemeinsam mit einem Vortrag über das isoperimetrische Problem und einem Ausblick über die mögliche Tragweite seiner geometrischen Ergebnisse für algebraische Gleichungen ermöglichte ihm im selben Jahr die Habilitation. Damit war auch die Grundlage gelegt für Hesses mathematisches Lebenswerk, das sich durch die Etablierung von Korrespondenzen zwischen algebraischen Sätzen und Eigenschaften geometrischer Objekte auszeichnete. Hesse leistete dabei wichtige Beiträge zur Begründung der modernen algebraischen Geometrie und der Invariantentheorie. Ein schlagkräftiges Werkzeug der algebraischen Geometrie des 19. Jahrhunderts ist bis heute mit Hesses Namen verbunden: die Hessesche Funktionaldeterminante. Darüber hinaus beruhen eine Reihe wichtiger

---

1 An dieser Stelle geht der Dank an Martin Hellmann, der auf die Existenz des Manuskriptes aufmerksam gemacht hat.

2 Zu Mayer Gmelin siehe Böhm, Wolfgang: „Mayer, Adolf in: Neue Deutsche Biographie 16 (1990), S. 533-534 [Onlinefassung URL: http://www.deutsche-biographie.de/pnd117542210.html]

3 Für die nachfolgenden und weitere, ausführlichere Information zu Ludwig Otto Hesse in Heidelberg siehe Remenyi (2002) und Cantor (1903).

Resultate Hesses in der analytischen Geometrie auf den Konzepten der Hesseschen Normalform einer Gerade oder Ebene und der Hesseschen Kurve bzw. Fläche einer ebenen Kurve. Auch zur Entwicklung moderner mathematischer Notationen hat Hesse durch sein Streben nach einer eleganten und konzisen Darstellungsweise beigetragen. In der analytischen Geometrie zeigte sich dies insbesondere durch die Einführung homogener Koordinaten.

Bereits seit 1840, parallel zu seiner bis 1841 andauernden Tätigkeit als Lehrer, las Hesse regelmäßig an der Universität. Während seiner langjährigen Dozententätigkeit an der Universität Königsberg hielt er in der Regel pro Semester zwei vierstündige Vorlesungen allgemeinen und einführenden Charakters über Geometrie, Analysis und Mechanik. Ergänzend bot er wiederkehrend neben Übungen zur analytischen Geometrie Spezialvorlesungen im sogenannten „Jacobischen Sinne“ an:

„Die Vorlesungen Jacobi's bewegten sich sämtlich ausserhalb der Gebiete der Lehrbücher in den Tiefen der Wissenschaft und umfassten solche Theile derselben, in denen er selbst schaffend tätig war, mit der Tendenz, die Gedanken an Stelle der Rechnung zu setzen. Indem er die jeder Theorie zu Grunde liegenden leitenden Gedanken festzustellen sich bemühte, entwickelte er seinen Zuhörern die Probleme mit einer Einfachheit, die Ähnliches zu erfinden hoffen liess.“[4]

1845 ernannte man Hesse in Königsberg zum außerordentlichen Professor, was seine missliche finanzielle Situation kaum verbesserte. Nach einigen erfolglosen Bewerbungen, unter anderem in Kiel, und einer kurzen Zwischenstation als Professor in Halle, nahm Hesse deshalb 1856 den Ruf auf eine relativ gut dotierte Stelle an der Universität Heidelberg als Nachfolger von Ferdinand Schweins (1780-1856) an.

