Die reine Mathematik im Rahmen der Sektion

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen **3**

2 Die Entwicklung der reinen Mathematik in der Sektion **5**
2.1 Die Phase der Etablierung (1843-1854) 6
2.2 Die Phase der Konsolidierung (1856-1866) 12
2.3 Die Phase der Expansion (1867-1890) 19

3 Zur personellen Struktur der Sektion **65**

4 Zusammenfassende Bemerkungen **67**
4.1 Philosophie und Geschichte der Mathematik 67
4.2 Geometrie und Topologie 70
4.3 Algebra 73
4.4 Analysis 75
4.5 Invariantentheorie 76
4.6 Zahlentheorie 77
4.7 Logik und Mengenlehre 77
4.8 Mathematischer Unterricht 77
4.9 Übersicht zur Entwicklung der einzelnen Disziplinen 78
4.10 Übersicht zur Zuordnung der einzelnen Vorträge zu größeren Sachgebieten 81

1 Vorbemerkungen

Im Folgenden wird versucht, die Entwicklung der reinen Mathematik innerhalb der Sektion für Mathematik der Naturforscherversammlung darzustellen. Hierbei sind rund 200 Beiträge zu berücksichtigen. Um auch weniger wichtigen Vorträgen gerecht werden zu können und um möglichst viel Information zu den einzelnen Vorträgen vermitteln zu können, wurde zuerst ein chronologischer Durchgang, beginnend mit der Gründung der Sektion 1843 und endend mit Schaffung der Deutschen Mathematikervereinigung 1890, gewählt. Zu diesem Zwecke wurde die in der allgemeinen Einführung bereits genannte erste Periode (von der Gründung bis Mitte der 60er Jahre) weiter unterteilt, während die dritte dort genannte Periode hier keine Berücksichtigung mehr findet. Im zweiten Abschnitt werden dann einige Hinweise zu den aus der Sicht der reinen Mathematik aktivsten Teilnehmern der Sektion gegeben, während ein dritter Abschnitt zusammenfassende Betrachtungen über die gemachten Ausführungen enthält. Dieser dritte Abschnitt sei vor allem demjenigen Leser empfohlen, der an einer ersten Orientierung zum Thema reine Mathematik in der Sektion interessiert ist. Nähere Ausführungen zu den einzelnen Vorträgen kann er dann im ersten Abschnitt dort finden, wo die entsprechende Versammlung besprochen wird. Hier wird er auch Hinweise auf weiterführende Literatur und dergleichen finden, die im dritten Abschnitt zugunsten der knappen Information nur spärlich gegeben werden.

Die Verhandlungen, das heißt im Wesentlichen die Vorträge, in geringerem Umfang auch die Diskussionsbeiträge, die in der Sektion stattfanden, wurden im Tageblatt (abgekürzt: TB) der Versammlung oder im Amtlichen Bericht (AB) dokumentiert. Meistens lagen diesen Mitteilungen die Mitschriften der Schriftführer der Sektion zugrunde, die innerhalb einer recht kurzen Frist dem Redaktionskomitee abzuliefern waren. Dieses Verfahren erklärt die relativ große Anzahl von Fehlern und von miss- bis unverständlichen Passagen, die man in den Veröffentlichungen findet. Es ist klar, dass das auf diese Art und Weise zustande gekommene Material nicht den hohen Ansprüchen genügen kann, die man an referierte Veröffentlichungen zu stellen gewohnt ist. Hinzu kommt, dass die eher knapp bemessene Zeit für einen Vortrag (in der Regel 30 Minuten, gelegentlich auch 20) eine systematische und detaillierte Entwicklung eines Gegenstandes nur beschränkt zuließ. Wir müssen also die erhaltenen Berichte überwiegend als Zusammenfassungen und programmatische Erklärungen interpretieren ('state of the art', wie man gerne sagt). Bei einigen Versammlungen wurden auch Kurzreferate aus der Feder der Vortragenden selbst abgedruckt (meist 10 bis 15 Zeilen lang) oder ganze Abhandlungen, die dann einen entsprechenden Umfang erreichen konnten und oft auch noch seperat erschienen (typisches Beispiel hierfür sind die Beiträge von Hermann Schapira). Im Großen und Ganzen bilden diese aber die Ausnahme.

Nicht selten kommt es auch vor, dass wir von einem Beitrag nicht mehr als seinen Titel erfahren. Dann wurde gelegentlich versucht, dessen Inhalt über andere Quellen zu rekonstruieren, zum Beispiel wenn sich eine ähnlich lautende Veröffentlichung vom gleichen Autor ermitteln ließ.

2 Die Entwicklung der reinen Mathematik in der Sektion

Die reine Mathematik stand anfänglich in der Sektion und im Gesamt der Versammlung unter einem gewissen Rechtfertigungsdruck. Hiervon zeugen Referate wie dasjenige von Julius Zech (1844) über das Verhältnis von reiner Mathematik und Naturforschung, worin dieser zu zeigen versucht, dass die Mathematik als ein Teil der Naturforschung anzusehen sei, und deshalb - so dürfen wir ergänzen - ihren Platz sehr wohl im Rahmen einer Versammlung der Naturforscher und Ärzte habe. Seine Argumente hierfür lesen sich so:

> „Er (J. Zech) wies zuerst die Ähnlichkeit der Naturforschung und Mathematik schon darin nach, dass auch die letztere vom Gegebenen ausgehe wie die Naturforschung, nämlich von den Grundbegriffen Zahl, Größe, Kraft. Ebenso fänden sich die Formeln der Mathematiker in der Natur bestätigt; das apriorische Verfahren könne man darum in der Mathematik einschlagen, weil sie sich zu den Naturwissenschaften wie das Allgemeine zum Besonderen verhalte" (AB, 12).

Die reine Mathematik konnte sich nur zögerlich als Gegenstand in der Sektion durchsetzen. Erst auf der Versammlung 1845 zu Nürnberg finden wir Vorträge über Themen aus ihrem Bereich (Ohm 1845; Ullherr 1845), die beiden vorangehenden Versammlungen weisen nur Beiträge mit einem mehr oder minder direkten Anwendungsbezug auf (Winkler 1843; Beskiba 1843; Lehmann 1844), sieht man einmal von dem eher wissenschaftstheoretisch zu nennenden Referat von J. Zech ab. Allerdings muss man berücksichtigen, dass die Grenzziehung reine/angewandte Mathematik damals etwas anders vorgenommen wurde als heute. Insbesondere gilt das für die Geodäsie, über die Georg Johann Winkler Edler von Brückenbrandt 1843 sprach, die nach dem Verständnis jener Zeit durchaus zur reinen Mathematik rechnete. Im Folgenden wird das moderne Verständnis dieser Unterscheidung in der Regel zugrunde gelegt.

In der Entwicklung der Mathematik in der Sektion lassen sich drei Phasen unterscheiden: 1. Die Phase der Etablierung der Mathematik als eigenständiger Gegenstand der Sektion (1843 bis 1854); 2. die Phase der Konsolidierung der erreichten Stellung (1856-1865) verbunden mit - wie wir später sehen werden - der Herausbildung eines 'harten Kerns' von Wissenschaftlern, die die Sektion nachhaltig mitgestalteten; sowie 3. die Phase der Expansion, die schließlich in die Gründung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung mündete (1866-1890) und in der die Mathematik zum dominanten Thema der Sektion wurde. Die reine Mathematik entwickelte sich in etwa parallel zur Mathematik allgemein, wobei sie allerdings in den Phase zwei und drei überproportional zunahm, so dass schließlich die Beiträge zum Bereich reine Mathematik sehr stark vorherrschten und die angewandte Mathematik nur noch eine untergeordnete Rolle spielte. In der ersten Phase erreicht die Mathematik in der Regel keine 50% der Sektionsvorträge, in der zweiten liegt sie meist (Ausnahmen: Karlsbad (1862), Stettin (1863) und Hannover (1865)) um 50% oder darüber, um in der dritten Phase eindeutig zu überwiegen (Ausnahmen: Rostock (1870) und Köln (1888), wo keine Sektion für Mathematik zustande kam). In der Aufbauphase wurden pro Versammlung etwa 1,75 Vorträge mathematischen Inhaltes gehalten, in der Konsolidierungsphase waren es dann dann 3,27 und in der dritten Phase schließlich 6,96. Grob kann man sagen, dass sich das mathematische Angebot von Phase zu Phase verdoppelte. Parallel hierzu verlief eine inhaltliche Entwicklung, die sich auf den kurzen Nenner 'weg von den Anwendungen, hin zur reinen Mathematik' kennzeichnen lässt (vergleiche hierzu den Abschnitt 4.9). Im Folgenden wird die Entwicklung der reinen Mathematik anhand der erarbeiteten Periodisierung nachvollzogen.

2.1 Die Phase der Etablierung (1843-1854)

In dieser Phase sind nur wenige Vorträge zu reinen Mathematik zu verzeichnen; die meisten Beiträge mathematischen Inhaltes beziehen sich auf die Anwendungen. Charakteristisch für die Grundtendenz dieser Periode dürfte die nachfolgende Passage aus dem Tageblatt der Versammlung zu **Graz 1843** sein:

> „Diese Gelegenheit ergriffen mehrere Mitglieder, namentlich Prof. von Ettingshausen aus Wien Prof. Steinheil aus München, Regierungsrat Prechtl, aus Wien, ihre Meynung auszusprechen, daß es überhaupt in dieser Section weder thunlich, noch auch nothwendig seyn dürfte, vollständige und ausführliche Abhandlungen vorzulesen, sondern daß es vollkommen genüge, nur die gefundenen Resultate in Kürze anzuzeigen, um alle Aufmerksamkeit der Anwesenden darauf hinzulenken, und zugleich anzugeben, aus welchen Quellen die weitere Belehrung darüber zu schöpfen sey. Diese von so gewichtigen Stimmen ausgesprochene Ansicht erhielt die allgemeine Billigung, und es wurde beschlossen, demgemäss in der Folge zu verfahren" (TB, 251).

Bei der Versammlung **Nürnberg 1845** stoßen wir erstmals auf einen Vortrag, der fern aller Anwendungen der Mathematik angesiedelt ist. Er wurde von Martin Ohm, Professor der Mathematik in Berlin, gehalten, der einer der letzten Vertreter der einstmals großen kombinatorischen Schule gewesen ist (vergleiche hierzu Bekemeier 1987, Jahnke 1989 und Jahnke 1990). Sein Thema lautete: „Über das Rechnen mit Ausdrücken der Form $p + q\sqrt{-1}$". Die Grundidee von M. Ohm (und wohl auch der kombinatorischen Schule, zumindest in ihrer späten Phase) ist es, den formalen Umgang mit Zeichen zu trennen vom inhaltlichen - gewissermaßen die Syntax abzukoppeln von der Semantik. Das ist seine Antwort auf die Herausforderung der Cauchyschen Analysis, welche das bloß formale Hantieren mit divergenten Reihen verbieten wollte. Recht deutlich wird die Ohmsche Position in dem Nachtrag, den er seinem Beitrag im Amtlichen Bericht (86/87) folgen ließ. Dort entwickelt er die Unterscheidung zwischen dem von ihm so genannten allgemein-bestimmten Integral und dem numerisch-bestimmten. Diese wird durch folgende Analogie erläutert:

> „Es wurde schlüsslich noch darauf aufmerksam gemacht, dass zwischen diesen beiden verschiedenen Begriffen des bestimmten Integrals in mancher Beziehung ein analoges Verhältniss bestehe wie zwischen einer allgemeinen, nach ganzen Potenzen von x fortlaufenden Reihe $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$ (in welcher x weder reell noch imaginär, sondern ganz allgemein, d.h. inhaltslos, als bloßer Träger der Operationszeichen gedacht wird, und mit welcher man nun nach bestimmten Gesetzen rechnen kann, ohne fürchten zu müssen deshalb auf Widersprüche zu stossen, obgleich diese Reihe nun weder konvergent, noch divergent ist) - also zwischen einer solchen allgemeinen unendlichen Reihe und einer numerischen, wo dem x ein bestimmter Ziffernwert beigelegt gedacht wird. Diese letztere (numerische) Reihe, wenn sie einen Werth hat (d.h. wenn sie konvergiert), ist der allgemeinen Reihe und also dem allgemeinen Ausdruck in endlicher Form gleich, welcher nach den Gesetzen der oben erwähnten Verstandesthätigkeiten, wiederum der allgemeinen Reihe gleich ist" (AB, 86).

Im Zuge seiner Ausführungen nimmt M. Ohm auch zu einem der bekanntesten Gegenbeispiele Cauchys Stellung (dieses findet sich im 'Resumée' von 1823 (Cauchy 1823, 230) und soll zeigen, dass eine unendlich oft differenzierbare Funktion nicht unbedingt durch die zugehörige Taylor-Reihe dargestellt werden muss):

> „... wenn [man] daher die Funktion $e^{-x^2-\frac{1}{x^2}}$ nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandeln will, nach der Ausführung aber bloss die Entwicklung von e^{-x^2} hat, so daß ihm der Faktor $e^{-\frac{1}{x^2}}$ während der Entwicklung abhanden gekommen ist, so ist dieses Paradoxon keineswegs wie Cauchy meint, dem Umstand zuzuschreiben, daß die Maclaurin'sche Reihe jedesmal konvergent seyn müsse (diese auch in Deutschland verbreitete Ansicht ist mit aller Energie zurückzuweisen), sondern weil er bald für $x = 0$ die Funktion $e^{-\frac{1}{x^2}}$ in $e^{-\frac{1}{0}}$, dann in $e^{-\infty}$, dann in $\frac{1}{e^\infty}$, hierauf in $\frac{1}{\infty}$ und zuletzt in 0 übergehen läßt, welches Verfahren die richtig aufgefaßte Theorie des Kalküls als zulässig nicht anerkennen kann" (AB, 7b).

Die in diesem Zitat angesprochene deutsche Gegenseite ergriff schon bald in der Person von Oskar Schlömilch[1]das Wort. Dieser gehörte zu den Anhängern der Analysis

[1]Zu Leben und Werk von O. Schlömilch vergleiche man Cantor 1901 sowie Koch 1990. Die Rolle von O. Schlömilch als Vorkämpfer der Cauchy-Analysis im deutschsprachigen Raum wird z.B. von W. Lorey (Lorey 1916, 104 n. 4) und von P. Stäckel (Stäckel 1906, 325) hervorgehoben.

im Stile von Cauchy und hat durch seine Publikationen zur Verbreitung von dessen Ideen in Deutschland beigetragen (Ähnliches gilt für Johann August Grunert, der auch mehrfach auf den Versammlungen anwesend gewesen ist, sich allerdings nie zu dieser Problematik äußerte - man vergleiche hierzu seine Nachtragsbände zu dem von Georg Simon Klügel (1739-1812) herausgegebenen „Mathematischen Wörterbuch" (1833-1836) - sowie für Johann Albrecht Eytelwein (1764-1848), der bereits 1835 in seinem Lehrbuch (Eytelwein 1824, 747) Cauchys „Cours d'analyse" zitierte). Im Tageblatt der Gothaer Versammlung 1851 heißt es knapp:

> „Es folgte Herr Prof. Schlömlich aus Dresden mit einem Vortrag über die Methode der unbestimmten Coefficienten, in welchem die derselben zu Grunde liegenden Voraussetzungen einer Kritik unterworfen und eine strengere Behandlung der Reihenentwicklungen mit Hilfe des maclaurin'schen oder taylor'schen Theorems gegeben wurde" (TB, 3).

Die Methode der unbestimmten Koeffizienten, heute meist als Koeffizientenvergleich bezeichnet, gehörte zu den von der kombinatorischen Schule favorisierten, da rein formal - das heißt ohne Konvergenzbetrachtungen - durchführbaren Verfahren. Weiter heißt es hierzu im Tageblatt: „Eine kurze Debatte entspann sich über die pädagogischen Rücksichten, die man bei Behandlung der Lehre von den Reihen in Bezug auf Betrachtungen aus der Differential- und Integralrechnung zu nehmen habe" (TB, 3). Leider erfahren wir über diesen interessanten Punkt nicht mehr. Einen Zugang zu dieser Bemerkung gewinnt man vielleicht wenn man sich klarmacht, dass die Reihenlehre nach Auffassung der kombinatorischen Schule unabhängig von der Differential- und Integralrechnung auf der Basis des binomischen Lehrsatzes betrieben werden konnte. Dieses von Schlömilch in Frage gestellte Konzept was im Unterricht durchaus erfolgreich[2].

Die Beiträge von M. Ohm und O. Schlömilch sind die einzigen, die sich mit dem Prozess, den Felix Klein später 'Arithmetisierung der Analysis' nennen sollte, beschäftigen. Bemerkt sei noch, dass O. Schlömilch zu den, was die Anzahl der Vorträge anbelangt, aktivsten Teilnehmern der Sektion zählte. Allerdings beschäftigte er sich sonst meist mit Themen aus dem Bereich der Geometrie (Ausnahmen: Schlömilch 1872a und Schlömilch 1872b).

Doch nun zurück nach Nürnberg. Dort findet sich noch ein weiteres Referat aus dem Gebiet der reinen Mathematik: J. Conrad Ullherr teilte „einen neuen Beweis von dem Satze mit, daß jede höhere Gleichung wenigstens eine Wurzel von der Form $p+q\sqrt{-1}$ habe". Der Vortragende dürfte hierbei seine gleichlautende Veröffentlichung aus dem Journal für die reine und angewandte Mathematik (vergleiche Verzeichnis II) vorgestellt haben, wo er mit Hilfe einer expliziten Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen die entsprechende Arbeit von Carl Friedrich Gauß (1777-1855) aus dem Jahre 1799 weiterzuentwickeln versuchte. Der Fundamentalsatz der Algebra war im 19. Jahrhundert ein Gegenstand, der intensiv bearbeitet wurde; Gino Loria (1862-1954) führt in seiner 1891 erschienenen Abhandlung zur Geschichte dieses

[2] Zu den pädagogischen Intentionen und Wirkungen der kombinatorischen Schule vergleiche man die beiden genannten Arbeiten von Jahnke.

Theorems rund 70 Publikationen (vorwiegend Originalbeiträge) zu diesem Thema im 19. Jahrhundert auf. Bemerkenswert ist, dass J. C. Ullherr ausdrücklich von der „Existenz" der Wurzel spricht, worin sich deutlich der durch C. F. Gauß bewirkte Sinneswandel hinsichtlich der Aussage des Fundamentalsatzes bemerkbar macht (vorher ging es um die Form - nicht um die Existent im modernen Sinne des Wortes - der Wurzeln; vergleiche Friedelmeyer-Volkert 1992).

Ein Vortrag, der die Geschichte der Mathematik und natürlich auch der Astronomie berührte, war der Bericht von Christian Frisch über den Stand der Vorarbeiten zu seiner Ausgabe der Werke von Johannes Kepler (1571-1630). Dieses Projekt beschäftigte die Sektion noch mehrfach (Kiel, 1845; Karlsruhe, 1858; Speyer, 1861; auch Reuschle 1856 und Argelander 1857 gehören hierher). Man gewinnt durch die verschiedenen Beiträge ein plastisches Bild von den Schwierigkeiten (zum Beispiel hinsichtlich der Beschaffung der Manuskripte Keplers), mit denen Ch. Frisch zu kämpfen hatte. Die „Opera omnia" erschienen schließlich achtbändig in den Jahren 1858 bis 1871 und werden heute noch vielfach benutzt.

Auf der Versammlung **Kiel 1846** finden wir zwei Beiträge von Heinrich Friedrich Scherk, der zu jener Zeit dort wirkte und der heute vor allem als akademischer Lehrer von Ernst Eduard Kummer (1810-1893) in Halle sowie als Entdecker mehrerer Minimalflächen (1835) bekannt ist, zur Zahlentheorie. Einmal ging es dabei um eine Verallgemeinerung des Satzes von Wilson (nach John Wilson (1741-1793)), der besagt, dass die Kongruenz $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$ genau für Primzahlen p gilt und der vor allem als Primzahlkriterium eine wichtige Rolle spielt. Die Fragestellung von H. F. Scherk lautet so: „Welcher Zahl ist, wenn p eine beliebige ungerade Primzahl, und n eine beliebige ganze Zahl ist, das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-n-1)$ nach einem Modus p congruent?" (AB, 204). Bezeichnet r den Rest, der sich bei der Division von p durch $n!$ ergibt, so lautet das Scherksche Ergebnis:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-n-1) \equiv (-1)^{n \frac{r^{\nu-1} p-1}{n!}} \bmod p$$

wobei ν als kleinste Lösung der Kongruenz $r^\nu \equiv 1 \bmod n!$ definiert ist (ν ist somit die Ordnung von r oder auch von p) und der Quotient auf der rechten Seite im Restklassenkörper p zu verstehen ist. Eine andere Überlegung des Vortragenden ging dann dahin, nicht mehr alle Faktoren der Fakultät zuzulassen, sondern nur noch eine Auswahl unter denselben, um dann nach Kongruenzen zu fragen.

Der zweite Vortrag von H. F. Scherk beschäftigte sich mit einer „Methode, durch welche es möglich wird, die Zahl der Zerfällungen einer Zahl n in ihre Summanden für jede einzelne Classe durch eine einzige Formel zu erfahren". Sein Ergebnis lautet so[3]:

$$\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}n \sin(\frac{1}{2}n\pi)^2$$

$$\frac{1}{12}n + \frac{1}{4} \sin(\frac{1}{2}n\pi)^2 - \frac{4}{9} \sin(\frac{1}{3}n\pi)^2$$

[3]Die im AB angegebenen Formeln sind nicht korrekt, worauf mich freundlicherweise Prof. Dr. Roquette (Heidelberg) aufmerksam gemacht hat, dem ich auch die richtigen Formulierungen verdanke.

Ein dritter Beitrag Scherks bestand in der Diskussion einiger Aufgaben, „die sich auf die Darstellung discontinuirlich auf einander folgender, jedoch von einander abhängigen Punkte durch continuirliche Linien beziehen". Hierzu erfahren wir nur den Titel; vermutlich ging es darum, durch eine vorgegebene Anzahl von Punkten eine Kurve möglichst 'gut' hindurch zu legen, also um eine Art von Interpolation.

In Kiel versuchte Ch. Frisch Bedenken bezüglich seiner Kepler-Ausgabe zu zerstreuen. die dahin gingen, dass durch den „Wiederabdruck von Kepler's Schriften mystische Ideen möchten neu angeregt werden und dadurch Unterstützung finden könnten" (AB, 209). Energisch widersprach er auch der Behauptung, J. Kepler habe die Astrologie verteidigt;

> „im Gegentheile wies er [das ist Frisch] nach, dass Kepler im Allgemeinen sich als Gegner der Astrologen gezeigt habe und häufig in Streit mit denselben gekommen sei, obgleich seine Stellung ihn oft gezwungen habe, 'astrologische Bedenken' zu verfassen. Nur in der Beziehung sei Kepler für die Astrologie in die Schranken getreten, als er geglaubt habe, durch besondere Constellationen werde die 'natura sublunaris' aufgeregt, und diese Aufregung zeige sich namentlich in der Aenderung der Witterung" (AB, 208f).

Die mathematische Ausbeute der Versammlung **Regensburg 1849** fällt gering aus: Hier finden wir nur einen Vortrag von Johann Peter Hermann Huther, der „eine elegante und sinnige Methode" zeigte, „den Werth einer Funktion, welcher für eine gewisse Annahme der Variablen auf 0/0 führt, auch ohne Differentialrechnung zu bestimmen". Diese Methode wurde, ohne dass gesagt würde, worin sie bestand, an einem Beispiel Johann Bernoullis erläutert, das jener „den französischen Mathematikern vorgelegt hatte, und das diese nicht zu lösen vermochten" (TB, 47). Vermutlich handelte es sich dabei um eines der beiden Beispiele, die Guillaume Marquis de L'Hopital (1661-1704) in seinem berühmten Lehrbuch „Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes" (1696) angibt und die ihm nach seiner Aussage von Johann Bernoulli mitgeteilt worden waren:

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} \text{ und } y = \frac{a\sqrt{ax} - xx}{a - \sqrt{ax}}$$

(zu nehmen für $x = a$; vergleiche Struik 1969, 316).

Keinen Beitrag im Bereich der reinen Mathematik gab es bei der Versammlung in **Greifswald 1850**. Der Mathematiker J. A. Grunert, der hier tätig war und der bereits als Wegbereiter der Cauchy-Analysis genannt wurde, sprach über ein astronomisches Thema. Mehr Stoff dagegen bietet das Tageblatt **Gotha 1851**. Hier treffen wir neben dem oben im Zusammenhang mit M. Ohm bereits besprochenen Vortrag von O. Schlömilch auf ein Referat von Ephraim Salomon Unter zu „Ampère's Methode, die Gleichungen vierten Grades aufzulösen" sowie auf einen Beitrag des Astronomen Peter Andreas Hansen, dessen Behandlung des Dreikörperproblems auf der Versammlung mehrfach diskutiert wurde, über die Herleitung der „Gaußschen

Gleichungen der sphärischen Geometrie durch Anwendung der Ausdrücke ... welche den Sinus und Cosinus eines Bogens durch Exponentialgrößen mit imaginären Exponenten darstellen". Die fraglichen Formeln, die auch nach Jean Baptiste Joseph Delambre (1749-1822) und nach Karl Brandan Mollweide (1774-1825) benannt werden, sehen so aus:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{b+c}{2}=\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{b+c}{2}=\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{b-c}{2}=\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{b-c}{2}=\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$

Dabei bezeichnen die Buchstaben in der üblichen Weise die Stücke eines sphärischen Dreiecks. Diese Formeln wurden 1807 von J. B. J. Delambre, 1808 von C. F. Gauß und 1809 von K. B. Mollweide veröffentlicht[4].

Die Grundidee der Auflösungsmethode von André Marie Ampère (1775-1836), die dieser in der Abhandlung Ampère 1836 geschildert hatte, besteht darin, die zu lösende Gleichung vierten Grades als Produkt zweier Trinome anzusetzen (der kubische Summand lässt sich bekanntlich immer 'wegsubstituieren'):

$$x^4+bx^2+cx+d=(x^2-px+q)(x^2+px+q).$$

Die hierbei zu bestimmenden Koeffizienten p und q ergeben sich nach Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich als Lösungen quadratischer Gleichungen. Das geschilderte Verfahren geht, wie E. S. Unger richtig anmerkt, auf René Descartes („La géométrie", 1637) zurück; es wurde von Leonhard Euler in seiner „Algebra" (1770) in einigen Spezialfällen ausführlich untersucht.