Heidelberg war in den 1850er Jahren durch die Berufungen von Hermann von Helmholtz, Robert Bunsen und Gustav Kirchhoff zum naturwissenschaftlichen Zentrum avanciert. Mathematisch gesehen fand sich Hesse jedoch im Vergleich zu Königsberg in einem Entwicklungsland wieder, sowohl bezogen auf die Forschung[5] als auch hinsichtlich der strukturellen Organisation des Mathematikunterrichts. Das Ministerium war an der Mathematik in erster Linie als „Dienstleister“ für die Naturwissenschaften interessiert, und damit an der Wiederholung und Vertiefung von bereits in der Schule erworbenen Kenntnissen.[6]

Diese Rahmenbedingungen bestimmten die Aktivitäten Hesses während seiner bis 1875 währenden Heidelberger Zeit. Naturgemäß erweiterte er sein Vorlesungsangebot gegenüber Königsberg nicht. Entsprechend seinem Forschungsschwerpunkt las er regelmäßig analytische Geometrie mit begleitenden Übungen, die wie der Mathematiker Heinrich Weber (1842-1913) in seinen Erinnerungen an seine Studienzeit in Heidelberg in den 1860er Jahren vermerkte[7], besonders für interessierte Studenten attraktiv waren. An gleicher Stelle berichtet Weber von einer in der Regel zweisemestrig angelegten Vorlesung zur Differential- und Integralrechnung mit Elementen der Theorie der Differentialgleichungen. Die Heidelberger Vorlesungsverzeichnisse der entsprechenden Jahrgänge bestätigen diese Angaben. Weiter spricht Weber von einem regelmäßig stattfindenden „Kolleg“ mit dem Titel „Enzyklopädie der Mathematik“, in der Hesse den Forderungen des Ministeriums nach einem elementaren Lehrangebot für die Studenten der Chemie und Physiologie nachgekommen ist.

4 Hesse (1897, 713)

5 Ferdinand Schweins galt als Vertreter der im Verlauf 19. Jahrhundert zunehmend an Bedeutung verlierenden „kombinatorischen Schule“, vgl. Remenyi (2002, 79-80), Cantor (1903).

6 Vgl. Kern (1993,23)

7 Webers Erinnerungen werden hier und im Folgenden zitiert nach Lorey (1916, 73-75).

Nach Weber bot die „Enzyklopädie der Mathematik“ eine Darstellung von Grundlagen der „Algebraischen Analysis“ und den Themenbereichen „Reihen“, „Kombinatorik“, und „Höhere Gleichungen“, also „eine Mischung aus allem“. In den Vorlesungsverzeichnissen findet sich eine so bezeichnete Veranstaltung lediglich in den Jahren vor 1860. Danach wird in regelmäßigen Abständen eine Vorlesung von Hesse zur „Einleitung in die Analysis des Unendlichen“ angezeigt, unter anderem für das Sommersemester 1863. Möglicherweise handelt es sich dabei nur um eine -etwas irreführende- Umbenennung (die von Gmelin im Titel des Manuskriptes noch einmal variiert wurde) oder um ein Fehlen des Eintrages „Enzyklopädie der Mathematik“, denn die inhaltliche Analyse zeigt, dass die vorliegenden Aufzeichnungen vom Sommersemester 1863 die von Weber erwähnte „Enzyklopädie“ abbilden.
Das erste Drittel der etwa 150 Seiten umfassenden Niederschrift verhandelt tatsächlich Elemente der Algebraischen Analysis. Auf weiteren ca. 30 Seiten geht es im Allgemeinen um Reihen und Bedingungen der Konvergenz und Divergenz (ohne Infinitesimalkalkül). In einem etwa zehnseitigen Einschub werden Kombinationen, Permutationen und Variationen eingeführt. Die verbleibenden etwa 60 Seiten des Manuskriptes widmen sich der Theorie und Lösung von Gleichungen und enden mit dem Beweis des Satzes von Sturm. Insbesondere dieser Teil ist bezogen auf das Beispielmaterial deutlich auf Anwender ausgerichtet, denn es werden überwiegend physikalische und chemische Aufgaben besprochen. Die Vorlesung ist insofern nicht vergleichbar mit zeitgenössischen Ausarbeitungen zur Einführung in die höhere Analysis, da sie nahezu vollständig ohne den Funktionsbegriff arbeitet. Vielmehr ergibt sich der Eindruck, es handle sich hier um einen Vorläufer (begrifflich auf elementarem Niveau) zu einem Genre einführender Lehrbücher und Lehrveranstaltungen in die höhere Mathematik, welches verstärkt seit den 1880er Jahren durch die Diskussion um die Mathematikausbildung der Studenten der Technischen Hochschulen aufkam.[8] Dies deckt sich auch mit den Angaben von Weber.