In der Sektion verteilt wurde eine Schrift „Scholien zu Christoph Rudolphs Coß" von Herrmann Adolph Drechsler aus Dresden, in der der Verfasser „auf die Wichtigkeit des historischen Studiums der Mathematik hinwies" (TB, 10). Die Verteilung von Schriften findet sich öfter bei den Versammlungen: Sie war wohl eine günstige Gelegenheit gerade für nicht angereiste Wissenschaftler, ihre Ergebnisse mitzuteilen.

Die nächsten drei Versammlungen Wiesbaden (1852), Tübingen (1853) und Göttingen (1854) bringen kaum Beiträge zur reinen Mathematik, sieht man einmal von einem Referat von Johann Heinrich Traugott Müller in Wiesbaden über mathematische Formelsammlungen ab. Bemerkenswert ist natürlich, dass die Tagung im Mekka der damaligen deutschen Mathematik, gemeint ist hier natürlich Göttingen, so wenig zur reinen Mathematik bietet. Einige Gründe liegen hierfür auf der Hand: C. F. Gauß wurde 1854 bereits 77 und war nur noch wenig aktiv. Benedikt Listing, der zweite

[4] Näheres zu dem 'Fundamentalsystem' und zu seiner Geschichte findet man bei Braunmühl 1903).

Göttinger Mathematiker, war auch - vielleicht muss man sagen: hauptsächlich - Physiker (er war Nachfolger von Wilhelm Weber in Göttingen (1839)) und zusätzlich mit der lokalen Tagungsleitung betraut; er sprach über ein Thema aus der Optik (Totalreflexion) und führte optische Versuche in der Sektion für Physiologie vor. Auch Bernhard Riemann zog es vor, im Kreise seiner Sektion über ein Problem der mathematischen Physik zu sprechen; er war daneben als Schriftführer der Sektion aktiv. Der einzige Beitrag zur reinen Mathematik kam 1854 von Moritz Abraham Stern, einem weiteren Göttinger Mathematiker, der „über einige zahlentheoretische Sätze" berichtete, insbesondere über die Zerlegung von Primzahlen in Summen von Quadratzahlen. Bekanntlich hat Joseph Louis Lagrange (1736-1813) 1770 bewiesen, dass sich jede natürliche Zahl als Summe dreier Quadratzahlen schreiben lässt. Vermutlich drehte sich M. A. Sterns Vortrag um derartige Fragen.

Damit sind wir am Ende des ersten Abschnittes angelangt, der mit dem Terminus 'Etablierung' überschrieben war. Insgesamt spielte die reine Mathematik in dieser Periode noch eine recht bescheidene Rolle in der Sektion. Das sollte sich bald ändern.

2.2 Die Phase der Konsolidierung (1856-1866)

Mit der Versammlung **Wien 1856** beginnt eine neue Phase in der Entwicklung der reinen Mathematik in der Sektion. Mit sieben Themen aus diesem Bereich (bei insgesamt fünfzehn Vorträgen in der Sektion Mathematik und Astronomie, von denen einige - im Gegensatz zum Titel der Sektion - durchaus physikalischen Fragen gewidmet waren) erreicht die reine Mathematik erstmals eine stattliche Anzahl von Beiträgen und nähert sich der Fünfzig-Prozent-Marke. Allerdings ist hier die Quellenlage besonders schlecht; nur der Vortrag von Bernhard von Gugler wird im Tageblatt ausführlicher wiedergegeben. Folgende Referate werden angekündigt: Karl Gustav Reuschle über seine im selben Jahr erschienenen zahlentheoretischen Tabellen und über Professor Frischs Kepler-Ausgabe sowie Georg Johann Winkler Edler von Brückenbrand über Ausführungen von Simon Spitzer über die Bestimmung des n-ten Differentialquotienten von $y = tg\, x$ und Bemerkungen von G. J. Winkler von Brückenbrand zu Differentialgleichungen ersten oder höheren Grades mit Koeffizienten, welche rationale Funktionen der beiden Veränderlichen sind. Die eigentliche Überraschung dieser Versammlung aber ist, dass Karl Weierstraß, eben erst auf Betreiben von Ernst Eduard Kummer an die Gewerbeschule nach Charlottenburg berufen, einen Vortrag über „Dioptrische Konstruktionen" hielt, eine der seltenen Gelegenheiten, wo sich dieser Forscher mit den Anwendungen der Mathematik konkret auseinandersetzte[5]. Vielleicht muss man hierin eine Homage an Joseph Petzval sehen, den einflussreichen Wiener Mathematiker, der die dortige Tagung leitete und

[5]Zu Weierstraßens Verhältnis zur angewandten Mathematik lesen wir bei K. Richter: „Mit Anwendungen der Mathematik beschäftigte er sich kaum. Seine Einstellung zu den Anwendungen war aber wesentlich positiver als die vieler seiner Fachkollegen in Deutschland. Anläßlich seiner akademischen Antrittsrede sagte er, er schätze die Mathematik deshalb so hoch, 'weil durch sie allein ein wahrhaft befriedigendes Verständnis der Naturerscheinungen vermittelt wird"' (Wussing 1985, 412).

der in der Sektion selbst über seine dioptrischen Arbeiten berichtete[6].

Ausführlich dokumentiert sind die Ausführungen von B. von Gugler „über die Bestimmung der Tangenten und Krümmungshalbmesser auf elementare Weise". Sein Ziel charakterisiert das Tageblatt folgendermaßen:

> „Definiert man die Tangente als die Grenzlage einer Secante, welche sich um einen ihrer Schnittpunkte so lange dreht bis ein zweiter Schnittpunkt mit dem ersten zusammenfällt, so kann man, wie Gugler an einer Reihe von Beispielen nachweist, aus jener allgemeinen Definition und der Definition einer bestimmten Curve unmittelbar eine charakteristische Eigenschaft ihrer Tangente herleiten. Solche directen Herleitungen empfehlen sich namentlich für Unterrichtszwecke" (TB, 193).

Heute würde man vielleicht von einer beabsichtigten Elementarisierung der Grundaufgabe der Differentialrechnung sprechen. Wie diese konkret ausgeführt wurde, bleibt offen. Es folgen dann noch einige Sätze über „cyclische Curven" (damit sind die Zykloiden gemeint). Hinsichtlich der Beweise wird der Leser auf das „Lehrbuch der deskriptiven Geometrie" Guglers verwiesen, das es immerhin auf vier Auflagen brachte (Nürnberg 1842, Stuttgart 1856, 1874 und 1880). Deskriptive Geometrie war der seinerzeit übliche Name der heute darstellend genannten geometrischen Disziplin. Abschließend heißt es im Tageblatt: „Von den 41 Mitgliedern betheiligten sich demnach an den Verhandlungen 9; darunter 5 Österreicher (4 in Wien wohnend), 4 aus dem übrigen Deutschland" (TB, 17).

Anlässlich der Versammlung **Bonn 1857** hielt Moritz Cantor einen längeren mathematikhistorischen Vortrag. Der Heidelberger Privatdozent betrachtete Michael Stifel und Hieronymus Cardanus als Vertreter verschiedener Arten („Richtungen"), wie man Wissenschaft, insbesondere Mathematik, betreiben kann. Der erstere gilt laut M. Cantor als Verkörperung der „sanguinischen Richtung, die sich vorzüglich in voreiligen und zu kühnen, häufig unrichtigen Inductionsschlüssen documentirte, und die Stifel, wenn sie sich auf praktische Fragen einschliessen häufig in Verlegenheit setzte" (AB, 309). Als Beleg hierfür wird Stifels Voraussage eines Weltuntergangs für den 15. Oktober 1533 erwähnt und die Tatsache, dass nur die Intervention von M. Luther und Ph. Melanchton ihn vor einer harten Bestrafung bewahrte[7]. Dagegen war H. Cardanus (1501-1576) für M. Cantor die „rein wissenschaftliche Natur", was

[6] J. Petzval gelangte 1840 zu großer Berühmtheit, als es ihm gelang, durch Berechnungen das Portrait-Doppelobjektiv („Petzval-Objekt") zu entwerfen, das die Lichtstärke der bis dahin üblichen Objektive um das Zehnfache übertraf, wodurch die für Portraitaufnahmen erforderlichen 'Sitzungen' erheblich verkürzt werden konnten. Das Objektiv wurde von Peter Wilhelm von Voigtländer (1812-1878) mit großem wirtschaftlichen Erfolg gebaut, der allerdings an J. Petzval vorüberging.

[7] Übrigens hat auch John Napier (1550-1617), der Erfinder der Logarithmen, in seinem teilweise an Stifel anknüpfendem Werk „A Blanc Discovery of the whole Revelation of Saint John" (Edinburg, 1593) einen Weltuntergang prophezeit, allerdings für einen Zeitpunkt lange nach seinem Tode, nämlich zwischen 1688 und 1700. Einen Überblick zu Stifels Wortrechnung, die man sicherlich nicht als dessen wichtigste „wissenschaftliche" Leistung ansehen darf (insofern muss Cantors Ansatz hier kritisiert werden), findet sich bei Reich 1989, 82-85.

sich besonders in dessen zahlentheoretischen und algebraischen Sätzen (zum Beispiel in seiner Formel für befreundete Zahlen in der „Practica arithmetice ..." von 1539) zeige. Eine Zwischenstellung nimmt Petrus Ramus (1515-1572) ein, der zur „praktischen" Richtung gezählt wird. Auch in Bonn wurde das Schicksal der Kepler-Ausgabe besprochen, wobei J. Zech eindringlich an die Anwesenden appellierte, durch Subskription das weitere Erscheinen zu sichern.

1858 fand die Versammlung in **Karlsruhe** (damals Carlsruhe) statt, also in einer Stadt, die eine der aufstrebenden Technischen Hochschulen (damals nach dem Vorbild der Pariser École Polytechnique meist Polytechnika genannt) beherbergte. Ferdinand Jacob Redtenbacher (1809-1863), der maßgeblich am Aufschwung des Karlsruher Polytechnikums beteiligt gewesen ist und der zu den bekanntesten Ingenieuren seiner Zeit gehörte, wurde zum Vorsitzenden der Sektion IV „Mathematik, Astronomie und Mechanik" gewählt. Mit Christian Wiener, ab 1852 Professor für Geometrie und Geodäsie, war einer der Mathematiker, die zum 'harten Kern' der Sektion zu rechnen sind, in Karlsruhe ansässig (Ernst Schröder kam erst 1876 hierher); Chr. Wiener war auch bei der Organisation der Tagung aktiv. Die Wertschätzung, die man in Karlsruhe der Mathematik entgegenbrachte, zeigt sich schon in der Tatsache, dass wir hier erstmals einen Vortrag in den allgemeinen Sitzungen finden, der sich explizit mit der Mathematik beschäftigte: Joseph Petzval sprach über „die Bedeutung der Mathematik für die Naturwissenschaften" (vergleiche hierzu 4.1).

Auch in Karlsruhe beteiligte sich M. Cantor mit einem Beitrag über die Geschichte der Mathematik: „Zur ältesten Geschichte der Zahlzeichen". Darin versucht er die Frage zu klären, woher die Europäer ihre Kenntnis der heute üblichen arabischen (indischen) Ziffern bezogen haben könnten. Sein Ausgangspunkt dabei ist, dass von diesen Ziffern „eine frühere europäische Anwendung feststeht, als Leonardo Fibonacci mit den Arabern zusammentraf" (AB, 135). Als Beleg hierfür wird eine Stelle aus Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius (zirka 480-524/25) „Geometrie" angegeben. M. Cantor führt die Zahlzeichen, wie er die arabischen Ziffern auch nennt, sogar auf Pythagoras zurück, wodurch sich die anfängliche Frage transformiert zu: Wo hat Pythagoras die Zahlzeichen kennengelernt? Hierzu lautet die These: Er hat sie im Zweistromland von den Indern erhalten. Aus moderner Sicht erstaunt vor allem, wie viel der Heidelberger Mathematikhistoriker über die Person des Pythagoras als bekannt voraussetzt. Seine Hauptquelle zu diesem ist Eduard Röths „Geschichte unserer abendländischen Philosophie", Band zwei (Mannheim, 1858), gewesen. Eine wichtige Rolle in den Untersuchungen Cantors spielt die Einführung der Null, die er für eine Nacherfindung (relativ zu den anderen Ziffern) hält und die er auf die Zeit des indischen Mathematikers Arjabhata (*476) datiert. Den aktuellen Stand der Forschung in diesen diffizilen Fragen, der doch erheblich von den Ansichten Cantors abweicht, kann man bei Tropfke 1980, Joseph 1991, 239-48 und 311-16 sowie Ifrah 1989, 476-544 entnehmen.

In Karlsruhe konnte Chr. Frisch endlich den ersten Band seiner Ausgabe sowie Bögen des im Druck befindlichen zweiten Bandes präsentieren. Er schilderte bei diesem denkwürdigen Anlass noch einmal die Schwierigkeiten, mit denen er zu kämpfen hatte. Unter anderem erwähnt er, dass er die wichtigste Textquelle, nämlich 24 von

J. Kepler geschriebene Folianten (die 'Petersburger Manuskripte'), zum großen Teil selbst von Hand abgeschrieben habe.

Darüber hinaus treffen wir in Karlsruhe noch auf drei weitere Referate zur reinen Mathematik: Paul Escher sprach „Ueber den Flächeninhalt der Kugelzone", August Weiler „Ueber die Reduction der partiellen Differentialgleichung der ersten Ordnung mit $n+1$ Veränderlichen auf eine Differentialgleichung der n-ten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen" und Julius Zech „Ueber die verschiedenen Krümmungen in einem Punkt einer Fläche zweiten Grades". P. Escher beschäftigte sich mit dem folgenden stereometrischen Problem: Gegeben die Radien a und b der eine Kugelzone begrenzenden Parallelkreise mit dem Abstand h (auch Zonenhöhe genannt). Wie groß ist der Inhalt Z der Kugelzone? Die Antwort lautet:

$$Z = \pi\sqrt{[(a+b)^2 + h^2][(a-b)^2 + h^2}$$

Weiter zeigte der Vortragende, wie man eine der Kugelzone flächengleiche Ellipse (auch einen Zylindermantel) konstruieren kann. Geht die Zone in eine Kugelhaube über, so transformiert sich die Ellipse in einen Kreis. J. Zech beschäftigte sich mit der Lage der Krümmungsmittelpunkte bei Flächen zweiter Ordnung. Ausgehend von einem Ellipsoid konstruierte er oskulierende Ellipsen, mit deren Hilfe die gesuchten Punkte bestimmt werden können. Seine Betrachtungen gipfelten in dem Satz:

> „Folglich ist der Ort aller osculierenden Ellipsen (eines Ellipsoids) ein Ellipsoid, von welchem eine Axe die Normale ist, und die Krümmung in einem beliebigen Punkt ist so auf die im Endpunkt einer Axe zurückgeführt" (AB, 145)

Der Vortrag des Mannheimers A. Weiler behandelte eine von J. L. Lagrange gefundene Methode, wie man partielle Differentialgleichungen der Form

$$Z = Y\frac{\partial z}{\partial y} + X\frac{\partial z}{\partial x} + W\frac{\partial z}{\partial w} + \dots$$

(wobei $Z, Y, X, W, \dots$ Funktionen der n+1 Variablen $z, x, y, w, \dots$ sein sollen) auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückführt:

$$P\frac{d^n y}{dz^n} = Q$$

(wobei P und Q Funktionen von y und z sowie der Ableitungen $y^{'}, y^{''}$, ... genommen nach z - sind). Der Vortragende betonte weiter, dass dieses Verfahren auch bei der Lösung von Systemen von Differentialgleichungen Anwendung finden kann.

Die Tagung in **Königsberg 1860** brachte drei rein mathematische Vorträge, die allerdings alle nur kurz im Amtlichen Bericht wiedergegeben werden. Mit Heinrich Schröter meldete sich hier erstmals ein weiterer Mathematiker zu Wort, der zum 'harten Kern' der Sektion zu rechnen ist. Dieser sprach über die „Modulargleichung für die Transformation 11ter Ordnung der elliptischen Functionen", wobei er in seinen historischen Bemerkungen darauf aufmerksam machte, dass er vor allem Königsberger

Mathematiker (insbesondere Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)) gewesen seien, die sich mit dieser Frage aus dem Gebiet der Funktionentheorie beschäftigt hätten. Siegfried Hermann Aronhold, der ebenso wie H. Schröter aus der Königsberger Schule hervorgegangen ist, widmete sich in seinem Beitrag der „Entstehung der Invarianten und der sie begleitenden algebraischen Verbindungen, nach welchen dieselben aus einer einzigen Quelle der allgemeinen Transformation der Functionen, direct abgeleitet werden können" (AB, 250). Mit der Invariantentheorie und der Funktionentheorie waren damit zwei Themenkreise angesprochen, die die Sektion noch mehrfach beschäftigen sollten (vergleiche 4.4 und 4.5).

Über ein Thema aus der Gleichungslehre, nämlich über „den Grad der Resolventen von irreducibeln algebraischen Gleichungen", sprach Rudolf Luther. Dabei nannte er die folgenden beiden Tatsachen:

1. Ist der Grad n der vorgelegten Gleichung eine Primzahl p, so lässt sich eine Resolvente bilden, deren Grad gleich dem Produkt aller Primzahlen kleiner als p ist.

2. Ist $n = p \cdot q$, wobei p und q Primzahlen sein sollen mit $p > q$, so gibt es eine Resolvente, deren Grad gleich dem Produkt aller Primzahlen kleiner/gleich p ist.

Hieraus folgt, dass Gleichungen fünften Grades Resolventen vom Grad sechs, Gleichungen sechsten Grades ebenfalls solche vom Grad sechs und Gleichungen siebten Grades Resolventen vom Grade 30 besitzen.

Mit K. Weierstraß ergriff auf der Versammlung **Speyer 1861** einer der (später) prominentesten Mathematiker des 19. Jahrhunderts das Wort, um über „das Problem der kürzesten Linien auf den Oberflächen zweiter Ordnung" zu sprechen, also über ein Thema aus dem Bereich der Differentialgeometrie - ein Bereich, den der Berliner Mathematiker ansonsten kaum pflegte. Nach anfänglichen Bemerkungen über den Zusammenhang der Problemstellung mit der Geodäsie (Erde als Ellipsoid) und das bislang übliche Verfahren zur Auffindung kürzester Linien (Geodätische), das die Lagrangesche Bewegungsgleichung nach C. G. J. Jacobi mit Hilfe der Variation der Konstanten integriere, führte K. Weierstraß seine eigenen Methode vor. Diese beruht auf einer direkten Integration der Jacobischen Differentialgleichungen, was auf eine stark konvergente Reihe führt. Schließlich finden wir noch eine allgemeine Bemerkung zum Verhältnis Mathematik und Naturwissenschaften:

> „Die Convergenz ist bei der Erde auf 2 oder 3 Glieder zu beschränken. Die Theorie der ultraelliptischen Transcendenten ist also auch bequem anwendbar auf Probleme der angewandten Mathematik. Der Vortragende knüpft daran Bemerkungen über die Sicherheit des richtigen Entwicklungsganges der Mathematik, wenn sich die eingeführten Functionen direct in der Natur wieder finden. Uebrigens haben Mathematik und Naturforschung gleichen Zweck und schon darum ist die arithmetische

Speculation nicht überflüssig" (TB, 36)[8].

Alfred Enneper aus Göttingen beschäftigte sich mit einem Thema der Differentialgeometrie, das heute noch aktuell ist, nämlich mit Minimalflächen - ein Gebiet, zu dem A. Enneper drei Jahre später durch Einführung der heute nach ihm benannten Fläche einen wichtigen Beitrag liefern sollte (Enneper 1864). Er sprach „Über Minimalflächen, deren Haupteigenschaft ist, dass die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser in jedem Punkt verschwindet"[9]. Diese Flächen $z(x, y)$ werden nach J. L. Lagrange gegeben durch die partielle Differentialgleichung

$$r(1 + q^2) - 2pqs + (1 + p^2)t = 0,$$

wobei $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = s$ sein soll (Bezeichnungen von L. Euler). Diese wird vom Vortragenden mit Hilfe einer von A. M. Legendre 1787 angegebenen Variablentransformation integriert (vergleiche Dieudonné 1985, 613f). An den Vortrag Ennepers schloss sich eine längere Diskussion an, in der es um die Integralformel ging, die alle algebraischen Minimalflächen liefern sollte. A. Weiler, der diese für sich reklamierte, erntete damit Widerspruch. Als Urheber wurden Gaspard Monge (1746-1818) aber auch Ossian Bonnet (1819-1892) sowie Julius Weingarten (1836-1910) genannt.

Im Anschluss an den Bericht von Chr. Frisch über den Stand seiner Kepler-Ausgabe (mittlerweile waren drei Bände erschienen, der vierte im Druck) wurde über die Errichtung eines Kepler-Denkmals in Weil der Stadt oder Stuttgart diskutiert.

In **Karlsbad 1862** finden wir nur einen Beitrag aus dem Gebiet der reinen Mathematik: O. Schlömilch äußerte sich hier über die „Complanation von centrischen Flächen zweiten Grades". Unter Complanation verstand man die Zurückführung des Inhaltes einer gekrümmten Fläche auf denjenigen einer ebenen; zentrische Flächen werden heute als Mittelpunktsflächen bezeichnet (Beispiele hierfür sind Kugel, Ellipsoide, Hyperboloide). Auf solchen zentrischen Flächen werden durch zwei geeignet konstruierte Kegel zwei Zonen ausgeschnitten, deren Flächen sich durch elliptische Integrale erster und zweiter Gattung berechnen lassen. Dieser Sachverhalt wird von O. Schlömilch mit der Rektifikation von Ellipse und Hyperbel durch Giulio Carlo Fagnano (1682-1766) in Analogie gesetzt. Darüber hinaus wird noch von der Vorführung geometrischer Modelle durch G. Wolf berichtet. Aus Pappe gefertigte Körper führen „durch geeignete Combinationen zu einer sehr bedeutenden Mannigfaltigkeit geometrischer Gebilde" (AB, 191). In der Diskussion wurde gefordert, die gleiche Erzeugungsweise auch in der Kristallographie zur Anwendung zu bringen.

Nachdem auf der Versammlung **Stettin 1863** keine Sektion für Mathematik zustande gekommen war, brachte **Gießen 1864** einen neuerlichen Höhepunkt an ma-

[8] Die „ultraelliptischen Transcendenten", von denen hier die Rede ist, sind sogenannte Thetafunktionen, die K. Weierstraß bei der Integration verwendet und die sich in die fraglichen beständig (= absolut) konvergenten Reihen entwickeln lassen.

[9] Die Summe der Hälften der Kehrwerte der Hauptkrümmungsradien entspricht der mittleren Krümmung der Fläche, deren Verschwinden wiederum in Minimalflächen charakterisiert. Diese Einsicht geht auf Sophie Germain (1776-1831) zurück, während die im Vortrag genannte Charakterisierung von Jean-Baptiste-Marie-Charles Meusnier de la Place (1754-1793) stammt.

thematischer Aktivität: Alle Sektionsvorträge (neun an der Zahl) waren hier Fragen der reinen Mathematik gewidmet. Julius Plücker stellte „eine neue Auffassung des Raumes vermöge der Geraden als Raumelement" dar, womit die Theorie gemeint gewesen sein dürfte, die später als Liniengeometrie bekannt wurde. Deren Grundidee besteht darin, Geradengleichungen (in homogenen Koordinaten) als Koordinaten (sogenannte Linienkoordinaten) für Punkte des Raumes zu verwenden. Anders gesagt wird das durch einen Punkt gehende Geradenbüschel mit eben diesem Punkt identifiziert. Eine Richtung der algebraischen Geometrie des 19. Jahrhunderts, die unter anderem von Alfred Clebsch vertreten wurde, beschäftigte sich mit dem Studium geometrischer Gebilde (zum Beispiel Kurven) in Linienkoordinaten (vergleiche auch Gordan 1867). K. G. Reuschle ergriff in Gießen gleich dreimal das Wort. Er sprach über das Deltoid und über Punktepaare im Dreieck, welche mit dem Schwerpunkt in einer Geraden liegen, sowie über ein Thema aus der Zahlentheorie: Zerfällung von Primzahlen in komplexe Faktoren, die aus n-ten Einheitswurzeln zusammengesetzt sind. Die Beiträge von Paul Gordan und von A. Weiler waren beide der Analysis gewidmet: Ersterer beschäftigte sich mit der „Integration des Eulerschen Integrals vermittelst der Cauchyschen Methode der Integration durchs Imaginäre", wobei dieses Integral heute als Betafunktion geläufig ist:

$$B(x,y) = \int t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Die Cauchysche Methode ist die Berechnung reeller Integrale vermöge analytischer Fortsetzung ins Komplexe nebst Anwendung des Residuensatzes.

A. Clebsch, der die Mathematik 1863-68 in Gießen vertrat und der bei der Versammlung als Sektionsführer der Sektion für „Mathematik und Astronomie" fungierte, sprach über eine spezielle Klasse von algebraischen Kurven. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass „ihre Punkte einzeln den einzelnen Punkten einer Gerade entsprechen" (AB, 58). Die Parameterdarstellung dieser Kurven lautet somit

$$\rho(x_1) = f_1(\lambda) \quad \rho(x_2) = f_2(\lambda) \quad \rho(x_3) = f_3(\lambda)$$

wobei f_1, f_2 und f_3 rationale Funktionen des Parameters λ sind. Die Bestimmung des Schnittpunktsystems derartiger Kurven mit einer weiteren algebraischen Kurve lässt sich leicht mit Hilfe der den Doppelpunkten entsprechenden Parameter lösen.

Schließlich finden wir noch die Vorführung von Modellen von vier regelmäßigen Polyedern durch Chr. Wiener sowie ein Referat von M. Cantor über ein in Heidelberg befindliches Manuskript aus dem 12. Jahrhundert, das inhaltlich zwischen den Abazisten und den Algebraikern (Algorithmiker - gemeint ist damit das schriftliche Rechnen mit indisch-arabischen Ziffern) steht.

Dagegen blieben die Themen aus dem Bereich der reinen Mathematik in **Hannover 1865** in der Minderzahl. Wir finden hier nur zwei kurze Mitteilungen des Göttinger Mathematikers M. A. Stern „über einen Satz der Determinantentheorie" und von A. Enneper zu einigen allgemeinen Sätzen aus der Kurventheorie. Letztere beschäftigte sich mit der Bewegung eines Punktes in einer Strecke, deren Endpunkte zwei vorgegebene Kurven durchlaufen. Als Spezialfall hiervon (dann, wenn die beiden Kurven zusammen eine geschlossene Kurve bilden) ergibt sich der folgende Satz:

> „Durchlaufen die Endpunkte einer Geraden von constanter Länge eine geschlossene Curve C_1, so beschreibt ein fester Punkt derselben eine Curve C. Der Inhalt von C ist gleich dem Inhalt von C_1 vermindert um den Inhalt einer Ellipse deren beiden Hauptaxen die beiden Segmente sind, in welche der feste Punkt die Gerade von constanter Länge teilt" (AB. 106).

2.3 Die Phase der Expansion (1867-1890)

Mit der Versammlung **Frankfurt 1867** treten wir in die dritte Phase der Entwicklung der reinen Mathematik in der Sektion ein. Mit wenigen Ausnahmen (Rostock 1871, Hamburg 1876, Danzig 1888 und Köln 1889, wo keine Sektion zur Mathematik zustande kam) dominierte die reine Mathematik von nun an ganz klar das Geschehen in der Sektion. Der Anteil der entsprechenden Vorträge überschreitet regelmäßig die Fünfzig-Prozent-Hürde; oft gelangt er in die Nähe von hundert Prozent. Auch die absolute Anzahl an Vorträgen rein mathematischer Art wächst beachtlich; der Durchschnitt liegt fast doppelt so hoch wie in der vorangegangenen Phase. All das deutet in Richtung auf eine zunehmende Autonomie und Relevanz der reinen Mathematik, was auch in der Tatsache zum Ausdruck kommt, dass anwendungsbezogene Themen immer seltener wurden (vergleiche hierzu 4.9).

Sehr reichhaltig ist das mathematische Material, das die Versammlung 1867 in Frankfurt am Main bietet. Bemerkenswert ist hier die Dominanz algebraischer und geometrischer Themen; aus dem Bereich der Analysis finden wir nur einen Vortrag: Heinrich Weber sprach über seine Arbeit „Transformation der Lagrange'schen Form der hydrodynamischen Gleichungen in eine Form, in der nur die ersten Differentiale vorkommen". H. Weber, der 'Vater der modernen Algebra', hat sich viel mit der mathematischen Physik befasst, was man u.a. den Einflüssen zu schreiben kann, die er während seines einjährigen Aufenthaltes in Königsberg erfahren hatte. Darüber hinaus war er einer der Mathematiker, die die Entwicklung der Sektion durch zahlreiche Beiträge wesentlich mitbestimmt hat (vergleiche 3).

Im Bereich der Geometrie finden wir mehrere Vorträge, von denen nur der Titel im Tageblatt angegeben wird. Dies sind: Georg Zehfuss „Über die riemann'schen Flächen", O. Schlömilch „Über die Aufgabe, von einem Punkte die Normale auf eine Fläche zweiten Grades zu fällen", A. Clebsch „Bemerkungen zu den Gleichungen sechsten Grades" (Anmerkungen zum Vortrag von Schlömilch) sowie Alexander Wilhelm Brill „Über Raumcurven vierter Ordnung". Etwas ausführlicher dokumentiert ist der Beitrag von Schütz über die geometrische Veranschaulichung funktionaler Kongruenzen, in dem, ausgehend vom Modul $x^3 - 1$, eine Methode zur algebraischen Darstellung von Punkten im Raum gegeben wird, die schließlich zu einem räumlichen Koordinatensystem erweitert wird. Ein zweiter Beitrag von H. Weber beschäftigt sich mit der „Abbildung der Teile einer krummen Oberfläche auf eine Ebene", also mit der Grundaufgabe der Kartographie. Die vom Referenten untersuchten Abbildungen sollten so geartet sein, dass „nicht nur die kleinsten Teile der Ebene den entsprechenden Oberflächen-Elementen ähnlich sind", sondern auch das Bild im Großen und Ganzen keine allzu starken Abweichungen von der Gestalt der abgebildeten Figur zeigt. Genauer gesagt ging es H. Weber - wie man der entsprechenden Abhandlung im Crelle-Journal entnehmen kann - darum, ein Maß für die durch die Abbildung hervorgerufene Verzerrung zu definieren. Schließlich sprach Paul Gordan über „neue Methoden der analytischen Geometrie nach Plücker". Dabei entwickelte er die Linienkoordinaten, die J. Plücker 1830 eingeführt und 1864 der Sektion vorgestellt hatte, und löste die folgenden beiden Aufgaben: Die Komplexe zu finden, in denen eine gegebene Fläche zweiter Ordnung liegt; und, die Fläche zweiter Ordnung zu finden, die in drei gegebenen Komplexen liegt. Die Gordanschen Überlegungen liefen somit in die Richtung der oben bereits im Zusammenhang mit A. Clebsch genannten analytischen Untersuchungen von geometrischen Gebilden in Linienkoordinaten.

Eine zweite Wortmeldung Gordans beschäftigte sich mit den 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung. Die Untersuchung der in einer Fläche dritter Ordnung gelegenen Geraden war ein wichtiges Thema der geometrischen Forschung im 19. Jahrhundert. Arthur Cayley (1821-1895) hatte 1849 nachgewiesen, dass eine derartige Fläche stets 27 Geraden enthält, die allerdings nicht alle reell zu sein brauchen. Das erste Beispiel einer Fläche dritter Ordnung, das tatsächlich 27 reelle Geraden enthält, wurde von A. Clebsch erst 1871 publiziert. Im Laufe dieser sehr konkreten geometrischen Untersuchungen bewies man Sätze wie: Jede der 27 Geraden wird von 10 anderen Geraden geschnitten. P. Gordan führte aus, dass man die 27 Geraden als Schnitt der vorgegebenen Fläche mit einer Fläche neunter Ordnung erhalten kann. Chr. Wiener stellte der Sektion im nachfolgenden Jahr ein Modell einer Fläche dritter Ordnung mit 27 Geraden vor.

Der Beitrag von Johann Benedikt Listing „über die Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern" leitet die erstaunlich reichhaltige Serie von Sektionsvorträgen über topologische Fragen ein (J. B. Listing selbst hat ja in seinen „Vorstudien zur Topologie" (1847) die Bezeichnung Topologie geprägt, die allerdings erst in der zweiten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts die Leibnizsche 'Analysis (oder Geometria) situs' verdrängte). In seinem Frankfurter Vortrag entwickelte der Göttinger Mathematiker und Physiker die von ihm in seinem „Census der räumlichen Ausdehnung" (1862) mitgeteilte Verallgemeinerung der Eulerschen Polyederformel $E + F = K + 2$ (E ist die Anzahl der Ecken eines konvexen Polyeders, F diejenige der Flächen und K die der Kanten) auf Körper (bei J. B. Listing: Komplexe), die nicht konvex sein müssen[10]. Der Eulersche Polyedersatz kam noch einmal 1878 in Kassel zur Sprache.

Im Bereich der Algebra finden wir einen Beitrag des früheren Heidelberger Privatdozenten und späteren Professor in Reval, Georg Zehfuss, der sich anscheinend

[10] Zur Geschichte des Eulerschen Polyedersatzes vergleiche man Federico 1982 und Lakatos 1977. Eine Einführung in die für uns eher fremdartigen Ideen Listings gibt Pont 1974, 44-58. Eine interessante ältere Darstellung ist Brückner 1900.

mit der Erweiterung des üblichen Determinantenbegriffes auf drei Dimensionen beschäftige. Der bereits genannte Schütz sprach über einen „elementaren Beweis für den von Gauß aufgestellten Satz, dass sich keine mehrfach complexen Größen bilden lassen". C. F. Gauß hatte einst die Frage aufgeworfen, „warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als drei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen liefern können" (Gauß Werke II/178 - hier zitiert nach Remmert 1985, 95). Den entsprechenden Satz, dass nämlich $\mathbb{C}$ bis auf Isomorphie der einzige algebraisch abgeschlossene Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$ ist, wurde von K. Weierstraß in seinen Vorlesungen ab 1863 vorgetragen; bewiesen wurde er erstmals von Hermann Hankel (1839-1873) in seiner „Theorie der complexen Zahlensysteme" (1867). Die genannte Fragestellung gehört im weiteren Sinne in ein, im 19. Jahrhundert recht intensiv bearbeitetes Forschungsgebiet, das man 'hyperkomplexe Zahlensysteme' überschreiben könnte und bei dem es um höherdimensionale Erweiterungen von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ ging. Erfolge in dieser Richtung waren unter anderem die Einführung der Quaternionen durch William Rowan Hamilton (1805-1865) und der Oktaven (heute auch Cayley-Zahlen genannt) durch A. Cayley. Eine andere hier anknüpfende Entwicklungslinie führte schließlich zur Vektorrechnung (Hermann Günther Grassmann (1809-1877) entwickelte in seiner „linealen Ausdehnungslehre" (1844, 1861) hierzu wichtige Ansätze).

Ein letzter Vortrag, der in den Bereich der Invariantentheorie einzuordnen ist, stammt von A. Clebsch und behandelte „Die typische Darstellung der binären Formen vom Grade $(2n-1)$". In ihm wird gezeigt, dass sich die Koeffizienten der sogenannten typischen Form (wir würden heute eher von einer Normalform sprechen) durch $2n$ Invarianten darstellen lassen.

1868 fand die Versammlung in **Dresden**, also wieder im Umkreis einer Technischen Hochschule, statt. Chr. Wiener griff erneut das Thema 'Fläche dritter Ordnung mit 27 Geraden' auf, indem er ein Modell eines derartigen Gebildes präsentierte. Weiter gab er Eigenschaften (hauptsächlich bezüglich des gegenseitigen Sichschneidens) dieser Geraden an sowie Konstruktionsvorschriften für dieselben. Ebenfalls der Geometrie gewidmet waren die Ausführungen von H. Schröter „über eine eigentümliche Erweiterung des Begriffes der Involution", deren Grundidee von Jacob Steiner (1796-1863) stammt. Weiter gab der Vortragende eine Bedingung dafür an, dass zwei projektivische Punktreihen einen geschlossenen Zyklus von n Punktepaaren bilden.

In der Algebra gab es einen Beitrag von Ludwig Matthiesen zu Auflösung biquadratischer Gleichungen, über den nichts weiter mitgeteilt wurde. Die Auflösung von Gleichungen scheint Matthiesen intensiv beschäftigt zu haben; 1878 schrieb er seine „Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen", in der er mit geradezu enzyklopädischer Gründlichkeit auf rund 1000 Seiten alle bekannten Verfahren für die Gleichungen bis höchstens vierten Grades darstellte. Der biquadratische Gleichung sind dabei allein 66 Seiten gewidmet.

Daneben sprach L. Matthiesen auch noch „über eine eigentümliche Beziehung der Binomialcoefficienten zur Gammafunction und den figurirten Zahlen". Hier wurde unter anderem die Beziehung

$$\binom{n}{0}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)} - \binom{n}{1}\frac{\Gamma(n+\frac{w}{v})}{\Gamma(1+\frac{w}{v})} + \ldots = 0$$

hergeleitet (wobei der Redner allerdings eingestehen musste, dass ihm ein wesentlicher Schritt im Beweis der obigen Formel noch fehle). Der Prager Privatdozent Anton Karl Grünewald griff in seinem Beitrag „über mathematisches Operiren überhaupt und über begrenzte Derivationen insbesondere" Ideen von Joseph Liouville (1809-1882) auf bezüglich einer Erweiterung des Ableitungsbegriffes auf positive Brüche (vergleiche hierzu Lützen 1982), wobei er versuchte, diesen Ansatz durch eine abstrakte Theorie des mathematischen Operierens im Allgemeinen zu untermauern[11].Diese beruhte im Wesentlichen auf der n-fachen Iteration einer Operation und deren 'Umkehrung'. A. Grünewald hast später (1881) seinen Ansatz zur sogenannten Logialrechnung ausgebaut.

Eine Anmerkung zum mathematischen Schulunterricht machte August Nagel, in der er auf die „Unzuträglichkeit zwischen den Gewohnheiten bei dem elementaren mathematischen Schulunterricht und dem späteren Unterrichte" aufmerksam machte (so würde man in den Elementarschulen den Divisor vor den Dividend stellen, während später die Reihenfolge umgekehrt werde) und eine leider nicht näher bezeichnete Aufgabensammlung kritisierte.

Unter den Teilnehmern an der mathematischen Sektion in **Innsbruck 1869** treffen wir auf einige (später) prominente Namen. Die Präsenzliste der Sektion nennt: Dedekind, Durège, Gugler, Hankel, Klein, Lösche, Matthiesen, Neumayer, Recht, Reye, Rosenhain, Socher, Stegemann, Tiefenthaler und Unterhuber. Hinzu kam Otto Stolz, der damals noch in Wien als Assistent an der Sternwarte tätig war (er kam erst 1871 als außerordentlicher Professor nach Innsbruck) und der in Innsbruck als Schriftführer firmierte. Allerdings ergriff keiner der später prominenten das Wort, mit Ausnahme von O. Stolz, der eine neue Begründung der Grundformeln der sphärischen Geometrie (womit vermutlich die Delambreschen Formeln gemeint waren) mittels eines nicht weiter erläuterten „Princips der Zeichen" vorführte. Weitere Vorträge betrafen ein „elementares Verfahren zur Berechnung der Logarithmen" (von Georg Recht) und „cubische Determinanten" von G. Zehfuss. In beiden Fällen erfahren wir nicht mehr als die Titel.

Auch auf der Tagung **Rostock 1871** wurden vergleichsweise wenige Beträge zur reinen Mathematik vorgetragen. Hier richtete man eine gemeinsame Sektion für Mathematik und Physik ein, deren prominentestes Mitglied Ernst Mach gewesen sein dürfte (der sich häufig an den Versammlungen beteiligte und nicht nur in der physikalischen Sektion sondern auch in derjenigen für den naturwissenschaftlichen Unterricht aktiv war). Der Dorpater Mathematiker Ernst Ferdinand August Minding beteiligte

[11] Ähnliche Ideen verfolgte auch E. Schröder: vergleiche dessen Beitrag 1879. Dieser meldete sich nach dem Vortrag von K. Grünewald zu Wort, um darauf hinzuweisen, dass der Engländer Carmichael sich ebenfalls bemühe, „allgemeine Gesetze für solche Operationen zu entwickeln" (TB, 131).

sich in Rostock gleich mit zwei Referaten: einem zur Optik und einem über die Integration partieller Differentialgleichungen. Im letzteren erläuterte er eine berühmte, preisgekrönte, 1862 publizierte Methode zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen der Form $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ (wobei P und Q Polynome gleichen Grades sein sollen) mit Hilfe eines integrierenden Faktors. Paul Bachmann sprach über quadratische Formen, welche als ganze homogene Funktionen zweiten Grades von beliebig vielen Veränderlichen definiert werden (anstatt Funktion würden wir heute Polynom sagen). Gegenstand des Vortrages ist die Frage, welche (linearen) Transformationen derartige quadratische Formen in sich überführen - ein Problem, das man sowohl zur (modern gesprochen) linearen Algebra als auch zur Invariantentheorie rechnen kann (vergleiche Dieudonné 1985, 97-110). Gelöst sei diese Frage für binäre und für ternäre quadratische Formen (also solche mit zwei beziehungsweise drei Veränderlichen) durch Ch. Hermite (1822-1901). P. Bachmann wandte die Hermiteschen Überlegungen auf quadratische Formen von vier Veränderlichen an und gelangte zu der Einsicht, dass die Koeffizienten der Transformationsmatrix (von ihm als „Substitutions-Coefficienten" bezeichnet) symmetrisch sein müssen.

Die Versammlung **Leipzig 1872** bietet mehrere, allerdings nur knapp dokumentierte Vorträge im Bereich der reinen Mathematik. O.Schlömilch aus dem nahen Dresden beschäftigte sich gleich mit drei Themen: „Ueber bedingt und unbedingt convergirende Reihen", „Ueber Integration längs geschlossener Contouren mit besonderer Bezugnahme auf hierbei vorkommende kritische Punkte" sowie „Ueber einen die Verwandtschaft bei Kegelschnitten betreffenden Satz". Beim zweiten Thema dürfte es um den von A. L. Chauchy entdeckten Residuensatz (vergleiche Bottazini 1986, 162-166) gegangen sein; zum ersten ist vielleicht zu bemerken, dass man eine Reihe unbedingt konvergent nannte (und noch nennt), wenn sie bei jeder Umordnung konvergiert. Äquivalent hierzu ist, wie man zeigen kann, die Eigenschaft, dass die Reihe absolut konvergiert; möglicherweise ging es O. Schlömilch um diesen wichtigen Satz, der für bedingt konvergente Reihen nicht zutrifft. Mit Reinhold Hoppe meldete sich in Leipzig ein Mathematiker zu Wort, der noch viele Beiträge zur Sektion leisten sollte (vergleiche 3). Diesmal äußerte er sich zu „practischen Fragen", wobei er neue Symbole für die Bezeichnung von häufig verwandten Konstanten vorschlug und gegen einen altehrwürdigen Brauch der Mathematiker opponierte: „Entschlossen spricht sich der Redner gegen die bis jetzt allgemeine Sitte, welche Größen (wie π oder e) durch Buchstaben aus dem Alphabet auszudrückt, aus ..." (TB, 57). Leo August Pochhammer, an den heute noch die Kummer-Pochhammerschen-Funktionen und die Pochhammersche Differentialgleichung erinnern, sprach über die Bestimmung der Werte der Fourierschen Zylinderfunktion $J(x)$. Diese wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^{2J}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ}{dx} + J = 0$$

definiert.

Die Geometrie war in Leipzig durch zwei Referate vertreten: Edmund Herr sprach über „die möglichen Arten Archimedischer Körper" wobei er einige Spezialfälle diskutierte und Modelle vorführte, und Heinrich Durège äußerte sich zu „Formen der

Curven dritter Ordnung". Lässt man das Verhalten solcher Kurven im Unendlichen außer Acht, was August Ferdinand Möbius (1790-1868) vorgeschlagen haben soll, so ergeben sich zwei verschiedene Arten von Kurven: solche mit zwei unzusammenhängenden Teilen U und S, die sich auch nicht im Unendlichen treffen, und solche, die „nur aus einem einzigen, im Unendlichen zusammenhängenden Teile bestehen" (TB, 12). Die Äste U und S wurden vom Vortragenden näher charakterisiert; den Übergang zwischen den Kurven erster und zweiter Art markieren Kurven mit einem isolierten Punkt.

Auf der Versammlung **Wiesbaden 1873** finden wir einen Beitrag zur Analysis (Wilhelm Thome „Ueber allgemeine Eigenschaften linearer Differentialgleichungen") und zwei zur Geometrie (Theodor Reye „Zwei geometrische Beziehungen zwischen zehn Punkten einer Fläche zweiter Ordnung" sowie R. Hoppe „Ueber ein identisches Problem aus der Curventheorie und der Dynamik"). Bei W. Thome ging es um Systeme von zwei homogenen linearen Differentialgleichungen, deren Koeffizienten stetige Funktionen sind, wobei die eine Gleichung die Differentialgleichung des integrierenden Faktors der anderen ist. Er zeigte dann, dass aus den Integralen der einen Differentialgleichung diejenigen der anderen direkt ableitbar sind. Später wird im Tageblatt noch vermerkt: „Herr Prof. Thome aus Berlin spricht: Ueber allgemeine Eigenschaften eines Systems linearer Differentialgleichungen" (TB, 51). Mehr wird hierzu nicht mitgeteilt, weshalb der Inhalt dieses Vortrags im Dunklen bleibt. Möglicherweise ist hier zweimal derselbe Beitrag gemeint. Die Angaben zu den Ausführungen des Straßburger Geometers Theodor Reye bleiben ebenfalls spärlich. Der einzige Kommentar zu dem oben genannten Titel lautet: „Dieselben entsprechen dem planimetrischen Satz: Zwei einem Kegelschnitt einbeschriebenen Dreiecke können allemal aufgefaßt werden als Poldreiecke eines zweiten Kegelschnittes" (TB, 51). Ausführlicher hingegen sind die Informationen zu Hoppes Referat. In diesem wurde ein System von Differentialgleichungen aufgestellt, das eine vorgegebene Kurve im Sinne der Differentialgeometrie beschreibt (im Wesentlichen handelt es sich dabei um die heute so genannten Frenetschen Formeln) und das angeblich schon bei Pierre Simon de Laplace (1749-1827) auftrat, als dieser die Bewegung eines starren Körpers relativ zu einem Punkt untersuchte.

In **Breslau 1874** treffen wir auf einen aktuellen Beitrag von Heinrich Vogt „Ueber die Bedeutung der Nicht-Euklidischen Geometrie für unsere Ansichten über die Natur des Raumes", in dem sich die damaligen Diskussionen deutlich widerspiegeln (vergleiche zu diesem Hintergrund 4.1 und 4.2). Der Vortragende bezog in der Auseinandersetzung um die philosophische Bedeutung der nichteuklidischen Geometrien - für die Otto Liebmann 1876 die Bezeichnung „metageometrische Untersuchungen" eingeführt hatte - folgende Position: „Eine nähere Prüfung zeigt, daß die Geometrie und insbesondere die Nicht-Euklidische Geometrie nicht im Stande ist, eine Entscheidung über philosophische Raumtheorien zu liefern. Ihre Methode und ihre Resultate sind mit dem Empirismus und dem Idealismus in gleicher Weise vereinbar" (TB, 178). Die meisten Autoren (allen voran Hermann (von) Helmholtz (1821-1894), dürfen wir ergänzen) haben dagegen im „Bestehen" der nichteuklidischen Geometrien „ein Beweismoment für die empiristische, Anti-Kantische Auffassung von der Natur des Raumes gefunden" (TB, 178). Als Ausnahme hiervon nannte Vogt Hermann Günther Grassmann (1809-1877), der in seiner „linealen Ausdehnungslehre" (1844, ^{2}1861) „ähnliche Untersuchungen als Argumente für die aprioristische Theorie benutzt" (TB, 178) habe. Im Protokoll wird die sich hieran anschließende Diskussion vermerkt, an der sich R. Hoppe (der ein Jahr später in Graz einen Vortrag zum Raumbegriff hielt, in dem er H. Vogt heftig widersprach), Jakob Rosanes und Siegmund Günther beteiligten[12].

Siegmund Günther, der sich in Breslau erstmals mit zwei Wortmeldungen beteiligte und der ebenfalls zum 'harten Kern' der Sektion Mathematik gerechnet werden kann, erläuterte in seinem ersten Beitrag die Geschichte der Determinanten. Darin wird Heinrich August Rothe (1773-1842), ein Schüler von Karl Friedrich Hindenburg (1741-1808), Professor der Mathematik zu Freiberg, Leipzig und Erlangen sowie Vertreter der kombinatorischen Schule, als derjenige genannt, der schon vor J. L. Lagrange die Cramersche Zeichenregel bewiesen habe. Weiter gab S. Günther einen elementaren Beweis für den Satz von A. Cayley, dass jede symmetrische Determinante mit leerer Diagonalen (eine „déterminant gauche symétrique") ein vollständiges Quadrat ist, wobei der Laplacesche Entwicklungssatz für Determinanten Verwendung fand. Schließlich wurde noch ein Zusammenhang zwischen unendlichen periodischen Kettenbrüchen und Determinanten entwickelt. Der n-te Näherungswert für den Kettenbruch

$$\frac{b}{a-\frac{b}{a-\frac{b}{a-\frac{b}{\cdots}}}}$$

wird gegeben durch die Formel („Kettenbruchdeterminante")

$$\frac{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\right)^{n-1}-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\right)^{n-1}}{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{2}-b}\right)^{n}-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\right)^{n}}$$

Zum Schluss diskutierte der Vortragende noch den singulären Fall $a = 2$ und $b = 1$. Der andere Beitrag Günthers in Breslau bestand in einem ausführlichen Kommentar zum Vortrag von H. Schröter über Sternpolyeder. Darin vertrat er die These, dass das Interesse an den Sternpolyedern (die ersten derartigen Gebilde hatte im mathematischen Kontext J. Kepler 1619 betrachtet) erst durch die von C. G. J. Jacobi und J. Hermes angegebene Formel zur Berechnung ihres Volumens geweckt worden sei, keinesfalls aber durch Louis Poinsot (1777-1859), der bereits 1809 die Sternpolyeder wiederentdeckt hatte. Darüber hinaus gab S. Günther Hinweise, die Beschäftigung mit sternförmigen Gebilden vor J. Kepler betreffend (also solche sind unter anderem zu nennen: Pentagramm und Sternachteck). Auffällig ist, wie hart S. Günther mit den französischen Kollegen ins Gericht gin: „Gleichwohl ward dies von Poinsot ignoriert, und als er von anderer Seite auf Kepler's Priorität aufmerksam gemacht wurde, hatte

[12]Zur Rezeptionsgeschichte der nichteuklidischen Geometrie vergleiche man Volkert 2013).

Bertrand sogar die Kühnheit, Kepler's Erfindung einfach zu negiren, ..." (TB, 177). Ähnliche Töne findet man auch bei R. Hoppe, der „über die spezifische Gleichung der Curven" sprach:

> „Die allgemeine analytische Curventheorie, deren Ausbildung lange Zeit nur mit äusserst geringer Betheiligung fortgearbeitet worden war, ist seit einigen Jahren bei mehreren französischen Mathematikern sichtlich wieder in Aufnahme gekommen. Doch ist es auch jetzt nur ein schwacher Anfang, welcher noch keine klare Auffassung des Zieles erkennen lässt, und es ist sehr zu wünschen, dass es nicht bei dem gegenwärtig eingenommenen Standpunkt sein Bewenden haben wird. Eine Basis, welche Paul Serret, augenscheinlich auf's Gerathewohl oder wenigstens ohne genügende Erfahrung aufgestellt hat, gilt bei seinen Nachfolgern als definitive Anordnung, mit der sie sich in allerhand speciellen, wiewohl den bekannten Kreis überschreitenden Problemen versuchen. Ich nehme darum die Gelegenheit wahr, auf das hinzuweisen, was Paul Serret entgangen ist, und die, ihm noch ganz fremden, allgemeinen Gesichtspunkte für die Basirung der Curventheorie zu eröffnen, deren Berechtigung wohl niemand bestreiten wird" (TB, 175/76)[13].

Wie schon im vorangegangenen Jahr ging es R. Hoppe auch diesmal um die Formulierung der Grundgleichungen der Kurventheorie, welche wir heute als Frenetsche Formeln bezeichnen und die „die unabhängigen Elemente der Curve" (TB, 176) darstellen. Jakob Rosanes sprach zu einem Problem der linearen Algebra, das bereits 1871 von Paul Bachmann behandelt worden war, nämlich über die Transformation der allgemeinen quadratischen Form in sich, wobei auch er auf die Untersuchungen von A. Cayley und Ch. Hermite aufmerksam machte, um dann zu eigenen Ansätzen zu kommen. Es wird darauf hingewiesen, dass genau die symmetrischen linearen Substitutionen (wie J. Rosanes formuliert; modern gesagt: Matrizen) die gewünschten Eigenschaften haben. Diese sind also die „Hermite'schen Substitutionen".