Relevanz des Vorlesungsmanuskriptes

Die Aufzeichnungen Gmelins sind in verschiedener Hinsicht von Bedeutung. Zum einem ist der in den von Sigmund Gundelfinger (1846-1910) 1897 herausgegebenen Gesammelten Werken Hesses erwähnte Nachlass leider nicht mehr auffindbar. Es gibt somit keine von Hesse handschriftlich angefertigten Originalquellen, die seine erfolgreiche und langanhaltende Lehrtätigkeit dokumentieren. Mayer Gmelins Manuskript kompensiert diesen Mangel bis zu einem gewissen Grade.
Zugänglich sind natürlich seine hervorragenden Lehrbücher zur analytischen Geometrie, die im Zeitraum 1861-1866 erschienen und durch die „der Sinn für elegante Rechnungen mit symmetrischen Formeln in weite Kreise getragen wurde“[9]. Die Bücher Hesses zeichnen sich bis heute durch einen bestechend klaren Stil sowohl hinsichtlich der mathematisch-sprachlichen Gestaltung als auch der der Strukturierung des Materials aus. Hesse hat nicht zuletzt dadurch zahlreichen Mathematikern des 19. Jahrhunderts, die wesentlich an der rasanten Entwicklung der Disziplin im 19. Jahrhundert beteiligt waren, den Weg bereitet, und gleichermaßen eine ganze Generation von Gymnasiallehrern geprägt.
Darüber hinaus belegt das vorliegende Dokument Hesses Fähigkeit, auch einem an Mathematik überwiegend als Hilfswissenschaft interessierten Publikum neben der Vermittlung (teilweise elementarer) mathematischer Techniken gleichermaßen einen Einblick in das Wesen mathematischer Forschungsarbeit zu ermöglichen.

---

8 Zur antimathematischen Bewegung siehe z.B. Hensel (1989)

9 Vgl. Klein (1926, 159)

In der Tradition seines Lehrers Jacobi formulierte Hesse im Rahmen seines Habilitationsvortrages folgende These: „Praecipium docentis officium est docere discendi vias“[10]. Ziel dieses Lehrprinzips war unter anderem, jungen Studenten die Schlagkräftigkeit ebenso wie die strukturelle Komplexität und Vielfältigkeit (manche würden sagen: „Schönheit“) der Mathematik, und gleichermaßen die Fähigkeit zu eigenständigem mathematischen Denken nahe zu bringen. Die Hörer der „Enzyklopädie“ des Sommersemesters 1863 rekrutierten sich vermutlich nur zu einem geringen Teil aus Nachwuchsmathematikern sondern überwiegend aus Studenten mit den Schwerpunkten Physiologie und Chemie (wie Mayer Gmelin!). Gleichwohl war es Hesse ein Anliegen, auf die „unterschiedlichen Wege“, ein mathematisches Objekt zu charakterisieren oder eine Aussage zu beweisen, hinzuweisen, und damit die Lebendigkeit kreativen mathematischen Arbeitens zu demonstrieren.

Richtlinien der Bearbeitung

Während die Lehrbücher Hesses das Produkt einer Reihe von ihm selbst durchgeführten Überarbeitungen waren, legen die Aufzeichnungen Gmelins ein lebendiges Zeugnis vom Hesseschen Vortragsstil ab. Die Strukturierung des Materials, die Formulierungen des Prosatextes und die Ableitung der Formeln weisen deutlich daraufhin, dass Gmelin Hesses Vortrag vermutlich teils als Diktat und teils als Abschrift von der Tafel folgte und dies in sein Heft übertrug. Die Mitschrift liest sich dementsprechend schwerfällig; gleichwohl wurden am Original in der Transkription nur minimale Korrekturen durchgeführt. Ziel ist es, die Fähigkeit Hesses, im mündlichen Vortrag seine Lehrziele durchzusetzen, unverfälscht darzustellen, indem die Rezeption des Hörers (hier Mayer Gmelin) möglichst getreu wiedergegeben wird. Um sowohl der angestrebten Authentizität als auch der Lesbarkeit Rechnung zu tragen, orientierte sich die Bearbeitung an folgenden Grundregeln:

- Der Formelsatz wurde zur leichteren Nachvollziehbarkeit von Beweisschritten übersichtlicher gestaltet.
- Im Prosatext wurden elementare Schreibfehler korrigiert und häufig fehlende Zeichensetzungen dort ergänzt, wo sie die Lesbarkeit des Textes erleichtern.
- Korrekturen und Durchstreichungen wurden nur dann kenntlich gemacht, wenn sie entzifferbar waren.
- Die Strukturierung des Textes entspricht dem Original, d. h. es wurden keine zusätzlichen Absätze und Überschriften eingefügt.
- Häufig trifft man auf kleingeschriebene Satzanfänge; diese wurden so belassen, da die Lesbarkeit dadurch nicht beeinträchtigt wird.
- Das Original weist eine Reihe von Brüchen in den Satzkonstruktionen und Fehlern in den Formeln auf; diese wurden in der Bearbeitung stellenweise durch Fußnoten kommentiert
- Unlesbare Textteile wurden durch XXX markiert.
- Neben der üblichen Seitenzählung, vorgegeben durch den Umbruch des Transkriptionstextes wurde im Textverlauf auch die Paginierung des Originals dokumentiert. Die Bezeichnung bezieht sich dabei erstens auf eine Durchnummerierung der Seiten des Originals und zweitens auf die Anzahl der Blätter (rechte und linke Seite des Blattes); Beispiel: -Seite 7- [Blatt 4r].

Ein Inhaltsverzeichnis im üblichen Sinne wurde nicht erstellt, da dies der Intention der Bearbeitung widerspräche. Stattdessen folgt eine

Kursorische Beschreibung des Inhalts

---

10 Siehe Hesse (1897, 714)

(Die im Folgenden angegebenen Seitenzahlen entsprechen der Durchnummerierung des Originals. Gemäß der oben beschriebenen behandelten Themen gliedert sich das Manuskript in vier Teile.)
1)(S.1-44): Grundlage aller Überlegungen bildet eine geometrisch-heuristische Einführung des Zahlensystems **(S. 1-6)**, bei der die auf der Zahlengeraden vorgegebenen natürlichen Zahlen durch über Operationen und deren Umkehrungen gewonnene „neue“ Zahlen „aufgefüllt“ werden: negative Zahlen, Brüche, irrationale Zahlen. Von den aus der Wurzelziehung entstandenen irrationalen Zahlen wird ohne weiteren Kommentar folgendes behauptet: “die irrationalen Zahlen oder, wie man sie allgemein nennt, die imaginären Grössen lassen sich nun alle darstellen als die Summe zweier reellen Zahlen, deren eine mit *i* multiplizirt ist.“ **(S.6.)**.
Direkt anschließend formuliert Hesse das Ziel des weiteren Vorgehens, das er später mehrfach wiederholt: „Wir werden nun sehen, wie wir auf die trigonometrischen Grössen kommen, ohne die geometrische Darstellung zum Ausgangspunkt zu nehmen und wie wir also hier in der reinen Analysis diese Grössen betrachten müssen, obgleich sie nicht hierher gehören zu scheinen.“ **(S.6)**
Auf den folgenden Seiten wird in diesem Sinne der auf **S. 28** vollzogene Beweis des Eulerschen Satzes vorbereitet, der wie folgt kommentiert wird: „Man sieht aus dieser Herleitung der trigonometrischen Funktionen, wie man auch ohne geometrisches Bild zu diesen Grössen gelangt und dass wir hier überhaupt nur von dem geometrischen Bilde gesprochen haben zur Veranschaulichung und Erleichterung des Begriffs.“ **(S.28-29)** Das entscheidende Hilfsmittel hierzu ist der binomische Lehrsatz für ganze und für gebrochene Exponenten; ein Grenzübergang für reelle Exponenten wird naturgemäß nicht vollzogen. Der Lehrsatz wird ohne weiteren Kommentar auf die Reihenentwicklung von a^x angewendet für reelles x. Im Weiteren werden die Potenzreihenentwicklungen von $\sin x$, $\cos x$ und e^{ix} angesetzt, die Koeffizienten bestimmt und so der Eulersche Satz endgültig bewiesen.
Nach einem kurzen Einschub zu Logarithmen von imaginären Zahlen folgt ab **S. 32** ein Abschnitt über die Produktentwicklung der trigonometrischen Funktionen, basierend auf den ohne Beweis zur Verfügung gestellten Fundamentalsatz der Algebra (der nicht als solcher kenntlich gemacht wird). Die Ergebnisse werden auch hier auf zwei verschiedene Arten erreicht; die einfachere der beiden Ableitungen gründet auf einem heuristisch durchgeführten Grenzübergang **(S. 37)**. Hesse kommentiert das wie folgt: „Zu diesem Resultat ((Poduktentwicklung von cos x)) sind wir auf einem ziemlich weitläufigen Wege gelangt. Man kann viel schneller zu demselben gelangen auf einem anderen Wege, der mathematisch nicht streng ist, aber dennoch sehr brauchbar, indem er für das Gedächtnis leichter zu behalten ist, und in der Ableitung ohne Schwierigkeiten verläuft.“ **(S.37)**
Der Abschnitt endet mit der Anwendung der Produktentwicklung von *sin* auf die Bestimmung von π.