Die Geometrie war in Breslau das dominante Thema der Sektion Hier finden wir einen Vortrag von H. Schröter, der ja in Breslau wirkte, über „cyclisch zusammengelegte collineare Gebilde in der Ebene und im Raume", in dem es um sogenannte Doppelgebilde ging („Bei ebenen Gebilden hängen je zwei Tripel so miteinander zusammen, wie zwei gleichzeitig auf dreifache Art perspectivisch liegende Dreiecke, während bei räumlichen Gebilden zwei Quadrupel von Punkten Tetraeder bilden, die auf vierfache Art gleichzeitig in hyperboloidischer Lage sich befinden" (TB, 171)), die bereits angesprochene Präsentation von Modellen der vier Sternpolyeder sowie der Steinerschen Fläche[14] und einen Beitrag von Ludwig Burmester über die „Bewegung eines starren ebenen Systems", dessen Hauptsatz folgendermaßen lautete:

[13] Interessante Einblicke, wie Mathematiker die Situation nach dem Deutsch-Französischen Krieg 1870/71 empfanden, gibt der Briefwechsel von Paul Du Bois-Reymond und Charles Hermite (Hermite 1916).

[14] Diese von Jacob Steiner (1796-1863) während seines Romaufenthaltes 1844 entdeckte Fläche - die auch römische Fläche genannt wird - ist eine vierter Ordnung mit der charakteristischen Eigenschaft, dass sie von jeder Tangentialebene in einem Kegelschnitt getroffen wird. Bekannt

> „Bewegen sich vier Punkte eines collinear-veränderlichen ebenen Systems derart auf vier Gerade, dass sie auf diesen collineare Punktreihen erzeugen, welche von einer bestimmten Geraden in vier verschiedenen Punkten geschnitten werden, so bleiben drei Systempunkte und drei Systemgeraden fest; alle übrigen Punkte beschreiben collineare Punktreihen" (TB, 175).

L. Burmester war es auch, der in einer Anmerkung zu einem von J. Rosanes vorgetragenen Beweis aus der Theorie der Flächen zweiter Ordnung aufforderte, „dafür Sorge tragen zu wollen dass auf der Universität auch darstellende Geometrie gelehrt werde" (TB, 177). Während diese Form der Geometrie seit Gaspard Monge (1746-1818) in Frankreich fest zum Kanon der mathematischen Grundausbildung gehörte, wurde sie in Deutschland eher der angewandten Mathematik zugeordnet und blieb weitesgehend den Polytechnika vorbehalten. L. Burmester vertrat dieses Fach in Dresden, später (ab 1887) dann in München am Polytechnikum. O. Schlömilch charakterisierte 1852 die Situation der darstellenden Geometrie folgendermaßen:

> „Die descriptive Geometrie ist eine Schöpfung von Monge, ...; die praktischen Franzosen haben diesen neuen Theil der Mathematik und seine zahlreichen Anwendungen vielfach ausgebildet .... In Deutschland ist die descriptive Geometrie erst durch das Aufblühen der polytechnischen Schulen eingeführt worden (die Universitäten nehmen noch gegenwärtig keine Notiz davon); ..." (Schlömilch 1852, 258).

An diesem Zustand hatte sich anscheinend in gut zwanzig Jahren, die seit O. Schlömilchs Bemerkung vergangen waren, nichts Wesentliches geändert (vergleiche auch Lorey 1916, 246-250).

Auch die Versammlung **Graz 1875** brachte eine Vielzahl mathematischer Sektionsbeiträge; darüber hinaus finden wir aber auch einen Vortrag in der zweiten öffentlichen Sitzung von S. Günther über „Die Ziele und Resultate der neueren mathematikhistorischen Forschung". Dieser beginnt mit einer Rechtfertigung mathematikhistorischer Forschung, wobei vor allem zwei Argumente angeführt werden:

1. Diese ist von unmittelbarem pädagogischen Nutzen (ähnlich später auch Treutlein (1889)), was wiederum durch das phylogenetische Grundgesetz (heute: biogenetisches Grundgesetz) plausibel gemacht wird;

2. die Mathematik ist in ihrer Entwicklung als neben der Astronomie älteste Wissenschaft besonders charakteristisch für die allgemeine Geistesgeschichte. Das gilt vor allem für Antike und Renaissance.

S. Günther führte zwei Beispiele erfolgreicher Forschung im Bereich der Mathematikgeschichte an:

---

gemacht hat erst K. Weierstraß die Steinersche Fläche, als er deren Gleichung 1863 aufstellte. Vergleiche auch Sturm 1871.

- Die Klärung des indischen Ursprungs unserer Ziffern und des Dezimalsystems hauptsächlich durch Franz Woepke (1826-1864) in Woepke 1863, wobei allerdings die Wege, die die Übermittlung genommen hat, noch weitgehend ungeklärt seien (vergleiche Ifrah 1989 und Jospeh 1990).

- Die neuen Aufschlüsse, die die Entdeckung und Auswertung des Papyrus Rhind über die ägyptische Mathematik lieferten (Eisenlohr 1877).

In Graz sprach R. Hoppe, wie bereits oben erwähnt, „Ueber den Raumbegriff". Ausgehend von seiner Grundthese „Die Naturwissenschaft muss die Fragen der Philosophie in die Hand nehmen" (TB, 142) behauptete der Vortragende, dass die Geometrie die philosophische Frage nach dem Wesen des Raumes zu beantworten vermöge. Hierzu unterscheidet er einerseits den Raum als „Eigenheit der thatsächlich erlebten Empfindungen" (TB, 143), andererseits den Raum als „ein vom Verstand gebildetes System" (TB, 143). Der erstere ist subjektiv und vor aller Erfahrung, der letztere objektiv und rational empirisch begründbar. Mit ihm beschäftigt sich die Geometrie. Damit ist allerdings die Grundfrage nach dem Wesen des Raumes noch nicht erledigt für R. Hoppe. Diese muss vielmehr jetzt heißen: „Durch welche Erfahrungen gelangen wir successive von den sinnlich gegebenen Differenzen aus zu der allumfassenden gleichmässigen dreifach ausgedehnten Raumvorstellung, inwieweit ist diese absolut oder relativ?" (TB, 143). Die Durchführung dieses deutlich von H. (von) Helmholtz beeinflussten Programms, das später auch Henri Poincaré (1854-1912) beschäftigen sollte (vgl. z.B. Poincaré 1913), wird leider nicht mitgeteilt im Tageblatt. Dort heißt es nur: „Es folgt die Ausführung, in welcher der Vortragende sich mit den gewöhnlichen Ansichten in Ueberstimmung glaubt" (TB, 143)[15].

Drei Vorträge in Graz beschäftigen sich mit Themen aus der Analysis. Simon Spitzer aus Wien äußerte sich „Zur Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung". Diese hatte die Form $xy^{(n)} + (m + n - 1)y^{(n-1)} = x^m y$, wobei m und n Konstanten sind[16]. Zu dem Beitrag „Ueber eine Integrationsmethode" von A. Enneper heißt es lapidar im Tageblatt: „Wir bedauern, diesen interessanten Vortrag nicht bringen zu können, weil der geehrte Vortragende sich nicht veranlasst fühlte, denselben niederzuschreiben" (TB, 207). Wawrzyniec Zmurko aus Lemberg sprach „Ueber die Unzulässigkeit der bis jetzt bekannt gewordenen Kriterien des Größten und Kleinsten bestimmter Integrale und ihre Vervollständigung". Nachdem er das

[15] R. Hoppe scheint ein Anhänger des Empirismus gewesen zu sein (was ja durchaus in den Rahmen der Versammlung passt); man vergleiche sein Werk „Die Zulässigkeit des Empirismus in der Philosophie" (Berlin, 1852) sowie seinen öffentlichen Vortrag von 1872.

[16] Den allgemeineren Fall der Differentialgleichung $Axy^{(n)} + By^{(n-1)} = x^m y$ hat S. Spitzer später in seiner Abhandlung „Neue Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen" (Wien, 1874 mit drei Fortsetzungen Wien, 1881 (1. und 2.) sowie 1883) untersucht. Dieser Wiener Mathematiker hat eine erstaunliche Menge von Publikationen zum Thema Integration von Differentialgleichungen zustande gebracht, unter anderem in O. Schlömilchs „Zeitschrift für Mathematik und Physik", deren Analysisteil er manchmal mit dem Herausgeber fast alleine bestritt (vergleiche etwa den Band 3 dieser Zeitschrift).

Grundproblem der Variationsrechnung formuliert hat, nämlich das Integral

$$S = \int_{x_4}^{x_1} \int_{x_2}^{x_2} \int_{x_3}^{x_3} V dx_r dx_{r-1} \dots dx_1$$

maximal oder minimal zu machen unter einer geeigneten Nebenbedingung, leitete W. Zmurko einen seiner Ansicht nach übersichtlichen Ausdruck für $\delta^2 S$ her, aus dem wiederum Kriterien für das Vorliegen eines Extremums folgen. Dabei tritt ein sogenannter „Osculationsfaktor" auf.

S. Günther beschäftigte sich mit einem etwas ausgefalleneren Thema, nämlich mit aufsteigenden Kettenbrüchen, die er im Falle ihrer Unendlichkeit auch Kettenreihen nannte. Es handelt sich hierbei um Gebilde der Form

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{b_1 + \frac{b_2 + \dots}{a_2}}{a_1}$$

Anschließend werden Sätze über endliche 'Teilbrüche' dieser Gebilde entwickelt, wobei S. Günther auf analoge, von Philipp Ludwig Seidel (1821-1876) gefundene Ergebnisse für gewöhnliche Kettenbrüche hinwies (Seidel 1855).

Ein geometrisches Problem, das sich in der Wärmelehre ergibt, wurde von Edmund Reitlinger behandelt. Es geht dabei um „Vierecke" zwischen zwei gleichseitigen Hyperbeln. Seine Ausführungen gipfelten in folgendem Satz:

> „Nimmt man auf einer der beiden gleichseitigen Hyperbeln ein Stück von bestimmter Länge und verbindet man dessen Endpunkte durch Curvenpaare mit der anderen gleichseitigen Hyperbel, so entstehen Curvenvierecke mit gleicher Grundlinie auf der 1. Hyperbel. Wenn jedes dieser Paare demselben Gesetz $xy^r =$ const. folgt, so dass seine zwei Curven sich nur durch den Werth der Constanten unterscheiden, so besitzen alle diese Vierecke den gleichen Flächenraum" (TB, 142).

Auch bei der Versammlung **Hamburg 1876** hielt R. Hoppe einen philosophisch orientierten Vortrag „Ueber den Grund der mathematischen Evidenz". Darin polemisiert er vor allem gegen den Apriorismus Kants:

> „Es ist auffallend, dass fast alle Schriftsteller, welche die Bolyaische Geometrie und deren Konsequenzen besprechen, die Frage über die Rolle der Erfahrung in der Geometrie so auffassen, als ob es sich um die Zuverlässigkeit der mathematischen Doctrin handele, die mit der Zulassung empirischer Elemente negirt wäre. Die Quelle dieser Bangigkeit um das Bestehen der exacten Geometrie kann man in Kant finden, der ganz unumwunden die gleiche Consequenz zieht" (TB, 60).

Weiter heißt es: „Auf Seiten der Geometrie ist der empirische Ursprung bewiesen, auf Seiten der Arithmetik nicht" (TB, 61). Hieraus folgt für R. Hoppe, dass man auch nach dem empirischen Ursprung der Arithemtik suchen müsse. Da allgemein, wie oben schon angedeutet, ein derartiges empirisches Element als mit der Strenge der Mathematik unvereinbar angesehen wird, wirft der Vortragende folgerichtig die Frage auf, worauf die mathematische „Evidenz oder Beweisfähigkeit" überhaupt beruhe. Seiner Meinung nach gründet auch diese Evidenz, die ausdrücklich als „subjektiv" bezeichnet wird, in der Erfahrung. An ihr werden drei Aspekte unterschieden: der konstituierende (auf dem die Bildung der mathematischen Grundbegriffe beruht), der theoretische (welcher die mathematischen Entdeckungen abdeckt) und der praktische (die Anwendungen abdeckende).

Drei Beiträge in Hamburg behandelten geometrische Themen: Jacob Lüroth aus Karlsruhe sprach „Ueber cycklische Involutionen", der Hamburger Oberlehrer Hermann Cäsar Hannibal Schubert, der heute als ein wichtiger Wegbereiter der algebraischen Geometrie betrachtet wird (vergleiche Dieudonné 1974), „Ueber das Ausarten geometrischer Gebilde" und H. Schröter „Ueber den Ausdruck einer complexen Grösse durch ein Doppelverhältnis und über Constructionen mit imaginären Elementen". Von dem Letzteren stammt auch der einzige inhaltliche Hinweis zum Vortrag von J. Lüroth, der sich im Tageblatt findet, dass nämlich „schon Steiner zwei projektivische Punktreihen in solcher Weise auf einander zu legen gelehrt hätte, dass sie eine 'cyklische Involution' bilden" (TB, 110 - dieses Thema kam schon bei Schröter 1874 zur Sprache). Der Beitrag von H. C. H. Schuber behandelte die Verteilung der Singularitäten bei Kurven dritter Ordnung, wobei der Vortragende Methoden der abzählenden Geometrie (vergleiche hierzu Schubert 1876) benutzte. Als typisches Ergebnis nennt er den folgenden Satz:

> „Wenn man an eine Plancurve dritter Ordnung ohne vielfachen Punkt von einem außerhalb gelegenen Punkt O die 6 Tangenten und die 9 Strahlen nach dem Wendepunkten zieht, so erhält man 15 von O ausgehende Strahlen, welche in ihrer Lage derartig von einander abhängig sind, dass je 6 dieser Strahlen die 9 übrigen bestimmen, und zwar werden aus den 6 Tangenten die 9 Wendepunktslinien durch eine Gleichung ersten Grades, aus 5 Tangenten und 1 Wendepunktslinie die 9 übrigen Strahlen durch eine Gleichung vom Grade 120 bestimmt. Ist ferner von jeder der 6 Tangenten ein Punkt gegeben, und dazu ein siebter Punkt, durch welchen eine Wendepunktslinie gehen soll, so bilden diejenigen Punkte O, von welchen aus solche 15 Strahlen ausgehen können, eine Curve von der Ordnung 540" (TB, 65).

Schubert schloss mit einem Hinweis auf die Überlegenheit der Geometrie in derartigen Fragen gegenüber der Algebra.

Der Vortrag von H. Schröter betraf eine auf Karl Christian von Staudt (1798-1867) zurückgehende neuartige metrikfreie Darstellung der komplexen Zahlen im Rahmen der projektiven Geometrie. Die komplexen Einheiten i und $-i$ werden hierbei als Fixpunkte von sogenannten elliptischen Involutionen definiert. Der von Staudtsche Ansatz ist im Übrigen unter der Bezeichnung 'Rechnen mit Würfen' (wir sprechen heute von Doppelverhältnisse) bekannt geworden. Die Quintessenz dieser Vorgehensweise liegt nach Meinung des Vortragenden im Folgenden:

> „Vermöge dieses Ausdrucks der allgemeinsten complexen Größe durch ein Doppelverhältnis und vermöge der Darstellung eines imaginären Punktes durch ein elliptisches Punktepaar mit dem Richtungssinn seines Trägers lassen sich geometrische Operationen von reellen auf imaginäre Elemente übertragen, wofür einige Beispiele angeführt werden. Auch wird ein Weg angegeben, um continuirliche geometrische Gebilde mit imaginären Elementen in projectivische Beziehung zu setzen. Der Zusammenhang dieser Untersuchungen mit den Arbeiten von v. Staudt und F. August werde vorangeschickt" (TB, 64).

Simon Spitzer leitete in seinem Vortrag die Beziehung

$$\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

her, wobei er Überlegungen von Denis Poisson (1781-1840) für die Auswertung des von ihm als Laplaceschen Integral bezeichneten Ausdrucks auf der linken Seite heranzog[17].

Mit zwölf mathematischen Sektionsvorträgen sowie einem mathematikhistorischen Beitrag erreicht die reine Mathematik auf der Versammlung **München 1877** einen neuen Höhepunkt. Deutlich zu erkennen ist hier der Einfluss von Felix Klein (er wirkte von 1875 bis 1880 am Polytechnikum in München): Neben zwei eigenen Referaten („Zur Gestalt der Kummer'schen Fläche" und „Ueber elliptische Funktionen") finden wir mit Ferdinand Lindemann einen seiner Schüler sowie mit Sophus Lie einen seiner Freunde vertreten. Bemerkenswert ist ferner, dass in München neben S. Lie, der sich ja lange Zeit in Deutschland aufgehalten hat, noch mit Luigi Cremona ein weiterer prominenter ausländischer Mathematiker zugegen war. Derartige Ereignisse waren - zumindest was die mathematische Sektion anbelangt - bei der Naturforschertagung recht selten. In der dritten allgemeinen Sitzung sprach S. Günther „Ueber die neusten Forschungen auf mathematisch-historischem Gebiet", nahm also sein Thema aus Graz (1875) wieder auf. Im Unterschied zu damals sind S. Günthers Ausführungen in München von einem deutlich gewachsenen disziplinären Selbstbewusstsein geprägt:

> „Glücklicherweise hat sich meine Aufgabe diesmal ungleich leichter fassen lassen, es erschien kaum mehr erforderlich, von der Tendenz jener Disziplin (der Mathematikgeschichte) abermals eingehender zu sprechen, es erschien überflüssig, principielle Bedenken gegen die Wesenheit, gegen die Berechtigung des geschichtlichen Arbeitens auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiete in ihrer Unzulänglichkeit beleuchten zu wollen - denn von competenter Seite werden solche Bedenken kaum mehr geltend gemacht werden" (TB, 83).

[17] Ähnliche Integrale treten im Zusammenhang mit den Legendreschen Kugelfunktionen erster und zweiter Art auf, zu denen P. S. Laplace Beiträge geliefert hat. Möglicherweise ist hierauf die Namensgebung seitens S. Spitzer zurückzuführen.

Diesmal ging es dem Vortragenden vor allem darum, die Kontinuität der Entwicklung des mathematischen Wissens, deren Sichtbarmachung für ihn zu den Grundaufgaben der Historiographie der Mathematik gehörte, deutlich zu machen. Hierzu zitierte er verschiedene Beispiele dafür, dass Wissen schon vor seiner eigentlichen Ausarbeitung antizipiert worden ist ('Konvergenzphänomene': L. Euler in Sachen quadratisches Reziprozitätsgesetz, J. L. Lagrange und der Hamitonsche Formalismus zur Grundlegung der klassischen Mechanik). Aber auch 1877 wird der geistesgeschichtliche Aspekt in der Mathematikgeschichte betont: „Gerade das kulturhistorische Moment soll von jetzt ab in den Vordergrund treten, die Bedeutung der geschichtlich-mathematischen Forschung als eines den Fortschritt der menschlichen Geisteswelt geradezu abspiegelnden Wissenszweiges aus den einzelnen Beispiel erhellen" (TB 85/6). Es folgen Ausführungen über den Forschungsstand zur chinesischen, babylonischen und ägyptischen Mathematik sowie zur Rolle der Araber und der jüdischen Wissenschaftler im Prozess der Wissensübermittlung von Altertum und Neuzeit.

S. Günther sprach auch eine deutliche Warnung vor zu starker Spezialisierung des Mathematikhistorikers aus:

> „Allein nicht minder fordern wir von dem Historiker, seiner Stellung inmitten einer lebenden und blühenden Wissenschaft eingedenk zu bleiben und über den Detailarbeiten, die ihn momentan beschäftigen, nicht zu vergessen, dass er Mathematiker ist und bleiben will. Wer in der Exegese und Textverbesserung irgend eines alten Geometers hängen bleibt und schließlich sein eigenes Kennen und Können ausschliesslich auf den griechischen Gesichtspunkt zurückzuschrauben sich angewöhnt hat, der ist gewiss ein äusserst nützliches Glied in der grossen Kette, allein eine besonders lebhafte Anteilnahme Anderer an seinen Studien wird er nicht zu fordern berechtigt sein" (TB, 84).

Gegen wen diese deutlichen Worte gerichtet waren, wird aus dem überlieferten Text nicht deutlich. Es fällt aber auf, dass S. Günther - sieht man einmal von rein philologischen Arbeiten ab - hauptsächlich solche Mathematikhistoriker anführt, die es auch als Mathematiker zu einer gewissen Reputation gebracht haben (M. Cantor, Fr. Woepke, H. Hankel, R. Baltzer).

Günther ergriff auch in der Sektion das Wort, wo er „die Näherungsmethoden der Alten" erläuterte. Hierbei ging es ihm vornehmlich um Approximationsverfahren für Quadrat- und Kubikwurzeln. Schon bei Archimedes (287?-212) finden sich entsprechende Ergebnisse, allerdings ohne jedwede Erläuterung. Ausführlicher wurde die Problematik der Approximation bei Theon von Alexandria (etwa 340-400), dem wichtigsten Euklid-Bearbeiter der Antike, behandelt, der die Ausschöpfung eines Quadrates irrationaler Seitenlänge durch ein- und umbeschriebene Quadrate rationaler Seitenlänge untersuchte, was modern gesprochen auf einen periodischen Kettenbruch führt. Angewendet auf die Archimedischen Beispiele liefert das Theonische Verfahren genau die Ergebnisse des Archimedes, was die Vermutung nahe legt, dass letzterer bereits die fraglichen Methoden gekannt und angewandt hat. Weiter berichtete S.

Günther über Rekonstruktionen von Hauber, die gezeigt hätten, dass Archimedes allein auf der Basis des zehnten Buches der „Elemente" zu diesen Näherungsverfahren hätte kommen können.

Allgemeinerer Natur war der Beitrag von Alexander Wilhelm von Brill, der das an der Technischen Universität München eingerichtete mathematische 'Laboratorium' vorstellte, in dem von Studenten Kurven, Flächen und dergleichen modelliert wurden. Wilhelm Friedrich Schüler sprach „Ueber das Imaginäre in der analytischen Geometrie und der Funktionentheorie". Wir finden in diesem Vortrag unter anderem folgende Passage: „Das Imaginäre in der Arithmetik und Algebra ist das Erzeugnis eines logisch ausgebildeten Formalismus, dessen consequente Durchführung die Beseitigung jeder Ausnahme bewirkt, wodurch zugleich den arithmetischen Regeln und den algebraischen Sätzen der Charakter der Allgemeinheit verliehen wird" (TB, 109). Weiter heißt es: „Der Begriff des Imaginären ist eine blosse Idee, die ihrem ganzen Inhalte nach durch Anschauung nicht wiedergegeben werden kann. Die Richtigkeit der Idee ist also auch durch Erfahrung nicht prüfbar" (TB, 109). Als Anlass für die Einführung des Imaginären wird - wie könnte es auch anders sein! - die Unmöglichkeit des Ausziehens der Quadratwurzel aus negativen Zahlen genannt. Das Imaginäre sei eine Negation des Reellen wie das Unendliche eine Verneinung des Endlichen ist, was man auch daran erkennen könne, dass beide in der projektiven Geometrie analoge Rollen spielten. Anschließend entwickelte W. Fr. Schüler eine Darstellung für komplexe Punkte im Raum (also vermutlich Elemente von $\mathbb{C}^3$), die auf eine Art dreidimensionalen Vektorraum hinausläuft. Schließlich wird „eine ganz neue Definition der abgeleiteten Function gewonnen, die von infinitesimalen Merkmalen durchaus frei und viel allgemeiner ist, als die bisherige und die Stetigkeit der Function nicht voraussetzt [sic!]" (TB, 111).

Im Bereich der Geometrie finden wir nur zwei Beiträge: L. Cremona, ein bedeutender Vertreter der algebraischen Geometrie zu seiner Zeit (vergleiche Dieudonné 1974), griff wieder das Problem der 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung auf (vergleiche hierzu Gopdan 1867 und Wiener 1868). Diese zerfallen in zwei Gruppen: Eine umfasst 12 Geraden, die ein Doppelsechseck bilden, die andere enthält 15 Geraden, die zu je dreien in 15 Ebenen liegen, aus denen wiederum 10 Triederpaare gebildet werden können: „Ich habe nun gefunden, dass die 20 Ecke dieser Trieder die Ecke eines bestimmten, merkwürdigen Hexaeders sind; eines Hexaeders, welches zu der unendlichen Mannigfaltigkeit von Polsechsflachen der cubischen Fläche gehört, die Herr Reye ... betrachtet hat" (TB, 94). F. Klein stellte die vier Arten Kummerscher Flächen[18] vor, wozu auch die bereits 1827 von Auguste Jean Fresnel (1788-1827) angegebenen Wellenfläche gehört. Schließlich präsentierte er der Versammlung im Münchener Laboratorium entworfene, von L. Brill in Darmstadt industriell produzierte Modelle dieser Flächen. Zu den Flächen, die sich beim Übergang von einer Art der Kummerschen Fläche zur nächsten ergeben, gehören insbesondere die sogenann-

[18]Die Kummersche Fläche ist eine von E. E. Kummer 1864 aufgrund optischer Überlegungen beschriebene Fläche vierter Ordnung mit 16 Doppelpunkten, die als Brennfläche von 16 Strahlen interpretiert werden kann. Darüber hinaus besteht ein Zusammenhang der Funktionentheorie (Thetafunktionen und -relationen).

ten Plückerschen „Complexflächen".

Mehrere Referate galten in München der Analysis. Dabei ergab sich eine merkwürdige Koinzidenz zwischen einem anwendungsbezogenen Vortrag, den der Wiener Oskar Simony über ein Problem der Holzmessung in München hielt, und demjenigen von S. Spitzer (ebenfalls Wien), der über die Bestimmung der Flächeninhalte von Flächen, die durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} = 1$$

gegeben sind, sprach, sowie über analoge Inhaltsberechnungen für Körper. Beide Redner lösten das Problem mit Hilfe der Gammafunktion, wobei S. Spitzer diese Einsicht Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859) zuschrieb. S. Lie sprach „Ueber Minimalflächen, insbesonderheit über reelle algebraische", wobei hierzu nichts weiter mitgeteilt wird, weil ein entsprechender Artikel bereits erschienen sei. Schließlich äußerte sich P. Gordan „Ueber die Auflösung der Gleichungen fünften Grades", wozu es knapp im Tageblatt heißt: „Er gab Methoden an, wie man die Wurzeln solcher Gleichungen durch Irrationalitäten darstellen kann, die bei der Untersuchung des Ikosaeders auftreten" (TB, 58). Es ging hierbei also um die Auflösung der im allgemeinen nicht algebraisch (durch Wurzelziehen) auflösbaren Gleichung fünften Grades mit Hilfe von funktionentheoretischen Mitteln (vergleiche hierzu Klein 1970, 356f oder Weber 1899, 470-496).

Ferdinand Lindemanns Thema war der Beweis der Korrespondenzsätze (nach A. Brill und A. Cayley) durch Abelsche Integrale zweiter Gattung, wobei von Ch. Hermite angegebene Methoden zum Beweis von Sätzen über elliptische Funktionen auf Kurven beliebigen Geschlechts erweitert wurden. Schließlich sprach F. Klein noch über elliptische Funktionen, wobei es ihm um die Tatsache ging, dass das Periodenverhältnis des elliptischen Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ (wobei $R(x)$ ein Polynom vierten Grades ohne doppelte Nullstellen sein soll) ein Kreisbogendreieck durchläuft, wenn sich die absolute Invariante $\frac{g_2^3}{D}$ mit $D = g_2^3 - 27g_3^2$ des Polynoms $R(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$ (sogenannte 'Weierstraßsche Normalform', auf die sich jedes elliptische Integral bringen lässt) über die obere komplexe Halbebene bewegt.

Bei der Tagung in **Kassel 1878** standen zwei topologische Themen im Vordergrund: das der Dimension sowie der Eulersche Polyedersatz. Die Diskussion um ersteres wurde durch den Beitrag „Ueber eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten" des Hallensers Enno Jürgens[19] ausgelöst. Darin referierte der Redner

[19]Enno Jürgens (1849-1907) hat in Heidelberg studiert und 1873 bei Leo Königsberger mit einer Arbeit über lineare Differentialgleichungen promoviert. Danach hielt er sich in Berlin bei K. Weierstraß auf, um sich schließlich 1875 in Halle zu habilitieren. Dort machte er, dessen Arbeitsgebiet ansonsten fast ausschließlich die Analysis gewesen ist, die Bekanntschaft der Cantorschen Ideen, die ihn zur Beschäftigung mit dem Dimensionsproblem anregten. 1883 folgte er einem Ruf nach Aachen, wo er bis zu seinem Tode wirkte. Sein Biograph M. Krause urteilt so über die Bedeutung der Jürgensschen Arbeit zur Dimensionserhaltung:

> „Jürgens war der erste, der in einwandfreier Weise nachwies, daß bei der eindeutigen und stetigen Abbildung einer Ebene auf eine andere eine flächenhafte Umgebung in

kurz die Geschichte des Dimensionsbegriffes: B. Riemann hatte in seinem Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" (1854, publiziert 1867) eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit definiert als „einen Inbegriff, dessen Elemente in eindeutige Beziehung zu n unabhängigen reellen stetigen Veränderlichen stehen können" (TB, 137). Diese Festsetzung sei durch Georg Cantors Entdeckung, dass Einheitsintervall und -quadrat gleichmächtig sind (modern gesprochen) 'erschüttert' worden. Cantors Ergebnis, das dieser in seinem Brief an Dedekind vom 29.6.1877 mit den Worten „Je le vois, mais je ne le crois pas" kommentierte, wurde nach einiger Verzögerung 1878 im Journal für die reine und angewandte Mathematik veröffentlicht; im Briefwechsel mit R. Dedekind gibt es hierzu aufschlussreiche Bemerkungen (vergleiche Purkert-Ilgauds 1987, 48-52). Bei E. Jürgens heißt es:

> „Herr Prof. G. Cantor hat nämlich vor kurzem den überraschenden Nachweis geführt (...), dass die Eindeutigkeit der Zuordnung durchaus nicht den Grad der Ausdehnung oder die Dimension bestimmt; man kann vielmehr beispielsweise die Lage eines Punktes im Raum oder in der Ebene ebensowohl wie in der Geraden durch eine einzige Zahl bestimmen. Will man also den allen Anschein nach so bedeutungsvollen Dimensionsbegriff nicht gänzlich fallen lassen, so ist es eine unabweisbare Aufgabe geworden, eine genauere Fassung zu suchen und sie vor jedem Widerspruch zu sichern" (TB, 138).

Der naheliegende Ausweg lautete: Man fordere neben der Eindeutigkeit (modern gesprochen: Bijektivität) noch zusätzlich „die Bedingung der Stetigkeit" (modern gesprochen: Homöomorphie). „Danach wird dann eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ein Inbegriff, dessen Elemente in eindeutiger und stetiger Beziehung zu den n reellen Coordinaten eines innere Stelle enthaltenden Gebietes stehen" (TB, 138).

Der Beweis für die „Zulässigkeit" dieser Definition besteht naheliegenderweise darin, zu zeigen, dass die Dimension im angegebenen Sinne invariant ist, das heißt, dass es für $n \neq m$ keine stetige bijektive Abbildung mit stetiger Umkehrung zwischen einer n- und m-dimensionalen Mannigfaltigkeit gibt. Ein derartiger Beweis wurde ebenfalls 1878 erstmals von J. Lüroth geliefert, aber nur für den Fall ein- und zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten. In seinem Vortrag bot E. Jürgens dann eine Variante des erst 1879 publizierten Lürothschen Beweises an, die im Wesentlichen mit Mitteln der reellen Analysis arbeitet. Sein Ergebnis, das modern gesprochen als die Invarianz des Gebietes bezeichnet werden kann, lautet:

> „Ist ξ_1, ξ_2 eine innere Stelle des Gebietes x_1, x_2, so liegen in jeder Nähe der entsprechenden Stelle η_1, η_2 innere Stellen des Gebietes y_1, y_2.

eine Fläche übergeht, ... Wie großes Gewicht den Ausführungen Jürgens in den beteiligten Kreisen zugeschrieben wurde, dürfte am besten daraus entnommen werden, daß Capelli die genannte Arbeit in das Italienische übersetzt und in das von ihm herausgegebene Giornale di Matematiche vor kurzem aufgenommen hat" (Krause 1908, 169f).

Offenkundig wird hier der Beitrag von J. Lüroth übersehen.

> Hieraus folgt nun, wenn neue unabhängige Veränderliche $x_3, \ldots, x_n$ hinzutreten, sofort, dass zu einem innere Stelle enthaltenden Gebiete von n unabhängigen Veränderlichen, wo $n > 2$, niemals ein stetiges oder unstetiges Gebiet von nur zwei Coordinaten y_1, y_2 in eindeutiger und stetiger Beziehung steht" (TB, 139).

An diesen Vortrag schloss sich eine Bemerkung des zitierten J. Lüroth an, in der dieser einen Beweisversuch von Johannes Karl Thomae (1840-1923) aus dem gleichen Jahre 1878 kritisierte. Neben diesem gaben auch noch Eugen Netto (1878) und Georg Cantor selber (1879) weitere unvollständige Beweise für die Invarianz der Dimension an. In diesem Zusammenhang bemerkenswert ist auch das von Guiseppe Peano (1858-1939) 1890 veröffentlichte arithmetische Beispiel einer stetigen flächenfüllenden Kurve, deren geometrische Interpretation im selben Jahr David Hilbert auf der Naturforscherversammlung in Bremen vorstellte. Eine wirklich vollständige und allgemeine Lösung des Problems gelang erst Luitzen Egbert Jan Brouwer (1881-1966) in einer seiner berühmtesten Arbeiten überhaupt: „Beweis der Invarianz der Dimensionszahl" (1911). Dort heißt es: „Das Problem der Invarianz der Dimensionszahl, d.h. der Unmöglichkeit, zwischen einer m-dimensionalen und einer $(m+h)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit ($h > 0$) eine eineindeutige und stetige Beziehung herzustellen, ist für den Fall $m \leq 3$ von Lüroth gelöst worden. *) Im Folgenden soll der allgemeine Fall erledigt werden" (Brouwer 1976, 430). Die Fußnote *) enthält historische Informationen; sie verweist unter anderem auf die Arbeiten von J. Thomae, E. Netto und E. Jürgens. Informationen zum Problem der Dimensionserhaltung findet man in den Anmerkungen von Hans Freudenthal (1905-1990) in Brouwer 1976, 435f sowie in den Arbeiten Dauben 1975, Dubucs 1989 und Johnson 1979 sowie Johnson 1981.

Auch der zweite Problemkreis, der in Kassel breitere Beachtung fand, gehört der Topologie an: Es handelt sich hierbei um den Eulerschen Polyedersatz ('Für konvexe Polyeder gilt die Beziehung Anzahl der Ecken+Anzahl der Flächen=Anzahl der Kanten+2') und seine Verallgemeinerungen (beispielsweise auf den nichtkonvexen Fall). Über dieses Thema hatte B. Listing bereits in Frankfurt 1867 vorgetragen, wobei seine eigenen Arbeiten hierzu (hauptsächlich der „Census der räumlichen Ausdehnung") noch weiter zurückliegen (1862). In Kassel griff R. Hoppe dieses Thema wieder auf. Es ist bemerkenswert, dass der Vortragende B. Listing mit keinem Wort erwähnt. Hoppes Ziel war es, den Eulerschen Polyedersatz auf nichtkonvexe Polyeder zu erweitern. Bezeichnen e, f und k wie üblich die Anzahlen der Ecken, Flächen beziehungsweise Kanten und stehen weiter g für die Anzahl der leeren Räume (innerhalb des Körpers)[20], h für die Anzahl leerer Vielecke (innerhalb der Seitenflächen) und c für die Anzahl der Kanäle (Durchbohrungen), so gilt nach R. Hoppe:

$$e + f = k + 2g + h - 2c + 2$$

Daneben übte der Berliner Privatdozent Kritik am Entwicklungsstand der Disziplin und schlug statt der üblichen, seiner Meinung nach unnötig komplizierten Beweise

[20] Das ist wohl so zu verstehen, dass R. Hoppe auch nicht einfach-zusammenhängende Polyeder zulassen wollte; zwei disjunkte Würfel führen dann beispielsweise zu $g = 2$.

des Eulerschen Satzes einen einfacheren vor. Er schreibt: „Die folgende Lösung, so leicht sie sich darbietet, scheint mir doch unbeachtet geblieben zu sein, weil man in neuerer Zeit, wo sich die Aufmerksamkeit der Frage zuwandte, zu ziemlich complicirten Mitteln gegriffen hat, die doch wohl nicht ausreichend sein möchten" (TB, 39). Wer hier gemeint ist, bleibt offen.[21] Jedenfalls fühlte sich B. Listing, der unter den Anwesenden war, angesprochen. Er ergriff im Anschluss an den Vortrag von E. Jürgens später das Wort, um ausführlich seine Entwicklung des „Census-Satzes" (wie er die Verallgemeinerung des Eulerschen Satzes bezeichnete) darzulegen und zu verteidigen.

In den Bereich der Geometrie gehörte auch der Vortrag „Ueber einige neue Lösungen des Problems der Kugeltheilung", den E. Hess in Kassel hielt. Die Aufgabe, die er sich stellte, lautete, alle Fälle zu ermitteln, in denen ein sphärisches Polygon mit seinen congruenten und symmetrischen Wiederholungen eine geschlossene Fläche bildet, welche die Kugelfläche ein- oder mehrere Male bedeckt (TB, 38)[22]. Dieses Problem hängt mit der Bestimmung von Minimalflächen (Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), B. Riemann) sowie mit der geometrischen Darstellung binärer Formen (A. Clebsch, F. Klein, R. Dedekind) zusammen. Anwendung findet die Kugelteilung bei der Konstruktion von gleichflächigen und gleicheckigen Polyedern (Adrien Marie Legendre (1752 - 1833), Meier-Hirsch, Eugene Charles Catalan (1814-1894)). Anschließend an diese Bemerkungen trug E. Hess neue Lösungen vor, die auf Netzen von sphärischen Dreiecken beruhten, wobei die Winkel dieser Dreiecke nicht kommensurabel mit π sein sollten. Später heißt es zu diesem Beitrag: „Nach Beendigung des Vortrages glaubt der Präsident im Namen der ganzen Section zu handeln, wenn

[21] Die Beweisidee Hoppes besteht im Wesentlichen darin, das Netz des Polyeders geeignet zu einer Pyramide umzugestalten, deren Spitze einer Ecke des Netzes und deren Mantelflächen den in dieser Ecke zusammentreffenden Flächen des Polyeders entsprechen sollen, während der Rest des Polyedernetzes in der Ebene ausgebreitet werden soll. Weiter heißt es dann: „Durch blosse Addition der um jeden Punkt herum liegenden Winkel einerseits, der Polygonwinkel andererseits und Gleichsetzung ergiebt sich der Eulersche Satz" (TB, 39). Ferner werden drei Ausnahmen diskutiert, in denen das geschilderte Verfahren nicht zum Ziel führt. Lakatos kommentiert den entsprechenden Aufsatz von R. Hoppe, der ein Jahr nach dem Naturforschervortrag erschienen ist, folgendermaßen:

> „Hoppe's [1879] is particularly revealing. On the one hand he was keen - like many of his contemporaries - to have a perfectly complete 'generalised Euler formula' that covers everything. On the other hand he shrank from trivial complexities. So while he claimed that his formula was 'complete, all-embracing', he added confusedly that 'special cases can make the enumeration (of constituents) dubitable' (p. 103). That is, if an awkward polyhedron still defeats his formula, then its constituents were wrongly counted, and the monster should be adjusted by correct vision: e.g. the common vertices and edges of twintetrahedra should be seen and counted twice and each twin recognised as a seperate polyhedron (ibid.)" (Lakatos 1976, 80n)

Im Übrigen kann man das im Text wiedergegebene Zitat und überhaupt das ganze Verhalten Hoppes als Beleg für die „intrasigente" Denkweise, die P. Stäckel diesem attestierte (Stäckel 1906, 325), ansehen.

[22] Das Problem ist also analog zum Parkettierungsproblem der Ebene, wenn man fordert, dass das sphärische Polygon regelmäßig sein soll und die Kugel genau einmal vollständig und überschneidungsfrei überdeckt wird.

er dem Vortragenden seine Befriedigung und seinen Dank über den inhaltsreichen und sehr interessanten Vortrag ausspricht" (TB, 38). Ein solches Lob findet sich selten in den Tageblättern und Amtlichen Berichten. Präsident war übrigens B. Listing. Weiter führte B. Listing aus, „wie die entwickelten mathematischen Gesetze vielfach Anwendung auf naturhistorische Gegenstände finden könnten, und dass er früher ein Object aus dem Bereich der Insectenwelt, nämlich das musivische Auge der Insecten, namentlich der Stubenfliege und der Aeschua grandis, nach dieser Richtung (gemeint ist: im Hinblick auf das Problem der Kugelteilung; K.V.) zu untersuchen angefangen habe" (TB, 38). Diese Bemerkung wirft ein bezeichnendes Licht auf die Grundeinstellung des Mathematikers und Naturforschers B. Listing. Hierzu vergleiche man auch die ausführlich besprochenen botanischen Beispiele in Listing 1847. Daneben gab es in Kassel ein Referat zur Mathematikgeschichte, von dem allerdings nur der Titel überliefert ist: S. Spitzer sprach über die Rechenmaschine des Thomas de Colmar.

Bei der nachfolgenden Versammlung **Baden-Baden 1879** finden wir nach längerer Abwesenheit M. Cantor wieder, der hier die Errungenschaften der babylonischen Mathematik würdigte. Als solche bezeichnete der Heidelberger Mathematikhistoriker:

1. Das kuschistische Dezimalsystem und das sumerische Sexagesimalsystem. Beide wurden in der Zahlschreibweise der Keilschrift verschmolzen, wofür die Täfelchen von Senkereh sowie eine Beleuchtungstabelle des Mondes Belege seien.

2. Die Einteilung des Vollkreises in 360 gleiche Teile „mit mancherlei sich daran anknüpfenden Folgerungen und die Kenntnis gewisser Verbindungen von geraden Linien" (TB, 76).

Von unserem Standpunkt aus betrachtet (vgl. etwa Joseph 1991, 91-129) fällt Cantors Liste mit den Verdiensten der babylonischen Mathematik erstaunlich knapp aus - vielleicht ein Zeichen dafür, dass man im 19. Jahrhundert erst im Begriff war, die vorgriechischen Wurzeln der Mathematik zu entdecken und zu würdigen (vgl. hierzu auch S. Günthers Beitrag in Graz 1875) - ganz zu schweigen vom „Eurozentrismus", der damals sicher auch schon am Werk gewesen ist.

Im Bereich der Algebra finden wir vier Vorträge, von denen allerdings jeweils nur der Titel überliefert ist. Es sind diese: Gräfe „Geometrische Auflösung der Gleichung fünften Grades mittels Kegelschnitte", E. Schröder „Ueber eine allgemeine Theorie der Verknüpfungen", E. Jürgens „Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra" sowie in der Sektion „Mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht" Lips „Ueber Determinanten und ihre Verwendung in der Schule". Es ist anzunehmen (vergleiche Krause 1908, 169), dass E. Jürgens seinen Satz über die Invarianz des Gebietes dazu verwendet hat, den Fundamentalsatz der Algebra als Korrolar hiervon zu beweisen.

Erstmals trat in Baden-Baden der spätere Heidelberger Privatdozent (1883) und Extraordinarius (1887) Hermann Hirsch Schapira auf, der hier die Grundideen seiner Theorie der „Partial- und circumplexen Functionen und Reihen vortrug[23]. Ist eine analytische Funktion in Gestalt einer Reihe $f(x) = \sum a_i x^i$ gegeben, so wird als

[23]Zu Leben und Werk vergleiche man Koehler 1899 oder Jaffe 1939. Der wichtigste Förderer von

deren n-te Partialfunktion diejenige Funktion bezeichnet, in deren Reihenentwicklung nur solche Potenzen auftreten, die einer vorgegebenen Kongruenz $i \equiv k \bmod m$ genügen. Circumplexe Funktionen hingegen erhält man, indem man x durch $r^m x$ ersetzt, wobei r eine n-te primitive Einheitswurzel sein soll mit $m < n$ (vergleiche hierzu Preobraschensky 1882). H. Schapira leitete nun allerlei Sätze über die derart konstruierten Funktionen her und gab hiervon Anwendungen (vor allem in den nachfolgenden Vorträgen Salzburg 1881, Eisenach 1882 und Magdeburg 1884). Auffallend ist, dass die Wiedergaben der Schapiraschen Vorträge außergewöhnliche Längen erreichen (20 Seiten in Salzburg, 18 in Eisenach), was man als Hinweis darauf deuten kann, dass eine anderweitige Veröffentlichung nicht möglich gewesen ist.

Gleich mit drei Beiträgen war H. Schröter in Baden-Baden vertreten. Ein erster Vortrag beschäftigte sich mit „Raumcurven dritter Ordnung" und mit deren Durchmessern („gerade Linien, welche die Eigenschaft haben, die Mittelpunkte aller Sehnen zu enthalten, welche sich von den Punkte derselben durch eine Raumcurve dritter Ordnung ziehen lassen" (TB, 176)). Mit Hilfe der drei Fernpunkte der Kurve wurde ein hyperbolisches Paraboloid konstruiert, von dem eine bestimmte Regelschar auf einen von L. Cremona angegebenen Durchmesser der Kurve führt. Es werden dann noch weitere, nicht mit dem Paraboloid zusammenhängende Durchmesser diskutiert. Das konkrete Ergebnis der Untersuchung lautet:

> „Es gibt also bei der cubischen Hyperbal drei, bei der cubischen Ellipse einen neuen Durchmesser. Im Allgemeinen hat die cubische Raumcurve demnach sechs Durchmesser, welche sich paarweise treffen; die drei ersten liegen in einer Ebene, die letzten drei sind die Hauptaxen der drei Cylinder, welche sich durch die Raumcurve legen lassen" (TB, 176).

Der zweite Beitrag H. Schröters bezog sich auf die Konstruktion von Polarsystemen, wobei von Kurven oder Flächen zweiter Ordnung ausgegangen wurde und projektive Büschel verwandt wurden.

Schließlich teilte H. Schröter noch „einige Sätze über das Tetraeder" mit. Ist ein Tetraeder im Raum gegeben sowie ein Punkt, der nicht zum Tetraeder gehört, so las-

---

H. Schapira in Heidelberg scheint Lazarus Fuchs (1833-1902) gewesen zu sein. Liest man die Gutachten, die dieser 1880 (anlässlich der Promotion) und 1883 (anlässlich der Habilitation) verfasste (Universitätsarchiv Heidelberg H-IV 102, 94 bzw. H-IV 102, 101), so gewinnt man den Eindruck, dass L. Fuchs den Arbeiten Schapiras eher ratlos gegenüber stand. Allerdings bestand der Kandidat beide Prüfungen trotz schwerer Bedenken gegen die schriftlichen Leistungen - die Dissertation und die Habilitation mussten beide auf Geheiß von L. Fuchs nachgebessert werden (letztere musste sogar zweimal druckgelegt werden). Die hochfliegenden Erwartungen, die W. Preobraschensky formulierte, haben sich wohl nicht bewahrheitet:

> „Ich glaube, dass man nach dem oben Auseinandergesetzten ohne Uebertreibung sagen kann, dass die Erscheinung der analysierten Arbeit [die russische Fassung der Dissertation, K.V.] eine wichtige Epoche in der Entwicklung der Mathematik eröffnet, deren Grenzen noch schwer vorauszusehen sind (Preobraschensky 1882, 26).

Der Heidelberger Mathematische Verein, von dem bei H. Schapira gelegentlich die Rede ist (*Schapira 1881, 1*) war der naturhistorisch-medicinische Verein (auch Dozentenverein genannt), in dem auch Hermann von Helmholtz viele Vorträge - u.a. den über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie - gehalten hat (vergleiche Schmitt 1978).

sen sich von diesem drei Geraden ziehen, die jeweils ein Paar von Gegenkanten der Körpers treffen (dies hängt eng mit der sogenannten Steinerschen Projektion zusammen). Das ergibt sechs Schnittpunkte. Zu jeweils einem dieser Schnittpunkte und zu den Ecken des Tetraeders, die die Kante begrenzen, die den fraglichen Schnittpunkt enthält, konstruiere man den vierten harmonischen Punkt (das heißt, dass das Doppelverhältnis dieser vier kollinearen Punkte -1 sein soll). Insgesamt ergeben sich so zwölf Punkte, aus denen man vier Auswahlen zu je sechs Elementen kann, die jeweils drei Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseits bilden. Auf diese Weise entstehen vier Ebenen, die wiederum auf ein Tetraeder führen. Das Ausgangstetraeder und das solcherart konstruierte liegen in vierfacher Weise perspektivisch zueinander.

Ebenfalls der Geometrie gewidmet war das Referat der Karlsruher Geometers Chr. Wiener. Dieser beschäftigte sich mit der „Abhängigkeit der Rückkehrelemente der Projectionen einer unebenen Curve von denen der Curve selbst". Ausgangspunkt hierfür ist eine unebene Kurve und ein Punkt, der sich auf derselben bewegt. In Abhängigkeit hiervon werde die Bewegungen, die die Tangente an die Kurve in dem fraglichen Punkt sowie die zugehörige Schmiegeebene vollführen, untersucht. Diesen lassen sich Vorzeichen zuordnen, die wiederum mit der Bewegung eines Punktes auf der Projektion der Ausgangskurve in die Ebene sowie mit den Bewegungen der Tangenten und der Schmiegeebene in der Projektion in Beziehung gesetzt werden. Der Vortrag schloss mit der Vorführung von Faden- und Drahtmodellen.

Das Ende der Sektion markiert der bemerkenswerte Satz: „ Da diejenigen Herren, die noch Vorträge angemeldet haben, theils noch nicht angekommen, theils schon wieder weggereist sind, so werden die Sitzungen der Section durch den Vorsitzenden um 11 Uhr geschlossen" (TB, 177).

Recht schwach vertreten war die reine Mathematik bei der Versammlung **Danzig 1880**. Wir finden hier nur den Vortrag von Julius Franz über „Die Tautochrone in einem Widerstand leistenden Mittel" in dem im Anschluss an P. S. Laplace das klassische Problem der Tautochronen (das ist diejenige Kurve, auf der ein nur dem Einfluss der Schwere unterworfener Massepunkt von allen Ausgangslagen gleich lang braucht, um einen bestimmten Punkt zu erreichen; die Tautochrone im klassischen Sinne ist die Zykloide), das von dem Medium, in dem die Bewegung von Statten geht, absieht, auf Medien mit Reibungswiderstand verallgemeinert. Die zugehörige Differentialgleichung wird aufgestellt und deren Lösung durch verschiedene Kennzeichen (zum Beispiel Krümmungsradien) charakterisiert.

Der Beitrag von Heinrich Durège „Über gewisse specielle Vorgänge innerhalb eines Gebietes von vier Dimensionen" behandelte einige topologische Fragestellungen. Bemerkenswert ist die darin gegebene Begründung für die Beschäftigung mit derartigen Problemen: „Da es gegenwärtig für uns unmöglich ist, von einem vierdimensionalen Gebiete eine klare Vorstellung zu haben, so dürfte es von Interesse sein, wenigstens bei gewissen speciellen Vorgängen innerhalb eines solchen Gebietes einen genaueren Einblick in dieselben zu gewinnen" (TB, 175). Die erste Frage lautete: Wie kann ein im Innern einer (dreidimensionalen) Kugel befindlicher Punkt im Vierdimensionalen in den äußeren Raum hinaus bewegt werden, ohne die Kugel zu durchqueren? Das zweite Problem behandelte die Entknotung von Knoten im vierdimensionalen

Raum. Ein ähnlicher Problemkreis wurde von R. Hoppe angesprochen, der sich mit „Parallelen geschlossener Curven" befasste. Seine Ausgangsfeststellung lautete: „Mir ist noch keine Untersuchung der Frage bekannt, ob ein, ursprünglich nicht tordirtes geschlossenes Band bei einer Formänderung im allgemeinen eine Torsion erleidet" (TB, 174). Die Torsion des Bandes wird mit Hilfe einer zu wählenden Mittellinie und deren Parallelen charakterisiert: Diese bilden im nichttordierten Zustand parallele Kurven. Die Anfangsfrage reduziert sich nun darauf, ob die Parallelen immer in geschlossene Kurven (bei stetiger Deformation) abgebildet werden oder nicht. Hierfür wird analytisch eine Bedingung abgeleitet.