2)(S.44-74): Dieser Teil des Manuskripts widmet sich endlichen und unendlichen Reihen. Zu Beginn werden die Summenformeln der endlichen geometrischen und arithmetischen Reihen berechnet. Die arithmetische Reihe wird definiert als eine Reihe, bei der „ entweder die erste, zweite, dritte, …, *n*-te Differenzreihe eine constante Reihe ist“ **(S. 46)**. Diese Definition wird als die „allgemeinst mögliche“ bezeichnet. Auch hier wird ein Ergebnis, nämlich die Summenformel der endlichen arithmetischen Reihe auf zwei verschiedene Weisen hergeleitet. Als Beispiel wird die Summenformel der Reihe der Quadratzahlen berechnet und eine Anwendung dieser Formel auf ein Beispiel aus der Artillerie, nämlich die Berechnung eines Haufens von Kanonenkugeln vorgeführt **(bis S. 55)**. Danach folgt ein kurzer Exkurs über Pyramidalzahlen **(bis S. 58)**.
Direkt anschließend werden (ohne Absatz oder Überschrift) unendliche Reihen und die Begriffe Konvergenz und Divergenz von Reihen eingeführt: Konvergenz ist „diejenige Eigenschaft einer unendlichen Reihe, dass sich keine endliche Summe für selbige feststellen lässt“, Divergenz bedeutet das „Gegentheil“. „Convergirend ist immer dann eine Reihe, wenn jedes Glied immer grösser ist, als die nachfolgenden alle zusammengenommen.“ (**S. 58)** Mit Hilfe heuristischer Grenzwertbetrachtungen wird die Konvergenz bzw. Divergenz der unendlichen geometrischen Reihe

für verschiedene Definitionsbereiche nachgewiesen. Auch alle weiteren Konvergenz- und Divergenzbetrachtungen von Reihen (z. B. harmonische Reihe) bedienen sich heuristischer Methoden und werden überwiegend ohne Formelsprache formuliert.
Ab **S. 61** werden einige der bekannten allgemeinen Konvergenzkriterien für Reihen vorgestellt (z. B. Vergleichskriterium und Quotientenkriterium) und kurz auch alternierende und imaginäre Reihen abgehandelt. Der Abschnitt schließt mit einigen einfachen Ergebnissen zur Interpolation von Reihen, die als für die Physik besonders relevant bezeichnet werden. Dies wird durch das Durchrechnen eines konkreten Beispiels („Berechnung der Elasticität des Wasserdampfes für verschiedene Temperaturen“) bekräftigt **(S. 73).**