Von Interesse für den Mathematikunterricht ist der Beitrag des Oberlehrers Feyerabendt aus Thorn, der sich mit den mathematischen Schulbüchern seiner Zeit auseinandersetzte. Dort heißt es:

> „Die hier entwickelten Gedanken gehen von der Voraussetzung aus, dass mit der Verbesserung der mathematischen Unterrichtsmethode die Lehrbücher nicht Schritt gehalten haben; jener ist es wesentlich zuzuschreiben, wenn das Vorurtheil, Mathematik zu begreifen, sei nicht jedermanns Sache, fast verschwunden ist. Um das Ziel zu erreichen, dass jeder Schüler auch in der Mathematik die Reife erlangt, wird unter Umständen eine Beschränkung des Lehrstoffes notwendig sein. Für die Repetition bedarf es einer Aufzeichnung und dazu dient in erster Linien das Lehrbuch. Dieses soll durchaus nach pädagogischen Gesichtspunkten abgefaßt sein und wenn diese mit der strengen Wissenschaftlichkeit in Conflict treten, muss letztere zurücktreten. Es darf also unbedenklich ein Satz, der für den Zusammenhang notwendig, dessen Beweis aber für das Fassungsvermögen des Schülers zu schwierig ist, ohne Beweis durch Anschauung klar gemacht und dann vorausgesetzt werden. Endlich ist bei der Einteilung des Stoffes nicht nach wissenschaftlichen Prinzipien, sondern nach der Fassbarkeit für die einzelnen Klassen zu verfahren.
> Oberlehrer Momber Danzig stimmt im Allgemeinen bei, jedoch glaubt er, dass auch vorhandene Lehrbücher, z.B. Mehler, in der vom Vortragenden angedeuteten Weise benutzt werden können. Director Trosien Danzig meint, dass das Lehrbuch nicht der Systematik entbehren könne, die Auswahl sei dem Lehrer zu überlassen. In ähnlicher Weise sprechen sich Director Schweder -Riga, Professor Künzer -Marienwerder, Director Neumann Danzig aus" (TB, 138f.).

Der 'Mehler', von dem hier die Rede ist, dürfte eines der erfolgreichsten deutschsprachigen Mathematiklehrbücher des 19. Jahrhunderts gewesen sein. Sein vollständiger Titel lautete: „Hauptsätze der Elementar.Mathematik zum Gebrauch an Gymnasien und Realschulen. Mit einem Vorwort von Schellbach". Seine erste Auflage erschien 1859 bei Reimer in Berlin, die 18. noch vom Autor besorgte Auflage war Berlin 1894. Später wurde das Werk dann von G. Baseler, danach von A. Schulte-Tigges bearbeitet (26. Auflage des Stammbuches Berlin 1910)[24].

[24]Zur Person von Mehler vergleiche man Krause 1897. Schellbach, der ein Vorwort zu 'Mehler' bei-

Bei der Versammlung **Salzburg 1881** dominierte die Analysis das Geschehen. H. Schapira führte in die Grundlagen seiner Theorie der Cofunktionen ein, wobei er im Wesentlichen seine Ideen aus Danzig wieder aufgriff und vertiefte. W. Zmurko sprach „Ueber lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit binomischen Coefficienten". In seinem Vortrag wird die Integration dieser für physikalische Anwendungen wichtige Klasse von Differentialgleichungen untersucht, wobei „convergente gesetzmässig fortschreitende Reihen" (TB, 42) benutzt werden. In seinen Ausführungen stützte sich W. Zmurko auf J. Petzval, Anton Winkler (1821-1892) und S. Spitzer, also auf drei in Wien tätige Mathematiker, die sich intensiv mit der Integration von Differentialgleichungen, vornehmlich der mathematischen Physik, beschäftigten. Ludwig Kiepert äußerte sich zur sogenannten komplexen Multiplikation elliptischer Funktionen. Dabei geht es darum, die doppeltperiodische Funktion $p(mu)$ rational auszudrücken durch $p(u)$, wobei m eine rationale Zahl sein soll (vergleiche hierzu Weber 1908, 190-199 sowie das dritte Buch und Dieudonné 1985, 471-473). L. Kiepert plädierte für die von K. Weierstraß angegebene Normalform elliptischer Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}$$

wobei $R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$ und $g_2 = AA' - 4BB' + 3C$ sowie $g_3 = ACA' + 2BCB' - C^3 - AB'^2 - A'B^2$ sein soll. Hiervon ausgehend wird eine Methode entwickelt zur Berechnung der singulären Invarianten (das sind diejenigen Zahlen, für die die komplexe Multiplikation möglich ist, für die also eine rationale Darstellung existiert). Diese liefert auch einen Zugang zur (vollständigen) Diskriminantengleichung.

Schließlich werden die algebraischen Beziehungen zwischen den Wurzeln der Diskriminantengleichung, also zwischen den singulären Invarianten, diskutiert, die die Gestalt sogenannter Abelscher Gleichungen haben. Zu Bedeutung und Entwicklungsstand der Theorie der komplexen Multiplikation bemerkt der Vortragende: „Obwohl man die Berechnung und die Untersuchung dieser singulären Invarianten und Module, für welche komplexe Multiplikation stattfindet, von grossem Interesse ist für die Analysis, für die Zahlentheorie und für die Algebra, so ist trotzdem auf diesem Gebiete verhältnismässig wenig gearbeitet worden" (TB, 22). Das sollte sich bald ändern. So ergriff H. Weber, einer der wichtigsten Protagonisten dieser Theorie, 1885 das Wort zu diesem Thema.

S. Günther führte in seinem Beitrag „parabolische Trigonometrie", eine Idee des Engländer James Booth, aus, wie man aus dem Additionstheorem für elliptische Integrale (Weber 1908, 43-49 oder Dieudonné 1985, 427-432) goniometrische Beziehungen und Additionstheoreme für die Hyperbelfunktion gewinnen kann. Eine Anwendung hiervon wird mit Hilfe der logozyklischen Kurve, heute meist Strophoide genannt,

gesteuert hat, war einer der einflussreichsten Mathematikdidaktiker des 19. Jahrhunderts: Karl Heinrich Schellbach (1804-1892) war ab 1843 Mitglied der wissenschaftlichen Prüfungskommission in Preußen und leitete ab 1855 ein berühmtes Ausbildungsinstitut für Lehrer der Mathematik und Physik in Berlin. Zu Schellbach vergleiche man Müller 1905.

auf die graphische Darstellung der natürlichen Logarithmen vorgenommen. Zum Abschluss verwies der Vortragende auf seine umfassende Monographie zu diesem Thema.

In **Eisenach 1882** gab es zwei Referate zur reinen Mathematik: Hermann Weissenborn, der durch einige historische Arbeiten in den *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik* (Bd. 2, 1880) bekannt geblieben ist, lieferte einen Beitrag zur Beantwortung der Frage: „Wie verfuhren die Araber bei der Bearbeitung und bei der Übersetzung geometrische Schriften?" (hiervon ist nur der Titel bekannt) und E. Mahler äußerte sich zum „Talmund als Quelle für die Geschichte der Mathematik", wobei er geometrisches Wissen schilderte (zum Beispiel 3 als Näherungswert für die Kreiszahl), das sich im Talmund findet. Er stellte die von H. Schapira[25] angegriffene These auf, im Talmund werde noch nicht zwischen Kreisfläche und -umfang unterschieden. Weiter führte er aus, dass sich bei den Kommentatoren Baleh-Tosfeth (1140-1340) ein Beweis des Satzes „Ein dem Kreis umbeschriebenes Quadrat ist an Flächeninhalt um $\frac{1}{4}$ größer als der Kreis" durch Summierung unendlich kleiner Flächenstreifen zu einem endlichen Flächenstück finde. Dieser Beweis wurde dann ausführlich dargelegt.

Auch in Eisenach trug H. Schapira vor, diesmal über eine „Erweiterung der Begriffe der arithmetischen Grundoperationen".

Ein bedeutendes Ereignis in der Geschichte der algebraischen Geometrie spiegelte sich vermutlich in dem Vortrag von H. Weber wider, der über die „Ausdehnung der für rationale Functionen geltenden Sätze auf algebraische Functionen mittelst Einführung des Begriffes des Ideals" sprach. Dabei dürfte H. Weber eine Zusammenfassung seiner im gleichen Jahr erschienenen, zusammen mit R. Dedekind geschriebenen Arbeit über algebraische Funktionen gegeben haben, in der es den Autoren erstmalig gelang, die Theorie der algebraischen Funktionen unabhängig von analytischen Begriffen rein algebraisch (vor allem mit dem auf E. E. Kummer zurückgehenden, von R. Dedekind wesentlich weiterentwickelten Begriff des Ideals) aufzubauen (vergleiche Geyer 1981 und Weber 1908, 5. Buch). J. Dieudonné schreibt zur Bedeutung dieser Arbeit:

> „Das Ziel der Arbeit von Dedekind-Weber war wesentlich begrenzter [also dasjenige von L. Kronecker; K.V.]; sie beschränkten sich auf algebraische Kurven und nahmen sich vor, rein algebraische Beweise für alle algebraischen Sätze Riemanns zu geben. Ihre bemerkenswerte Originalität (die in der gesamten Geschichte der algebraischen Geometrie nur noch von der Riemanns übertroffen wird) führt sie dazu, eine Reihe von Begriffen einzuführen, die für das moderne Zeitalter fundamental werden sollten" (Dieudonné 1974, 61).

Schließlich treffen wir noch auf einen zweiten, der Differentialgeometrie gewidmeten Beitrag von E. Mahler „Ueber die Principien der allgemeinen Flächentheorie und deren Anwendung auf die Theorie der höheren Mannigfaltigkeiten, eine neue Begründung der Krümmungstheorie der Flächen und der höheren Mannigfaltigkeiten". Dieser ausführlich im Tageblatt dokumentierte Vortrag versuchte, die von C. F.

[25] H. Schapira hat selbst über ähnliche Themen veröffentlicht, nämlich über die erste geometrische Schrift in hebräischer Sprache (Schapira 1880).

Gauß in seinen „Disquisitiones generales circa superficies curvas" (1827) gefundenen Ergebnisse in zweierlei Hinsicht zu verallgemeinern: Zum einen leitet E. Mahler die entsprechenden Formeln (insbesondere die Eulerschen Sätze) in nichtrechtwinkligen Koordinatensystem her; zum anderen werden die Resultate auf n-dimensionale Mannigfaltigkeiten übertragen (zum Beispiel die Gaußsche Formale für die Krümmung K).

Ein Novum der Versammlung **Freiburg 1883** ist die Tatsache, dass hier Georg Cantor ein Referat über seine neugeschaffene Mengenlehre, genauer gesagt, eine transfinite Arithmetik, hielt und damit diesen Problemkreis in den Rahmen der Sektion einführte. Sein Titel lautete: „Ueber die unendlichen ganzen realen Zahlen und ihre Beziehung zueinander". Bemerkenswert ist die Charakterisierung der transfiniten Ordinalzahlen, von denen der Vortrag im Wesentlichen handelte, als reale Zahlen, was deren Anspruch auf 'volles Bürgerrecht' (das C. F. Gauß einst für die komplexen Zahlen reklamierte) im Reich der Mathematik mit Nachdruck unterstreicht. Das zweite Thema, das der Hallenser Mathematiker in seinem Beitrag anschnitt, war die Definition des Kontinuums. Dieses wird von ihm bestimmt als „eine perfect-zusammenhängende Mannigfaltigkeit von Punkten" (AB, 57). Hierbei wird deutlich, dass G. Cantor nicht nur der Begründer der Mengenlehre sondern auch der mengentheoretischen Topologie gewesen ist. Perfekt bedeutet bei ihm, dass die fragliche Menge mit ihrer ersten abgeleiteten Menge (das heißt, mit der Menge ihrer Häufungspunkte) übereinstimmt; zusammenhängend heißt eine Menge, wenn zwei beliebige ihrer Punkte durch einen Polygonzug verbindbar sind (mit gewissen zusätzlichen Bedingungen - vergleiche Purkert-Ilgauds 1987, 68f.). Abschließend heißt es in Cantors Beitrag: „Dieser Vortrag gibt Herrn Prof. Stolz Veranlassung, eine anschließende Mitteilung anzumelden" (AB, 57). Leider wird nicht deutlich, worin diese Veranlassung bestand; denkbar ist es, dass Cantor gegen die Verwendung unendlich kleiner Größen polemisierte (welche er im Unterschied zu den unendlich großen Zahlen strikt ablehnte), deren Zulässigkeit dann O. Stolz in seinen Ausführungen „Über ein Axiom des Archimedes" im Sinne von logischer Konsistenz nachzuweisen suchte. In dessen Beitrag ging es neben einigen historischen Hinweisen um die Frage, „ob dieser Satz [das ist das Archimedische Axiom; K.V.] aus den übrigen über die genannten Größen (dass sie unter einander vergleichbar seien, addirt und subtrahirt, endlich in gleiche und mit ihnen gleichartige Theile zerlegt werden können) abgeleitet werden kann oder nicht" (TB, 57). Diese wird unter Berufung auf Paul Du Bois-Reymond (1831-1889) negativ beschieden (vergleiche Du Bois-Reymond 1877), weil jener gezeigt habe, dass „ein Grössensystem existirt, das den soeben genannten Forderungen genügt, ohne dass der in Rede stehende Satz erfüllt ist" (TB, 57). Dieses System wird von O. Stolz als „Unendlich der reellen Functionen" bezeichnet; heute ist es eher unter der Bezeichnung Infinitärkalkül geläufig (vergleiche hierzu die moderne Darstellung Hardy 1910). Größen, die das Archimedische Axiom erfüllen, werden lineare Größen genannt. Die Idee nichtarchimedischer Größensysteme wurde gegen Ende des 19. Jahrhunderts verschiedentlich wieder aufgegriffen, so im geometrischen Kontext durch Guiseppe Veronese (1854-1917), Tullio Levi-Civita (1886-1971) und David Hilbert sowie Max Dehn (1878-1952). Insgesamt stellt O. Stolz' Beitrag ein bemerkenswert frühes Beispiel modelltheoretischen Denkens dar.

Im Bereich der Geometrie finden wir einen Vortrag von Chr. Wiener „Ueber eine einfach Construction beliebig vieler Curven eines Büschels oder einer Schar von Kegelschnitten". Im Falle der Schar beruht die fragliche Konstruktion auf dem Satz,

> „dass, wenn man aus den Mittelpunkten A, A_1 zweier involutorischer Strahlenbüschel, deren zugeordnete Strahlen in Bezug auf alle Curven der Schar conjugirt sind, Strahlen zieht, von denen zwei sich auf einer von zwei verzeichneten Curven der Schar schneiden, ein Netz von einfachen Vierecken entsteht, in welchem je zwei Gegenecken einer der Curven angehören. Wen ein regelmässiges Netz entstehen soll, so hat man zwei benachbarte, in ihrer vorherrschenden Erstreckung oder ganz gleichlaufende Ausgangscurven zu wählen" (TB, 55).

Ludwig Stickelberger, ab 1879 in Freiburg tätig, äußerte sich „Ueber die Oberfläche des Ellipsoids". Der Vortragende wies eingangs darauf hin, dass in der gängigen Berechnungsmethode für die fragliche Oberfläche, die sogenannte Catalansche Komplanationsmethode, die drei Achsen der Körpers in unterschiedlicher Weise eingehen, dass also die Symmetrie von vorne herein gestört ist. Er zeigte dann, wie man mit Hilfe einer Substitution zu symmetrischen Formeln gelangen kann. Zum Schluss wird ausdrücklich angemerkt: „Die Methode läßt sich unverändert anwenden auf das analoge Problem für einen Raum von n Dimensionen" (TB, 56). In einer Anmerkung zu dem geschilderten Vortrag macht A. Enneper darauf aufmerksam, dass ein nicht näher bezeichneter Lebesgue (vermutlich war Victor Aédie Le Besgue (1791-1875) gemeint) bereits zu ähnlichen Resultaten gelangt sei.

Ein weiterer Beitrag Stickelbergers beschäftigte sich mir der Bezoutschen Eliminationsmethode[26]. Diese beruht - so die Ausführungen des Vortragenden - wesentlich auf der Ausdehnung der Division auf Funktionen mehrerer Veränderlicher, wobei die genannte Ausdehnung ihrerseits von der Lösbarkeit eines Systems nicht homogener linearer Gleichungen abhängt. L. Stickelberger zeigte, dass die Lösbarkeit im Allgemeinen gegeben ist, was aus dem Nachweis leicht folgt, dass die fraglichen Gleichungen unabhängig sind. Schließlich heißt es: „Ein ähnliches Princip führt dann weiter zu den Haupteigenschaften der Resultate und speziell zum Bézoutschen Satz" (TB, 71). Rudolf Lipschitz sprach „Ueber Eigenschaften der Bernoulli'schen Zahlen", wobei er Formeln angab, mit deren Hilfe man die ganzzahligen Anteile dieser Zahlen berechnen kann. Weiter formulierte er ein Kriterium, das festzustellen erlaubt, wann diese ganzzahligen Anteile Primzahlen sind; schließlich gab er noch asymptotische Entwicklungen für die ganzzahligen Anteile an.

In Fortführung seines Salzburger Vortrages entwickelte L. Kiepert in Freiburg seine Ausführungen über elliptische Funktionen weiter unter dem Titel „Die Transformationstheorie der elliptischen Functionen", wobei der Leser auf die entsprechende Veröffentlichung verwiesen wird.

[26] Diese Methode dient zur Ermittlung von Schnittpunkten algebraischer Kurven und war von Etienne Bézout (1730-1783) dazu verwendet worden, zu zeigen, dass zwei Kurven vom Grade n beziehungsweise m mn (nicht notwendig reelle) Schnittpunkte besitzen).

In seinem Referat „Ueber die Grössenberechnung der Winkel von n Dimensionen" stellt R. Hoppe folgende Definition des n-dimensionalen Winkels vor: „Der Winkel von n Dimensionen ist ein vollständig begrenztes Gebiet von Strahlen aus einem Centrum. Das Gebiet wird gemessen durch das gleichbegrenzte Gebilde $r = 1$ [r ist der Radius der Kugel; K.V.] von $n-1$ Dimensionen" (TB, 56). Die Mehrdimensionalgeometrie sei nützlich, so der Vortragende, weil sie „entscheidet ... über die Beziehung der Begriffe und Sätze der Geometrie der Ebene, indem sie beide als Spezialfälle eines Allgemeinen enthält" (TB, 55). Weiter „eröffnet sie ein Feld für Transformationen analytischer Ausdrücke" (TB, 55). Seine Integralformel für den n-dimensionalen Winkel verstand R. Hoppe als Beispiel für eine derartige Transformation. Die Geometrie des n-dimensionalen Raumes war auch Gegenstand der Sektion Mathematik, Astronomie und Geodäsie der Versammlung Magdeburg 1884. Victor Schlegel sprach dort „Ueber Entwicklung und Stand der n-dimensionalen Geometrie nebst Vorlegung von dreidimensionalen Abbildungen der regelmässigen vierdimensionalen Körper". Der Beginn des Schlegelschen Vortrages ist in vielerlei Hinsicht bemerkenswert, weshalb er hier wörtlich wiedergegeben werden soll:

> „Der Vortragende legte zunächst dar, wie aus analytisch-geometrischen Betrachtungen die Idee mehrdimensionaler Räume gewonnen werden könne, wie aber erst, seitdem der Begriff des empirischen Weltraumes von dem des abstracten Raumes sich zu scheiden begonnen habe, jene Idee in ihren Consequenzen frei verfolgt werden konnte. Es wurde sodann der bahnbrechenden Untersuchungen auf diesem Gebiet von Bolyai, Lobatschewsky, Grassmann, Riemann und Helmholtz gedacht und gezeigt, wie die anfangs rein analytische geführten Untersuchungen allmählich zu dem Bestreben führten, die Resultate derselben auch irgendwie geometrisch zu veranschaulichen. Es wurde bei dieser Gelegenheit erörtert, wie die Spiritisten den abstracten vierdimensionalen Raum der Mathematik ohne weiteres als wirklich existirendes Gebilde betrachten, um dasselbe zu einem Schlupfwinkel zu machen, aus welchem die vermeintlichen Geister in den Weltraum einbrächen, um dort nach Verübung von allerlei Unfug wieder ins Unfassbare zu verschwinden. Es wurde aber auch der zu solchen Theorien führende Analogieschluss als absurd nachgewiesen. Der Vortragende gab sodann eine Uebersicht über die das n-dimensionale Gebiet betreffende Literatur und ging speciell ein auf das hauptsächlich von Herrn Hoppe, Herrn Stringham und ihm selbst behandelte Problem der den regelmässigen Polyedern entsprechenden Gebilden des vierdimensionalen Raumes" (TB, 68).

Zu dem genannten Thema folgen dann weitere Ausführungen, in denen es hauptsächlich um zweidimensionale Projektionen der sechs regulären Gebilde des vierdimensionalen Raumes ging, sowie um dreidimensionale, in Gestalt von Modellen vorgeführte Projektionen derselben Körper (diese Projektionen heißen bei V. Schlegel „homogene polyedrische Körper" (TB, 68))[27]. Auf den Legitimationsdruck, dem sich die neue

[27] Die Suche nach den regulären Körpern im vier- und höherdimensionalen Fall scheint in jener Zeit

Betrachtungsweise damals ausgesetzt fühlte, kann man aus der folgenden Bemerkung schließen:

> „Der Vortragende wies schliesslich auf den Nutzen hin, den solche mehrdimensionale Untersuchungen nicht nur für die Mathematik, sondern auch für unsere allgemeine Weltanschauung haben können, und gedachte dabei auch der von Zöllner aufgestellten Hypothese einer positiven Krümmung unseres Weltraumes, die als eine der Vernunft nicht widersprechende, auch zur Erklärung der Erhaltung der Energie im Weltraum nothwendige scheinende, im Uebrigen aber noch vollständig in der Luft schwebende characterisirt wurde" (TB, 68-69).

V. Schlegel bezieht sich hier auf Johann Karl Friedrich Zöllner (1834-1882), den bekannten Leipziger Astronomen und Physiker[28]. Angemerkt sei noch, dass sich V. Schlegel in einer Reihe von Veröffentlichungen darum bemühte, das mathematische Erbe von Hermann Grassmann (1809-1877) zu bewahren und publik zu machen. Ausführliche Informationen besitzen wir auch über den Beitrag „Ein neues Theorem der projectivischen Geometrie von n Dimensionen" des Tübingers Franz Meyer. Der sehr allgemeine Satz, so der Vortragende, der vorgestellt werden sollte, wurde durch ein Analogon in der gewöhnlichen Geometrie erläutert. Dieses besagt:

> „Schneidet man ein vollständiges, räumliches Fünfeck mit einer Ebene e_1, so ist die so entstehende 'regelmässige Configuration' e von 10 Punkten P und 10 Geraden p 'zu sich selbst polarreciprok' in Bezug auf einen bestimmten (reellen oder nicht reellen) Kegelschnitt K, d.h. jeder der 10

mehrere Mathematiker beschäftigt zu haben. V. Schlegel nennt in Schlegel 1886 unter anderem R. Hoppe, Stringham, Forchhammer und Puchta. Das Ergebnis für den vierdimensionalen Fall lautet:

> „Nach den übereinstimmenden Resultaten dieser Untersuchungen gibt es nun im vierdimensionalen Raume sechs regelmässige Gebilde, welche der Reihe nach begrenzt werden von 5, 16, 600 Tetraedern, 8 Hexaedern, 24 Oktaedern und 120 Dodekaedern. Stringham stellte auch fest, dass die drei, resp. mit
>
> 1) Dreieck, Tetraeder, Fünfzell (von 5 Tetraedern begrenzt),
>
> 2) Viereck, Hexaeder, Achtzell (von 8 Hexaedern begrenzt),
>
> 3) Viereck, Oktaeder, Sechzehnzell (von 16 Tetraedern begrenzt)
>
> beginnenden Reihen sich in alle höheren Dimensionen fortsetzen, während in Räumen mit mehr als vier Dimensionen andere regelmäßige Gebilde überhaupt nicht existieren" (Schlegel 1886, 134).

Eine ausführliche Darstellung dieses Problemkreises gibt Schouten, 1905; interessante Anmerkungen erkenntnistheoretischer Art findet man bei Connes, 1992 (22f). Für Parallelen in der Auseinandersetzung um die n-dimensionale Geometrie in England vergleiche man Richards 1988; interessante Aspekte finden sich auch bei Freudenthal 1961a.

[28] Im Gegensatz zu späteren Auffassungen Zöllners (ab 1875), die von Schlegel angedeutet werden und in denen ersterer spiritistische Erfahrungen mit Hilfe des vierdimensionalen Raumes erklären wollte, scheint die Theorie des gekrümmten Raumes, die Zöllner in seiner Schrift „Ueber die Natur der Kometen" (Leipzig, 1872) aufgestellt hat, wissenschaftlich ernst genommen worden zu sein. Eine kritische Auseinandersetzung findet man bei Erdmann 1877, 75-78.

> Punkte ist (in Bezug auf K) der Pol einer bestimmten der 10 Geraden" (TB, 141).

Es folgt noch eine Beweisskizze, so „dass es dann nur noch der Analogiebildungen bedarf, um zur grössten Allgemeinheit zu kommen" (TB, 141).

Auch in Magdeburg trug H. Schapira über seine Theorie vor. Diesmal lautete sein Thema: „Anwendungen der Cofunctionen auf die Integration linearer Differentialgleichungen". Daneben gab es noch einen wohl mehr philosophischen Vortrag „Ueber die mathematischen Grundlagen der Naturerkenntnis" von Julius Worpitzky, von dem lediglich der Titel bekannt ist.

Eine bemerkenswerte Bedeutung erlangte die reine Mathematik in der Sektion „Mathematik und Astronomie" der Versammlung **Straßburg im Elsaß** (wie es damals hieß) **1885**. Nach dem deutschen Sieg von 1871 wurde diese Universität, die zuvor eher ein Schattendasein geführt hatte, gezielt zu einer „deutschen Musteruniversität" (wie es in einem Beschluss des Reichstages hieß - vergleiche Friedelmeyer-Fuchs 1989, 44) ausgebaut. In der Mathematik geschah dies 1872 durch die Berufung Theodor Reyes (1838-1919) und Elwin Bruno Christoffels (1829-1900), die beide von Leopold Kronecker für diese Ausgabe ausgewählt wurden und die jahrzehntelang in Straßburg tätig blieben (E. B. Christoffel trat 1894 in den Ruhestand - sein Nachfolger wurde H. Weber; Th. Reye lehrte bis 1909). Unter ihrer Führung wurde Straßburg bald schon zu einem wichtigen Zentrum der reinen Mathematik (wobei der letztgenannte hauptsächlich die synthetische Geometrie pflegte, während E. B. Christoffel schwerpunktmäßig Analytiker war (Invariantentheorie, Differentialgeometrie)), insbesondere auch der mathematischen Ausbildung fortgeschrittener Studenten (vgl. Wollmershäuser 1981). In der Festschrift, die anlässlich der 58. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in der Stadt Straßburg erstellt wurde, findet sich eine kurze Beschreibung des Mathematischen Seminars aus der Feder Theodor Reyes. Dort heißt es:

> „Die beiden Räume des Seminars liegen nebst dem Directorzimmer im Nordflügel des Kollegiengebäudes, und zwar an der nördlichen Ecke desselben. Der eine Raum ist wie ein Hörsaal eingerichtet und fasst 40 Zuhörer; der andere dient den Studirenden als Arbeits- und Uebungsraum und enthält die Seminar-Bibliothek und eine Sammlung geometrischer Modelle.
> Die Bibliothek ist ungeachtet ihrer Jugend, und obgleich ein großer Teil ihrer Schätze nur antiquarisch und selten käuflich war, eine reichhaltige. Vor allem enthält sie fünfzehn mathematische Zeitschriften vollständig, darunter als älteste das Journal de l'Ecole polytechnique, dann Gergonne's Annalen, Crell-Borchardt's Journal, Liouville-Refal's Journal, das Cambridge mathematical Journal, Tortolini's und Brioschi's Annali, Schlömilch's Zeitschrift, das Quaterly Journal of Mathematics, die Annales de l'Ecole normale superieure, die Mathematischen Annalen, die Acta mathematica u. a. m." (Festschrift, 55).

Schließlich wird noch eine ausführliche Beschreibung der im Seminar vorhandenen Modelle gegeben.

In Straßburg finden wir erstmals einen überwiegend der Logik gewidmeten Beitrag: „Das Eliminationsproblem im identischen Kalkül" von Ernst Schröder. Darin behandelte der Karlsruhe Mathematiker im Anschluss an O. H. Mitchell die Frage nach der Zerlegung zusammengesetzter Aussagen in primäre Teilaussagen (das sind nach E. Schröder Aussagen, „welche die Gebiete (Klassen) selbst und nicht wieder nur Aussagen über diese betreffen" (TB, 353)), wobei auch das bekannte Schrödersche Subsumptionszeichen auftrat. Dessen Betrachtungen mündeten in das folgende kombinatorische Problem:

> „Wenn zwei Klassen vorliegen: $p, p', p'', \ldots$ und $s, s', s'', \ldots$ deren eine zusammen die nähmlichen Individuen enthält, wie die andere, so sollen die Fälle aufgezählt, charakterisirt und ausgeschieden werden, in welchen es unmöglich ist, eine neue Klasse zu bilden, welche aus jeder Klasse der ersten Reihe mindestens ein Individuum einschliesst und zugleich aus jeder Klasse der zweiten Reihe mindestens ein Individuum einschliesst" (TB, 353-354).

Im Bereich der Geometrie finden wir drei Vorträge. Guido Hauck äußerte sich über die „Konstruktion der perspectivischen Kontur einer krummen Fläche nach der Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme", eine Methode, die auf dem folgenden Satz beruht: „Hat man in zwei Projektionssystemen die perspectivischen Conturen einer Fläche, so schneiden sich die von den bezüglichen Kernpunkten an den Conturen gezogenen Tangenten in einem Punkte des Grundschnittes" (TB, 353). Die fragliche Konstruktion wird exemplarisch an einer Rotationsfläche vorgeführt, wobei Chr. Wiener in einer Anmerkung auf ein alternatives Verfahren hinwies, „nach welchem in dem als Beispiel angeführten Falle die Tangenten des scheinbaren Umrisses und die Berührungspunkte desselben einfach perspectivisch konstruiert werden" (TB, 353). Die darstellende Geometrie war ein Hauptarbeitsgebiet sowohl von G. Hauck, der in Halle wirkte und sich übrigens auch intensiv mit den Beziehungen dieser mathematischen Disziplin zur bildenden Kunst beschäftigte[29], wie auch von Chr. Wiener. Letzterer äußerte sich in Straßburg über die „Imaginärprojektion der Kegelschnitte, der Flächen zweiter Ordnung und der Raumcurven vierter Ordnung erster Art". Der Vortragende führte ein Modell einer derartigen Kurve vor, die sich als Schnitt eines Zylinders mit einer Kugel darstellen ließ, und deren Imaginärprojektion als Schnitt der Projektionen der genannten Flächen gewonnen wurde.

Schließlich finden wir im Tageblatt nach folgende Notiz: „Hr. Schlömilch spricht über die Unzulässigkeit der Geometrie in vier und mehr dimensionalen Räumen. An der lebhaften Diskussion betheiligten sich die Herren Brill, Noether, Simon[30]" (TB, 354). Es ist recht selten, dass in den Tageblättern und dergleichen eine Diskussion

[29] Vergleiche „Ueber die Stellung der Mathematik zur bildenden Kunst und Kunstwissenschaft" (Berlin, 1880) und „Die malerische Perspektive, ihre Praxis, Begründung und ästhetische Wirkung" (Berlin, 1882); zu Leben und Werk Lampe 1905.

[30] Max Simon (1844-1918), ab 1871 Professor am Lyzeum zu Straßburg, ab 1891 dann an der dor-

als sehr lebhaft bezeichnet wird - ein Hinweis vielleicht darauf, dass O. Schlömilchs Meinungsäußerung als Herausforderung empfunden wurde. In seinem Angriff wird deutlich, dass selbst 1885 noch Widerstände gegen diese neue Form der Geometrie vorhanden waren, was wiederum die vielen Rechtfertigungsversuche (beispielsweise auf der vorangegangen Versammlung; siehe oben) verständlich macht. Vermutlich waren derartige Vorbehalte in der damaligen Zeit weiter verbreitet, als man aus moderner Sicht annehmen möchte. So weiß Heinrich Emil Timerding (1873-1945) über seinen Lehrer Th. Reye zu berichten: „Aus diesem Grunde [Reyes Idealbild der Geometrie; K.V.] hat er auch jede Erweiterung des Raumbegriffes über den Raum der Anschauung streng abgelehnt. Von einer mehr als dreidimensionalen Geometrie zu sprechen, schien ihm nur erlaubt, wenn als die Grundelemente statt der Punkte andere Gebilde des anschaulichen Raumes [verlgeiche Plückers Liniengeometrie; K.V.] zugrunde gelegt werden. Daß Unvorstellbarkeit und logische Unmöglichkeit verschieden Dinge seien, ließ er für die Geometrie nicht gelten. Seine Meinung war: Was sich nicht vorstellen läßt, ist geometrisch falsch" (Timerding 1992, 192-193).

Im Bereich Analysis und Funktionentheorie treffen wir 1885 insgesamt vier Vorträge an. Mit Leo Königsberger ergriff dabei einer der prominentesten Analytiker seiner Zeit das Wort, um „Ueber einige Punkte aus der Theorie der Differentialgleichungen (Abel'sches Theorem usw.)" zu sprechen. Von diesem Beitrag ist nur der Titel überliefert. Der bereits im Zusammenhang mit Straßburg erwähnte Heinrich Weber, der 1885 noch in Marburg tätig war, äußerte sich „Ueber die complexe Multiplikation der elliptischen Functionen, welche aus quadratischen Gleichungen von der Determinante -11 entspringt und die dadurch definirten Zahlkörper". Auch von diesem Vortrag, der ein damals aktuelles Thema behandelte (vergleiche Kiepert 1881), ist nur der Titel überliefert. Die Beschäftigung mit der komplexen Multiplikation veranlasste später H. Weber dazu, die Klassenkörpertheorie - die als einer seiner wichtigsten Beiträge zur reinen Mathematik gilt - zu entwickeln (vergleiche Dieudonné 1985, 240-244 und Frei 1989). Etwas mehr Information erhalten wir über die Beiträge „Die algebraischen Charakteristiken der hyperelliptischen Theta-Functionen ($p = 2$) in ihrer Verwendbarkeit zur Bildung von Theta-Relationen" von Johann Anton von Braunmühl und „Die Ableitung der Weierstrass'schen σ-Relation aus einer der Jacobi'schen ϑ-Relationen". J. A. von Braunmühl, der heute hauptsächlich als Verfasser einer zweibändigen „Geschichte der Trigonometrie" (1900-1903) bekannt ist, stellte im Anschluss an Ernst Otto Staude (1857-1928) zwei Kongruenzen zwischen den Periodenintegralen der hyperelliptischen Thetafunktionen vom Geschlecht zwei auf, die „die Ueberführung der 16 Theta-Funktionen ineinander durch die Substitution der Periodenhälften ohne Tabelle ermöglichen" (TB, 173)[31]. Weiter leitete er sogenannte Vierersysteme erster und zweiter Art sowie Fundamentalsysteme mit sechs Cha-

tigen Universität, hat sich neben der Mathematikgeschichte und der Geometrie auch mit der nichteuklidischen Geometrie in eigenständigen Forschungen beschäftigt (u.a. „Zu den Grundlagen der nichteuklidischen Geometrie, Festschrift zum 80. Geburtstag E. Kummers" (Straßburg 1891)). Zu Leben und Werk von M. Simon vergleiche man die Einleitung von Siegbert Schmidt zu Simon 1985.

[31]Die Thetafunktionen, die auf C. G. J. Jacobi zurückgehen, werden folgendermaßen definiert (τ

rakteristiken ab. Aus ersteren lässt sich die Bildung bestimmter Theta-Relationen ablesen. F. Meyer gewann die Weierstraßschen σ-Relationen aus den Jacobischen ϑ-Relationen, indem er die ϑ_1-Funktionen, die in diesen Beziehungen auftreten, durch σ-Funktionen ersetzte (vergleiche Dieudonné 1986, 468-471 oder Weber 1908, 116-119). Ein zweiter Beitrag von F. Meyer behandelte die damals noch keineswegs Allgemeingut gewordene Galois-Theorie (vergleiche Van der Warden 1985 oder Scholz 1990): „Ueber die Reducibilität der Gleichungen fünften Grades mit zwei Parametern". Darin heißt es: „Die Grundaufgabe der Gruppentheorie ist es, die Gruppe G einer Gleichung durch Adjunktion geeigneter Irrationalitäten successive zu reduciren. Dabei zerlegt sich, immer der Reduction der Gruppe G correspondirend, die linke Seite der Galois'schen Resolvente in rationale Factoren" (TB, 174). Der Vortragende beschäftigte sich dann mit dem Sonderfall, dass die Diskriminante der zu zerlegenden ganzen Funktion $g(x, y)$ die maximal mögliche Anzahl von Doppelwurzeln besitzt. Besitzt die Ausgangsgleichung $g(x, y)$ in x den Grad 5, in y einen Grad kleiner/gleich 5 und gilt

$$g(x, y) = f_1(x, y)\varphi_1(x, y) + f_2(x, y)\varphi_2(x, y) + f_3(x, y)\varphi_3(x, y)$$

---

sei eine komplexe Zahl, deren Imaginärteil positiv ist, und es sei $q = e^{i\pi\tau}$):

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(\nu) &= i \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^\nu q^{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2\nu-1)i\pi\tau} \\
&= 2\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2} \sin(2\nu+1)\pi\nu, \\
\vartheta_2(\nu) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} q^{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2\nu-1)i\pi\tau} \\
&= 2\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2} \cos(2\nu+1)\pi\nu, \\
\vartheta_3(\nu) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} q^{\nu^2} e^{2\nu i\pi\tau} \\
&= 1+2\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu^2} \cos 2\nu\pi\upsilon, \\
\vartheta_4(\nu) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^\nu q^{\nu^2} e^{2\nu i\pi\upsilon} \\
&= 1+2\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu q^{\nu^3} \cos 2\nu\pi\upsilon
\end{aligned}$$

Die ..-Funktionen, die unter anderem durch eine Reihenentwicklung definiert werden kann, wurde von K. Weierstraß 1840 eingeführt. Eine Produktdarstellung, die ebenfalls von K. Weierstraß stammt, sieht so aus:

$$\sigma(u) = u \prod_{\omega\neq 0} \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) \exp\left(\frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2}\right)$$

Dabei durchläuft ω das Periodengitter einer doppeltperiodischen Funktion. Literatur: Krazer 1903.

Es lässt sich zeigen, dass „die Gesamtheit aller möglichen rationalen Zerlegungen von g... höchst einfach repräsentirt wird durch die Lage der geraden Linien, Kegelschnitte und cubischen Raumcurven auf einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung in bezug auf eine beliebige, aber bestimmt herausgegriffene halbe Doppelsechs der Fläche" (TB, 174).

Was die Anzahl der Vorträge anbelangt, so erreichte die reine Mathematik bei der Versammlung **Berlin 1886** ihren Höhepunkt: Hier gab es allein zwölf Beiträge zur reinen Mathematik, daneben noch zwei Beiträge in der Sektion mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht, die sich mit Fragen des Mathematikunterrichtes befassten, sowie ein allgemeiner Vortrag von Felix Müller „Vorschlag uir Herstellung eines mathematischen Wörterbuches". Hiervon ist nur der Titel bekannt; es ist aber anzunehmen, dass es sich bei diesem Wörterbuch um das „Mathematische Vokabularium französisch-deutsch und deutsch-französisch, enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik" handelte, das der Vortragende 1900 in Leipzig veröffentlichte. Dieses kann im größeren Kontext des Enzyklopädieprojektes gesehen werden, das 1899 unter der Leitung von F. Meyer zu erscheinen begann (vergleiche hierzu dessen einleitende Bemerkungen zur Enzyklopädie: Meyer 1904)[32].

Bemerkenswert bei der Versammlung in Berlin ist die Dominanz der Analysis und Funktionentheorie (sechs Vorträge) sowie die Tatsache, dass die Algebra stark vertreten war (immerhin vier Vorträge), während es die sonst oftmals beherrschende Geometrie nur auf einen Beitrag brachte. Hervorzuheben ist ferner, dass mit James Joseph Sylvester ein prominenter ausländischer Gast zugegen war (neben S. Lie). Letzterer sprach über die Beziehungen seiner allgemeinen Untersuchungen über kontinuierliche Transformationsgruppen zu H. von Helmholtz' Abhandlung „Ueber die Thatsachen, welche der Geometrie zum Grunde liegen" (1868). Hierzu erfahren wir nur, dass sich an der anschließenden Diskussion Auwers, R. Lipschitz, F. Klein und L. Kronecker beteiligten. Vermutlich ging es um die von S. Lie vorgenommene Präzisierung der auch H. von Helmholtz und B. Riemann zurückgehende Idee, notwendige und hinreichende Bedingungen für die freie Beweglichkeit starrer Körper in n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten aufzustellen. Zu diesem sogenannten Raumproblem von Riemann-Helmholtz-Lie-Poincaré vergleiche man Freudenthal 1961 oder auch Süssmann 1990. O. Simony aus Wien sprach „Ueber eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie", wobei es hauptsächlich um Knotentheorie ging und deren Beziehung zu Zahlentheorie und Algebra. Beachtung

[32]Felix Müller, Professor am Königlichen Luisengymnasium zu Berlin und Mitglied der Kaiserlich Leopoldinischen Gesellschaft hat mehrere noch heute nützliche Nachschlagswerke zur Mathematik(geschichte) geschrieben, so die „Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500" (Leipzig, 1892) und den „Führer durch die mathematische Literatur mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtigen Schriften" (Leipzig, 1909). Seine Dissertation (1867) über die Transformation elliptischer Funktionen wurde in der zeitgenössischen Literatur häufig zitiert (zum Beispiel in der Sektion bei Kiepert 1881, 23).

Die bekannteste Leistung überhaupt von Felix Müller dürfte jedoch die Begründung des „Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik" 1869 (zusammen mit C. Orthmann) gewesen sein, das er auch bis zu deinem Tode mit herausgab.

verdienen die folgenden Ausführungen der Vortragenden[33].

> „Im Anschluss hieran folgert der Vortragende einerseits, dass kein, aus gegenseitig undurchdringlichen Elementen aufgebauter Complex im dreidimensionalen Raum ein gewisses Complicationsmaass überschreiten kann, alsi auch der fortschreitenden morphologischen Entwicklung organischer Gebilde von vorneherein gewisse obere Grenzen gesteckt sind, andererseits hebt er hervor, dass die hier besprochenen topologischen Thatsachen neue Sätze über Primzahlen - allerdings nur in Form von Inductionsschlüssen - vermitteln und so die Existenz gemeinsamer Gesichtspunkte für die Behandlung gewisser topologischer und zahlentheoretischer Fragen erkennen lassen" (TB, 636).

Kommen wir nun zur Analysis. Hier treffen wir auf zwei Beiträge, die es mit Modellen, einem - wie wir bereits mehrfach gesehen haben - damals sehr wichtigen Gegenstand zu tun hatten. Heinrich Burkhardt aus München, wo anscheinend die Fertigung mathematischer Modelle besonders gepflegt wurde (vergleiche Brill 1877), „legte einige Gypsmodelle vor, die unter Leitung von Herrn Prof. Dyck in der technischen Hochschule zu München entstanden sind und die gewisse Funktionen komplexen Argumentes ... repräsentiren" (TB, 123). Friedrich August stellte „Modelle von Körperketten vor, bestehend aus lauter im mechanischen Sinne kongruenten Gliedern, deren Schwerpunkt nicht in die Verbindungslinie der Eckpunkte (Gelenkpunkte) liegen". Er hebt hervor, dass ein derartiges „wirkliches Kettenpolynom" im Grenzfall eine Kettenlinie und nicht etwa eine Gerade ergibt.

Ernst Schröder äußerte sich in Berlin zum Thema „Funktionalgleichungen" und zwar zu solchen, die die Beziehung einer zweiargumentigen Funktion zu sich selbst und ihren Umkehrungen darstellen. Ausdrücklich erwähnt wird, „dass für solche Gleichungen sich Lösungen angeben lassen, die zwar überall unstetig, doch integrabel sind", die also pathologisch genannt werden können[34] (TB, 123).

Mit Leopold Kronecker war einer der führenden Berliner Mathematiker bei der Versammlung anwesend, während E. E. Kummer, K. Weierstraß und L. Fuchs ausdrücklich als abwesend genannt werden (die Versammlung schickte ihnen jeweils ein Telegramm). L. Kronecker überreichte als Gastgeschenk einige Exemplare seines neuesten Aufsatzes „Zur Theorie der elliptischen Funktionen" und knüpfte hieran Bemerkungen über arithmetische Eigenschaften der Kugelfunktionen. Diese bestehen darin, dass die Kugelfunktionen gewisse Divisorensysteme zulassen, deren Elemente wiederum aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannt sind. Damit ist den Kugelfunktionenen, deren Ursprung in der Astronomie liegen (sie wurden von

[33] Der Name O. Simony, der übrigens an einem forstwirtschaftlichen Institut in Wien beschäftigt war (vergleiche seinen Beitrag in München 1877), blieb bis ins 20. Jahrhundert hinein mit einer Klasse von Knoten verbunden; vergleiche hierzu Tietze 1943-44 und Tietze 1944. Zur Frühgeschichte der Knotentheorie vergleiche man Dehn/Heegard 1907, 210-216; zu Simony dort S. 215f, wo auch dessen Beiträge auf den Naturforscherversammlungen 1886 und 1887 zitiert werden (S. 215 n. 147).

[34] Zum Thema 'pathologische Funktionen' vergleiche man Volkert 1987 und Chabert 1990.

P. S. de Laplace und von A. M. Legendre um 1780 herum im Zusammenhang mit der Berechnung des Gravitationspotentials von beliebig geformten Himmelskörper eingeführt), eine „bedeutende Rolle" in der reinen Arithmetik - die L. Kronecker bekanntlich über alle anderen Teildisziplinen der Mathematik stellte - zugewiesen. Für die Behauptung, die H. Weber in seinem Nachruf auf Kronecker (Weber 1893, 15) aufstellt, letzterer habe im Rahmen der Versammlung zu Berlin den berühmten Ausspruch „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk" getan, lässt sich im Tageblatt kein Anhaltspunkt finden.

Wie schon 1883 in Freiburg sprach R. Lipschitz auch in Berlin über ein Thema aus der analytischen Zahlentheorie, dem er den sehr vagen Titel „Ueber einige arithmetische Sätze" gab. Genauer ging es um „einige aus der Theorie der Exponentialfunktionen abgeleitete Sätze" (TB, 123), wobei von den Ergebnisse von Ch. Hermite (1873) und F. Lindemann (1882) bezüglich der Transzendenz von e beziehungsweise π ausgegangen wird mit dem Ziel, jeder „irreduziblen algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten" (TB, 123) eine Gruppe von Sätzen zuzuordnen, „in denen die Transzendente als wesentliches Element auftritt". L. Kiepert äußerte sich zu „Vereinfachungen in der Behandlung der Modulargleichungen", also auch zu einem Thema aus dem Bereich der „höheren Transzendenten" (höhere Funktionentheorie). Diese werden durch die Einführung neuer Parameter erreicht. Schließlich trug Carl Runge, der später vor allem als Numeriker bekannt werden sollte (vergleiche Richenhagen 1986), über das asymptotische Verhalten algebraischer Funktionen vor, die für unendlich viele ganzzahlige Werte der Veränderlichen rationale Werte annehmen. J. J. Sylvester, der Gast aus Oxford, der sich besonders um die Entwicklung der Matrizenrechnung verdient gemacht hat, wählte ein Thema aus der Algebra: „Über die Lösung von Gleichungssystemen in ganzen Zahlen und ihre Beziehung zu der von Halphen wiederentdeckten Theorie der Aspekte". Dabei ging es darum, die Anzahl ganzzahliger Lösungen zu ermitteln, die ein Gleichungssystem zulässt. Hierzu kann man J. J. Sylvester folgendes Problem untersuchen: „Die Kolumnen einer rechtwinkligen Matrix so anzuordnen, dass alle Unterdeterminanten in regelmässiger Aufeinanderfolge dasselbe algebraische Zeichen haben" (TB, 345). Hat man es mit einer (3×3)-Matrix zu tun, so ist dieses Problem äquivalent zu dem der Aspekte und perspektivischen Punktfolgen in der Ebene. Fr. Meyer behandelte „reduzible ganze Funktionen mehrerer Variabler". Er formulierte Bedingungen für die Zerlegung derartiger Funktionen in zwei oder mehr Faktoren, von denen einer linear bezüglich einer Variablen sein soll. Alle Zerlegungen lassen sich aus einer „Fundamentalzerlegung" gewinnen, welche wiederum mit der Lösung eines linearen Gleichungssystems zusammenhängt. Kurt Hensel, bekannt geblieben vor allem durch seine p-adischen Zahlen, sprach „Ueber die Bestimmung der wesentlichen Theile der Discriminante beliebiger Gattungen". Sein Vortrag gipfelte in dem Satz: „Ist n der Grad der Fundamentalgleichung der Gattung, r der Grad desjenigen Theiles derselben für eine Primzahl p als Modul, welches für diese Primzahl keine congruenten Factoren enthält, so ist p^{n-r} der wesentliche Theiler der Gattungsdiscriminante" (TB, 636). Ein letzter Beitrag zum Bereich der Algebra von E. Hess „Ueber quaternäre orthogonale Substitutionen" behandelte die Analoga der gewöhnlichen Drehungen und Spiegelungen im vierdimensionalen Raum sowie die Übereinstimmungen und Unterschiede, die sich hierbei zum dreidimensionalen Fall ergeben.

In der Unterrichtsektion gab es zwei Referate, die sich dem Mathematikunterricht widmeten. Krumme, der „Ueber die Berücksichtigung der Krystallographie beim Unterricht in den ersten Elementen der Stereometrie und Trigonometrie" sprach, forderte die Beachtung der genannten Disziplin, weil diese eine vortreffliche Übung im geometrischen Zeichnen erlaube. Er führte Beispiel dafür an, wie sich aus der Kristallographie in natürlicher Weise Fragen für den Stereometrieunterricht ableiten lassen. In einer Anmerkung zu diesem Vortrag wies Witte darauf hin, dass der Vorwurf mangelnder Ausbildung im geometrischen Zeichnen die Vorbildungsanstalten, speziell das Gymnasium, treffe. Weiter heißt es: „Er [Witte; K.V.] theilt die Ansicht Kekules, dass eine Vereinigung von akademischen und technischen Studien wünschenswerth sei. Auch der Zeichenunterricht solle die Ausbildung des Anschauungsvermögens im Auge haben" (TB, 291).

In seinem Beitrag „Die neuere Geometrie auf den höheren Lehranstalten" plädierte Scholz für eine verstärkte Berücksichtigung der darstellenden Geometrie in der Schule, weil diese - im Unterschied zu der recht voraussetzungsreichen synthetischen Geometrie - in hohem Maße geeignet sie, das Anschauungsvermögen der Schüler zu entwickeln. In der anschließenden Diskussion, welche Pro- und Kontrapositionen enthielt, fiel der folgende bemerkenswerte Satz: „Er (Müller) verweist auf die Bedeutung der darstellenden Geometrie für einzelne Berufsklassen. Namentlich von Aerzten habe er vielfache Klagen über mangelhafte Ausbildung ihres Anschauungsvermögens gehört" (TB, 171). Flohr griff in der Diskussion noch einmal den Terminus 'neuere Geometrie' auf, womit hier der Aufbau der Geometrie auf den Abbildungsbegriff (im Sinne des 'Erlanger Programmes' (1872) von F. Klein) gemeint war, und bescheinigte dieser: „Durch Eröffnung weiter Gesichtskreise wird Frische und Lebendigkeit bei den Schülern geweckt" (TB, 171).