3)(S.75-83): In diesem Abschnitt werden die entsprechenden Formeln für Permutationen mit und ohne Wiederholungen und ebenso für Kombinationen mit und ohne Wiederholungen hergeleitet. Für Kombinationen ohne Wiederholungen werden zwei etwas unterschiedliche Beweisführungen vorgestellt, und Hesse kommentiert dies so: „Im Grunde sind beide Herleitungen nicht sehr verschieden voneinander, die erste scheint wissenschaftlicher, die zweite ist tauglicher, schnell in Gedanken abzuleiten und sich dadurch die Formel immer gegenwärtig zu erhalten.“ **(S. 80)** Tatsächlich besteht die zweite Herleitung überwiegend aus empirischen Überlegungen, während im ersten Fall der Einsatz von Formelsprach eine deutlich wichtigere Rolle spielt.

4)(S.84-147): Dieser letzte Teil des Manuskriptes widmet sich der Theorie und Praxis der Lösung von Gleichungen. Zunächst werden elementare Lösungsmethoden von Gleichungen 1. Grades mit einer und mehreren Unbekannten vorgestellt **(S. 84-92)**. Ergebnisse der Determinantentheorie werden nicht eingesetzt und Hesse bemerkt dazu: „ Wenn man aber zu den Gleichungen mit 3 Unbekannten gelangt, werden diese Methoden langwierig und unbequem, man nimmt dann, wenn einem die bequemste und symmetrischste von allen, die mit Hülfe der Determinantentheorie, verschlossen ist, zu folgender seine Zuflucht: … .“ **(S. 85)** An dieser Stelle wird die Methode der Reduktion auf eine Gleichung mit zwei Unbekannten geschildert. Hesse bezeichnet diese Methode im Einzelfall als „umständlich und schwierig“, weshalb einige Beispiele aus der Physik und Chemie durchgerechnet werden (spezifisches Gewicht einer Legierung oder einer Mischung; Bestimmung der Atomgewichte einer chemischen Verbindung) **(S. 85-92)**. Im Folgenden werden die Gleichungen 2., 3, und 4. Grades verhandelt **(S. 93-113)**, wobei die elementaren Verfahren der Reduktion und Elimination eingesetzt werden.
Für Gleichungen 5. Grades zitiert Hesse den Satz von Abel (eine allgemeine Polynomgleichung 5. oder höheren Grades ist nicht durch Wurzelausdrücke lösbar) und begründet damit, dass eine allgemeine Theorie der Gleichungen *n*-ten Grades notwendig ist, um zu weiteren Ergebnissen zu gelangen **(S. 113)**. Zu diesem Zweck wird folgender Satz formuliert und bewiesen: „Jede Gleichung *n*-ten Grades, mögen ihre Coefficienten relle oder imaginär sein, hat immer eine Wurzel von der Form $x + iy$ … .“ Hesse weist an dieser Stelle darauf hin, dass der Beweis der Aussage von Légendre stammt und gibt eine Übersicht zum Gang des umfangreichen Beweises **(S. 114-119)**, bevor er sich den Details widmet. Anschließend wird gezeigt, dass eine Gleichung *n*-ten Grades genau *n* Wurzeln hat **(S.120)**. Bemerkenswert ist, dass Hesse in diesem Kontext immer wieder empirisch, ohne nähere Erläuterung, den Begriff der Funktion (ganze und symmetrische) verwendet, etwa bei der Lösung der Aufgabe, die Koeffizienten der Gleichung *n*-ten Grades durch ihre Wurzeln zu bestimmen **(S.121 ff)**. Es wird insbesondere folgender Satz von Cauchy formuliert und bewiesen: „ … jede ganze symmetrische Function der Wurzeln lässt sich immer rational durch die Coefficienten ausdrücken. Für diesen Satz hat Cauchy einen Beweis geliefert, dessen Gang folgender ist.“ **(S. 127)** Der Beweis wird am Beispiel von Gleichungen 2. Grades durchgeführt.

Die verbleibenden **Seiten 134-147** präsentieren schließlich Methoden zur Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung *n*-ten Grades und den Beweis des Satzes von Sturm über die Anzahl von Wurzeln einer Gleichung zwischen zwei vorgegebenen Zahlen **(S.139-147)**. Ausführlicher vorgestellt wird dabei die Gräfesche Methode, während die Eulersche Methode nur angedeutet ist **(S.134-139)**.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Hesse in den Abschnitten 1)-3) im Wesentlichen den Stoff der damals bekannten Lehrbücher[11] zur Algebraischen Analysis abhandelt. Das Vorgehen ist stellenweise in vertretbarer Weise weniger exakt, etwa in der präzisen Bereitstellung von Begriffen oder der Angabe von Voraussetzungen für den Geltungsbereich von Aussagen. Stattdessen ist Hesses Darstellung sehr viel lebendiger und wendungsreicher als die Lehrbuchliteratur und begünstigt damit die aktive Mitarbeit der Hörer.
Die abschließende ausführliche Auseinandersetzung mit der Theorie und Praxis der Lösung von Gleichungen bedient einerseits das Bedürfnis von Studenten der Anwendungen nach praktischen mathematischen Hilfsmittel. Andererseits fördert die eingehende Schilderung von Beweisen, selbst wenn sie nicht in größtmöglicher Allgemeinheit durchgeführt werden, das Verständnis für mathematisches Denken.
Hesse gelingt es damit insgesamt auf bemerkenswerte Weise, einerseits der Anforderung zu genügen, den Umgang mit konkreten mathematischen Werkzeugen zu vermitteln, und andererseits das für einen forschungsorientierten Mathematiker erstrebenswerte Ziel zu verfolgen, die Vielfalt mathematischer Denkweisen durch komplexe Beweisstrukturen aufzuzeigen. Dass Gmelin als angehender Chemiker dieses Manuskript wertschätzte, zeigt nicht zuletzt die Tatsache, dass er es über Jahrzehnte aufbewahrt hat**.**

Literatur

Cantor, Moritz (1903): Ferdinand Schweins und Otto Hesse; in: *Heidelberger Professoren aus dem 19. Jahrhundert*. *Festschrift der Universität Heidelberg zur Zentenarfeier der Erneuerung durch Karl Friedrich*, Band II (Carl Winter's Universitätsbuchhandlung, Heidelberg), 221-242.

Hensel, Susann: „Die Auseinandersetzungen um die mathematische Ausbildung der Ingenieure an den Technischen Hochschulen in Deutschland Ende des 19. Jahrhunderts"; in: Hensel, Susan /Ihmig, K.-H. / Otte, M. (Hrsg.): *Mathematik und Technik im 19. Jahrhundert in Deutschland. Soziale Auseinandersetzungen und philosophische Problematik* (Vandenhoeck u. Ruprecht, Göttingen), 1-111.

Hesse, Ludwig Otto (1897): *Gesammelte Werke*, *hrsg. von der Mathematisch-Physikalischen Classe der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften* (Verl. d. K. Akademie, München)

Kern, G. (1992): *Die Entwicklung des Faches Mathematik an der Universität Heidelberg 1835-1914*. Wissenschaftliche Arbeit im Fach Geschichte an der Universität Heidelberg für das Lehramt an Gymnasien.

11 z. B. Oskar Schlömilch: Handbuch der Algebraischen Analysis (2. Aufl, 1851), Moritz Stern: Lehrbuch der Algebraischen Analysis (1860).

Klein, Felix (1926, 1979): *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Springer, Berlin, 1979 publizierter Reprint der 1926 erschienenen Ausgabe)

Lorey, Wilhelm (1916): *Das Studium der Mathematik an den Deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts* (B.G. Teubner, Leipzig und Berlin)

Remenyi, Maria (2002): „Ludwig Otto Hesse. Mathematik Lehren und Lernen in Heidelberg um 1860"; in: Abele, Albrecht/Selter, Christoph (Hrsg.): *Mathematikunterricht zwischen Tradition und Innovation* (Beltz Verlag, Weinheim), 77-92.