Anlässlich der Versammlung **Wiesbaden 1887** hielt S. Günther ein Referat „Zur Geschichte der stereographischen Projektion". Da S. Günther seit 1886 Professor für Geographie in München und als Autor mehrerer Lehrbücher der Geographie hervorgetreten war, handelt es sich hierbei um ein für ihn naheliegendes Thema[35]. Neben ihrer Relevanz für die Kartographie nannte der Vortragende zwei weitere Motive, die die Behandlung der stereographischen Projektion angezeigt erscheinen lassen: Erstens sei sie mathematisch gesehen wichtig, weil sei den Begriff der Winkeltreue involviere; sie bereite insbesondere die Behandlung der Riemannschen Zahlenkugel vor; zweitens spiele sie auch in kristallographischen Anwendungen eine Rolle. Als Urheber der stereographischen Projektion nannte S. Günther Hipparchos; angewendet oder beschrieben wurde sie in der Antike unter anderem von Vitruv und Ptolemaios. Die Bezeichnung selbst führte S. Günther auf den belgischen Jesuiten Aquilonius (1566-1617) zurück. Schließlich wird das 1726 erschienene Leipziger Universitätsprogramm der dortigen Professor C. A. Hansen ausführlich besprochen, weil dieses

[35]Vergleiche „Erdkunde und Mathematik in ihrer gegenseitigen Beziehung" von S. Günther (München, 1877).

allerlei interessante Anwendungen der stereographischen Projektion enthalte.

Zur Geometrie gab es bei der nachfolgenden Versammlung 1887 in Wiesbaden keine Vorträge, wohl aber zwei zur Topologie von O. Simony. In Fortsetzung seines Berliner Vortrages sprach dieser „Ueber den Zusammenhang gewisser topologischer Thatsachen mit neuen Sätzen der höheren Arithmetik und dessen theoretische Bedeutung"; weiter gab es eine „Demonstration eines neuen topologischen Apparates zur Herstellung gewisser, zahlentheoretisch verwendbarer Knotensysteme". Dabei benutzte der Wiener Topologe die Idee, bestimmte Knotenverbindungen (das sind Verknüpfungen mehrerer Knoten miteinander) durch formale Produkte zu repräsentieren, ein für die damalige Zeit erstaunlich abstrakter Ansatz. Die Exponenten, die in diese formalen Produkte eingehen, lassen sich als Teilnenner von Kettenbrüchen interpretieren. Alle Knoten, die zum selben symbolischen Produkt führen, bilden eine sogenannte stabile Knotengruppe. O. Simony leitete anschließend zahlentheoretische Eigenschaften der durch die Produkte der Exponenten gebildeten Zahlen ab. Bemerkenswert hinsichtlich der weiteren Entwicklung der Topologie ist die folgende Andeutung: „... dass sich auf der Grundlage des hier besprochenen Zusammenhanges zwischen topologischen Thatsachen und arithmetischen Sätzen auch umgekehrt neue topologische Gesetze auf arithmetisch-algebraischem Weg ableiten lassen" (TB, 230). Im Grunde genommen ist das das Prinzip der algebraischen Topologie. Weiter führte O. Simony aus:

> „Auch die Diskussion dieser Erscheinungen nöthigt zur Einführung einer Geometrie, welche den Elementen ihrer Gebilde neben der Eigenschaften der Ausdehnung und Beweglichkeit noch jene gegenseitiger Undurchdringlichkeit beilegt, folglich weder eine Coincidenz von Linien mit Linien noch eine solche von Flächen mit Flächen im Sinne der Geometrie Euclids zulässt" (TB, 231).

Der „topologische Apparat", den O. Simony vorführte und der im Tageblatt ausführlich beschrieben wird, diente dazu, Knotensysteme zu erzeugen. An ihm wird nochmals deutlich, wie eng die Pioniere der Topologie die Beziehung dieser Disziplin zur Realität sahen. Das gewichtigste Thema der Wiesbadener Versammlung war eindeutig die Algebra, der gleich drei Vorträge galten. Johannes Schumacher sprach „Ueber die biquadratischen Gleichungen". Dabei entwickelte er die Idee der „Wurzelfunktionen" (das sind Funktionen der Wurzeln einer Gleichung), die er in symmetrische und nichtsymmetrische einteilte, wobei die Elemente der zweiten Klasse durch solche der ersten darstellbar sind. Hauptfunktionen einer Klassen werden diejenigen Funktionen genannt, die alle anderen Funktionen ganz und rational erzeugen. Weiter wird der Begriff der assoziierten Funktion eingeführt: Das sind alle diejenigen Funktionen, die durch symmetrische Funktionen ganz rational erzeugt werden. Die Anzahl der assoziierten Funktionen gibt Aufschluss über die Anzahl der independenten Resolventen. In seiner Fortsetzung „Ueber die Auflösbarkeit der algebraischen Gleichung vierten Grades" formuliert J. Schumacher dann den Satz: „Alle assymmetrischen ganzen Wurzelfunktionen einer biquadratischen Gleichung sind als ganz algebraische Functionen der Coefficienten der Gleichung darstellbar" (TB, 228). Weiter wird ein Kriterium für die algebraische Auflösbarkeit von Gleichungen höheren als vierten Grades hergeleitet. Direktor Kaiser aus Wiesbaden untersuchte Gleichungen vom Typ

$$\pm \sum (C_{11} + X)(C_{22} + X) \ldots (C_{nn} + X) = 0$$

wobei die Koeffizienten C_{ii} einer quadratischen Matrix entstammen sollen mit folgenden Eigenschaften: Die Diagonalelemente sind alle reell und die Elemente C_{ik} und C_{ki}sind konjugiert komplex (eine solche Matrix nennen wir heute Hermitisch; die erste Eigenschaft folgt unmittelbar aus der zweiten). Das Symbol $\pm \sum$ geht auf C. G. J. Jacobi zurück und bedeutet die Determinante. Wir haben es hier wohl mit dem charakteristischen Polynom (in für uns gewohnter Schreibweise) einer Hermitischen Matrix zu tun. Der Vortragende zeigte, dass die Lösungen der fraglichen Gleichungen reell sind.

Der Beitrag „Ueber einige gruppentheoretische Untersuchungen" von Ferdinand Rudio - der übrigens aus Wiesbaden stammte - brachte eine neue Definition der Begriffe 'Primitivität' und 'Imprimitivität' für Substitutionsgruppen (das sind in diesem Falle Permutationen), die anschließend im Beweis einiger gruppentheoretischer Sätze Anwendung fand.

Ein Vortrag war in Wiesbaden der Invariantentheorie gewidmet. Es war dies das Referat von Johann Erwin Papperitz, der über Differentialinvarianten redete. Es sei w eine komplexe Funktion von z und D_w bezeichnete das Doppelverhältnis der vier Funktionswerte $w(z + \alpha t)$, $w(z + \beta t)$, $w(z + \gamma t)$ und $w(z + \delta t)$. Entwickelt man D_w nach Potenzen von t, so gehören die Koeffizienten dieser Entwicklung zur Gruppe der Differentialinvarianten $w' = \frac{aw+b}{cw+d}$ (Möbius-Transformationen erhalten ja das Doppelverhältnis). Umgekehrt lässt sich die fundamentale Differentialinvariante

$$\left(\frac{w''}{w'}\right) - \left(\frac{3}{2}\frac{w''}{w'}\right)^2$$

darstellen als

$$\lim_{t \to 0} \frac{D_w - D_z}{t}$$

wobei $D_Z$das Doppelverhältnis der vier oben genannten Argumente sein soll. Damit wird also ein Zusammenhang zwischen algebraischen (Doppelverhältnissen) und Differentialinvarianten hergestellt.

Bemerkenswert bei der nächsten Versammlung ist der Vortrag „Der (erste) geometrische Unterricht, eine Naturgeschichte des Raumes" von Rektor Diekmann aus Viersen, in dem für die Aufgabe des starren Euklidischen Schemas im Geometrieunterricht zugunsten der Aspekte der Bewegung und Transformation plädiert wird: „Wenn es gelänge, diese beiden Principe als gleichberechtigte Hilfsmittel zur Erkenntnis geometrischer Wahrheiten in den Unterricht einzuführen, dann sei es auch leicht, denselben zu einem anschaulichen und anregenden zu machen" (TB, 342). Weiter heißt es: „Die gewaltigen Errungenschaften der neueren Geometrie, welche nichts vom euklidischen Beweisen wisse, beruhen auf der Einfachheit ihrer Mittel, ..." (TB, 343). Es folgte eine kurze Skizze, wie die ebene Geometrie auf die Begriffe Parallelverschiebung, zentrische und Achsendrehung begründet werden kann. Man bemerkt, dass das Thema 'neue Geometrie' in der Unterrichtssektion eine wichtige Rolle gespielt hat (vergleiche Scholz 1887). Übrigens stammt von Diekmann das erste Geometrielehrbuch, das systematisch und konsequent den abbildungstheoretischen Standpunkt durchführte. Außer diesem in der Sektion mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht gehaltenen Vortrag finden wir bei der Versammlung **Köln 1888** keine weiteren Beiträge zu mathematischen Themen; eine Sektion für Mathematik kam hier nicht zustande.

Ganz anders stellt sich die Situation 1889 in Heidelberg dar. Das ist auch nicht erstaunlich, war doch damals Heidelberg ein bedeutendes Zentrum der mathematischen und vor allem der naturwissenschaftlichen Forschung; viele der aktiven Sektionsmitglieder waren dieser Stadt und ihrer Universität durch längere Aufenthalte verbunden (vergleiche 3 unten). Das mathematische Ordinariat war seit 1884 mit Leo Königsberger, einem der bekanntesten Mathematiker seiner Zeit, besetzt, der dieses bis 1914 innehaben sollte (er war schon 1869-1875 Ordinarius in Heidelberg gewesen, zwischen 1875 und 1884 war das Ordinariat mit Lazarus Fuchs besetzt - vergleiche Puppe 1986). Als Extraordinarien wirkten 1889 Moritz Cantor, Hermann Schapira, Carl August Koehler und Friedrich Eisenlohr - alles Namen, die im Zusammenhang mit der Naturforschertagung begegnen.

Durch das Wirken von M. Cantor war Heidelberg zu einem Zentrum (vielleicht muss man sogar sagen: zu dem) Zentrum der Mathematikgeschichtsschreibung geworden (vergleiche Treutlein 1889 unten). Bei der Versammlung trug M. Cantor „Ueber den Ursprung zweier mathematischer Schulrichtungen in Europa" vor. Er stellte das Werk des Leonardo von Pisa (1170-1250), der auch als Fibonacci bekannt ist, dem des Jordanus Nemorarius (um 1220) gegenüber. Ersterer repräsentiert Cantor zufolge die eher praktische Ausrichtung im Geiste des Kaufmannes, letzterer verkörpert den reinen Gelehrten. Die Ursprünge der Ideen Fibonaccis führte der Vortragende auf den Araber Alkardi (al-Karagi, um 1030) zurück, während bei Nemorarius Alnasawi (an-Nasawi, Mitte 11. Jahrhundert) Pate gestanden habe. Die Schulen der beiden Mathematiker, die beide Lehrbücher zum elementaren Rechnen verfasst haben (nämlich das berühmte 'Liber abaci' (1202) beziehungsweise die 'Elementa arithmetica' (1. Hälfte des 13. Jahrhunderts)), bestanden bis ins 15. Jahrhundert hinein fort. Die Schule des Nemorarius kannte Duplizieren und Halbieren als eigenständige Rechenoperationen, die des Fibonacci nicht.

E. Schröder befasste sich in seinem Beitrag mit der Logik: „Ueber die Anzahl der Urtheile, welche die Logik abzugeben vermag über zwei Begriffe". Dabei ging es um die Frage, wie viel inhaltlich verschiedene Aussagen die klassische Syllogistik mit ihren Mitteln über zwei Begriffe A und B zu formulieren gestattet. Er fand hierfür die Zahl $2^{15} - 1$, indem er die fraglichen Aussagen (nach Vorbild von George Boole (1815-1864), Augustus De Morgan (1806-1871) und anderen) nach sogenannten Elementarfällen entwickelte. Die zweite von E. Schröder beabsichtigte Mitteilung „Ueber

Individualurtheile und die Definition des Individuums, Punktes, in der exakten Logik" wurde „der vorgerückten Zeit halber" zurückgezogen.

In Heidelberg finden wir zwei Vorträge zur Geometrie. Arthur Moritz Schoenflies, der später im Zusammenhang mit der Kristallographie bekannt werden sollte, führte einige „Raumtheilungsmodelle" vor, das sind 'Parkettierungen' des Raumes mit kongruenten Polyedern, die immer in der selben Weise aneinander stoßen. Speziell in das Gebiet der algebraischen Geometrie fiel Max Noethers Beitrag „Ueber den Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen", in dem Bedingungen untersucht wurden, die eine Kurve f erfüllen muss, damit sie sich bei vorgegebenen Kurven g und h in der Form $f = Ag + Bh$ darstellen lässt.

Walter Dyck sprach in Heidelberg „Ueber Methoden für die Behandlung gewisser Fragen der Analysis situs mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten". Dabei dürfte es sich um eine Zusammenfassung der beiden Arbeiten „Beiträge zur Analysis situs" gehandelt haben, die 1888 und 1890 in den Mathematischen Annalen erschienen sind (vergleiche Pont 1974, 131-151, zum gruppentheoretischen Aspekt auch Chandler-Magnus 1882, 5-10). Dyck erläuterte das von ihm entwickelte Verfahren zur Berechnung „charakteristischer Zahlen" (im Sinne etwa unserer Betti-Zahlen). Im Anschluss hieran gab es eine Diskussion zwischen H. Weber, dem Hauptherausgeber der Werke Riemanns, und W. Dyck über „die Beziehung der vorgetragenen Untersuchungen zu den von Riemann in den nachgelassenen Werken gegebenen Andeutungen sowie die hierher gehörigen Ausführungen von Betti" (TB, 196)[36].

Am stärksten war in Heidelberg die Analysis vertreten. L. Königsberger brachte in seinem Vortrag „Ueber algebraische Differentialgleichungen" Abelsche Integrale und algebraische Differentialgleichungssysteme miteinander in Verbindung, Martin Krause machte Ausführungen „Ueber die Entwicklung der doppeltperiodischen Functionen zweiter Art in trigonometrischen Reihen". Dabei schränkte er den allgemeinen Fall ein auf die Darstellung von

$$\frac{\vartheta_3(u+w)}{\vartheta_3(u)}$$

die sich wiederum mit Hilfe der Weierstraßschen Funktionen lösen lässt. Anschließend wird ein Ausdruck der Form

$$\varphi(\xi, x)\,(\xi^{-1}, x^{-1})$$

in trigonometrische Reihen entwickelt.

Ein erklärter Anhänger der Weierstraßschen Strenge (wie man die neue Art und Weise, Analysis zu betreiben, damals gerne nannte), Alfred Pringsheim nämlich,

[36] Gemeint war hier wohl in erster Linie das „Fragment aus der Analysis situs" (Riemann 1892, 479-482) sowie die einschlägige Arbeit von E. Betti aus dem Jahre 1871, in der dieser Riemannschen Ideen bezüglich der Charakterisierung von Flächen mit Hilfe der Berandungsrelation auf höhere Dimensionen übertrug, was wiederum Henri Poincaré (1854-1912) später in der 'Analysis situs-Serie' (1895-1904) dazu bewog, von Betti-Zahlen zu sprechen, ein Brauch, der sich bis heute gehalten hat.

sprach über die „Allgemeine Theorie der Convergenz unendlicher Reihen mit positiven Gliedern". Er gab aus diesem Anlass einen kurzen Überblick zur Entwicklung der Konvergenzkriterien bei A. L. Cauchy, Jospeh Bertrand (1822-1900), Ossian Bonnet (1819-1892), E. E. Kummer, Ulisse Dini (1845-1918) und P. Du Bois-Reymond, um dann die Frage aufzuwerfen „Unter welchen einfachsten Formeln muss sich das allgemeine Glied einer divergenten bzw. convergenten Reihe darstellen lassen?" (TB, 189). Dabei war es sein Ziel, „alle bisher bekannten Kriterien unter gemeinsamen Gesichtspunkten zu vereinigen" (TB, 189). Für die Ausführung dieses Unterfangens wird auf einen Aufsatz des Vortragenden verwiesen (vergleiche Verzeichnis ???). Im Anschluss hieran entspann sich eine Diskussion, in der R. Hoppe die Ansicht vertrat, die Bonnetschen (logarithmischen) Kriterien würden bereits das ganz Problem lösen. Dem widersprach A. Pringsheim unter Hinweis auf ein Beispiel von P. Du Bois-Reymond, das keinem der Bonnetschen Kriterien zugänglich sei. G. Cantor, der sich ja intensiv mit der Theorie trigonometrischer Reihen auseinandergesetzt hat, pflichtete dem Referenten bei. Schließlich finden wir noch einen Beitrag von Carl Reuschle, der ein von ihm entwickeltes Verfahren der Kurvendiskussion, Signierungsprinzip genannt, vorstellte (dieses wird ausführlich bei Wieleitner 1930, 19 geschildert). Die Algebra war in Heidelberg durch den Beitrag von Eugen Netto „Ueber den grössten gemeinsamen Theiler zweier ganzer Functionen" vertreten, in dem dieser mit Hilfe einer Reihe verschwindender Determinanten ein Kriterium dafür herleitete, wann eine ganze Funktion $h(x)$ und $g(x)$ vom Grade n ist. Anschließend wurde die Fragestellung dahingehend verallgemeinert, ob eine Beziehung zwischen den genannten Funktionen auch dann noch herstellbar sei, wenn die fraglichen Determinanten nicht verschwinden.

Erwähnung verdient der von Peter Treutlein in der Unterrichtssektion gehaltene Vortrag „Ueber das geschichtliche Element im mathematischen Unterrichte der höheren Lehranstalten". Dieser begann so: „Noch selten (oder nie?) sei dieser Stoff behandelt, und doch sei es angezeigt, denselben anzusprechen, zumal hier in Heidelberg, wo Prof. Cantor seit einem Vierteljahrhundert, einzig an deutschen Hochschulen, stets über Geschichte der Mathematik Vorlesungen halte" (TB, 711).

Das Referat, das laut Tageblatt lebhaften Beifall fand, brachte Beispiele für die Verwendung geschichtlicher Themen im Unterricht der „Niederen und allgemeinen Algebra, ferner der Geometrie". Leider gibt es im Tageblatt zu diesen Beispielen keine weiteren Hinweise (vergleiche das Verzeichnis ???). P. Treutlein hat - neben einigen historischen Arbeiten (in den ersten beiden Bänden der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik (1879, 1880) zu Coß und zu Nemorarius - auch eine Geschichte des Karlsruher Realgymnasiums, an dem er Direktor war, geschrieben. Bekannt geblieben ist P. Treutlein - ähnlich wie auch F. J. K. Diekmann - als Wegbereiter der Abbildungsgeometrie im Schulunterricht. Zu Treutleins Leben und Werk vergleiche man Stäckel 1913.

Aus der **Bremer** Versammlung heraus erging der Gründungsaufruf für die Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Die mathematische Sektion wurde hier von 31 Herren (Damen wurden zu den Sektionen nicht zugelassen) besucht. Es gab insgesamt zehn rein mathematische Vorträge, unter diesen ein Beitrag von Emil Lampe die

Einrichtungen im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik betreffend (das Jahrbuch war damals das deutschsprachige Referateorgan für mathematische Neuerscheinungen - vergleiche 4.9). Im Bereich der Geometrie finden wir einen Beitrag von Christian Hugo Eduard Study „Ueber die Bewegungen des Raumes", in dem dieser in Verallgemeinerung der Eulerschen Formeln eine Darstellung räumlicher Bewegungen durch acht homogene Parameter angab, und den Vortrag „Das Princip des Projicirens in der Eliminationstheorie" von Franz Meyer. Dieser schilderte, wie man die Untersuchung der Singularitäten algebraischer Kurven dadurch vereinfachen kann, dass man niederdimensionale Projektionen der Kurve untersucht und deren Singularitäten betrachtet. Am Beispiel der Frage nach der Existenz eines dreifachen Punktes wird vorgeführt, wie das Projektionsverfahren arbeitet. In dem von F. Meyer gewählten Beispiel ist das Verfahren äquivalent zur Lösung der folgenden algebraischen Aufgabe, die der Vortragende ausdrücklich als wichtig bezeichnet:

> „Die Anzahl der Lösungssysteme zu finden, die der Gesamtheit der Gleichungen gemeinsam sind, welche durch Nullstellen aller Unterdeterminanten erster Ordnung einer beliebigen Matrix (von n Horizontalen und $n-r$ Verticalen) entstehen, wenn die Elemente der Matrix lineare Functionen einer geeigneten Anzahl von Veränderlichen sind" (V, 10).

Diese Interpretation rechtfertigt auch die Rede von 'Eliminationstheorie' im Titel, kann man doch das Lösen von Gleichungssystemen als sukzessive Elimination von Unbekannten ansehen. Eindeutig dominant war in Bremen die Analysis. David Hilbert, damals noch in Königsberg, sprach „Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück", wobei er eine geometrische Interpretation der im gleichen Jahr von Guiseppe Peano (1858-1939) publizierten flächenfüllenden Kurve vorstellte (vergleiche hierzu das zu Jürgens 1878 Gesagte). Gleich zweimal ergriff E. Schröder das Wort. In seinem ersten Beitrag „Neueres über Bernoulli'sche Functionen von natürlicher Ordnungszahl" behandelte er Formeln zur Berechnung der sogenannten Jacobischen Koeffizienten, die sich ergeben, wenn man die Bernoulli-Polynome nach Potenzen von $z = x(1-x)$ entwickelt. Er unterschied dabei das independente Bildungsgesetz, das er nach seinen eigenen Angaben selbst 1867 gefunden hat, und eine rekursive Darstellung, die von einem gewissen Dickson (möglicherweise Arthur Lee Dixon (1867-1955)) stammte. Anschließend diskutierte der Vortragende die spezifischen Vor- und Nachteile der beiden Zugangsweisen. In seinem zweiten Beitrag untersuchte der Karlsruhe Mathematiker „Integrale, die sich rational durch π und $\lg 2$ ausdrücken" lassen. Damit sind solche bestimmten Integrale gemeint, deren Wert sich rational durch π und $\lg 2$ ausdrücken lässt. Die allgemeine Form dieser Integrale lautet einer Vermutung von E. Schröder gemäß:

$$J_{p,q}^{(r)} = \int_0^\infty \frac{x^r\,dx}{\sqrt[p]{e^x}\,\sqrt[q]{e^x-1}}$$

Dabei sind p und q ganze, r eine natürliche Zahl. Konvergenzbedingungen lassen sich leicht für diese Integrale angeben. Seine Vermutung bezüglich der rationalen

Darstellbarkeit konnte E. Schröder in einigen Fällen, zum Beispiel bei

$$J_{2,5}^{(2)} = \frac{\pi}{3}\left[5 - 42\log 2 + 30(\lg 2)^2 \frac{3}{2}\right]^3$$

bestätigen, ein allgemeines Resultat lag jedoch noch nicht vor. D. Hilbert machte in einer Anmerkung darauf aufmerksam, dass man die fraglichen Integralwerte durch mehrfaches Differenzieren eines Eulerschen Integrals auf die Ableitung der Gammafunktion zurückführen könne, eine Tatsache, die es möglich erscheinen lasse, ein allgemeines Bildungsgesetz zu finden. Unter einem anderen Aspekt traten die Bernoulli-Zahlen vermutlich in dem Vortrag von Georg Cantor auf, der „über gewissen Gesichtspunkte, welche sich für die arithmetische Untersuchung der Bernoulli'schen Zahlen aus der Theorie der endlichen Ordnungstypen ergeben" sprach. Lieder ist hierüber nicht mehr bekannt.

Auch für die Ausführungen von P. Gordan zu den von S. Lie und Andrew Russell Forsyth (1856-1942) eingeführten Differentialinvarianten und ihren Beziehungen zu den gewöhnlichen Invarianten ist nichts weiter bekannt.

F. Klein meldete sich in Bremen zu Wort: „Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe". Geklärt werden sollte die Frage: „Wie oft verschwindet die hypergeometrische Reihe

$$F(a, b, c, d) = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c}x + \frac{a \cdot a+1 \cdot b \cdot b+1}{1 \cdot 2 \cdot c \cdot c+1}x^2 + \dots$$

zwischen $x = 0$ und $x = 1$?" (TB, 4). Wenn E die größte ganze Zahl bezeichnet, die kleiner als

$$\frac{|a-b| - |1-c| - |c-a-b| + 1}{2}$$

ist, so gilt: Ist $1 - c$ kleiner/gleich null, so ist die gesuchte Anzahl von Nullstellen gleich E; ist aber $1 - c$ größer als null, so ist die Anzahl der Nullstellen gleich E, falls $F(a, b, c, d)$ für $x = 1$ verschwindet, sonst muss man zwischen E und $E + 1$ dergestalt entscheiden, dass F zwischen 0 und 1 eine gerade Anzahl von Nullstellen haben muss, falls F für $x = 1$ positiv ist, und eine ungerade Anzahl, falls F für $x = 1$ negativ ist.

Schließlich finden wir noch einen Vortrag aus dem Gebiet der Algebra: Hermann Minkowski trug einen „Beweis, dass jeder Discriminante eine von Eins verschiedene Zahl ist" vor. Dies folgt aus der Tatsache, dass die Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers eine Primzahl enthalten muss, eine Aussage, die der Vortragende im Rahmen seiner 'Geometrie der Zahlen' (vergleiche Dieudonné 1984, 300-303) bewiesen hat. Dann heißt es:

> „Die Versammlung beschliesst, den deutschen Mathematikern durch den Abtheilungsvorstand [Georg Cantor; K.V.] nachstehende Mittheilung zukommen zu lassen:
>
> Mittheilung.

Die in der mathematisch-astronomischen Abtheilung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte am 18. September 1890 in Bremen versammelten Herren beschliessen auf Grund der in Heidelberg gegebenen Anregung zur Herbeiführung einer engeren Vereinigung der deutschen Mathematiker, was folgt:

1. Es soll der Plan einer Vereinigung der deutschen Mathematiker im Anschluss an die Organisation der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte zur Verwirklichung gebracht werden.

2. Die mathematisch-astronomische Abtheilung der Gesellschaft soll dem entsprechend einen erweiterten Kreis ihrer Bethätigung erhalten, welcher die gesammten wissenschaftlichen Interessen der Mathematik umfasst. - Es sollen die Verhandlungen der Jahresversammlung wissenschaftlich in eingehender Weise als bisher vorbereitet und der Abtheilung bleibende Aufgaben zugewiesen werden.

3. Die Abtheilung beauftragt mit den hieraus sich ergebenden Aufgaben den nach §16 der Statuten der Gesellschaft alljährlich zu wählenden Abtheilungsvorstand (dessen Mitglieder der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte als Mitglieder angehören).

4. Dieser Auschluss soll alle Vollmacht haben, in einzelnen die im Vorstehenden ausgedrückten Absichten der Abtheilung in geeigneter Weise zur Ausführung zu bringen, und kann sich, wenn erforderlich, durch Cooptation verstärken.

5. Die Abtheilung spricht den Wunsch aus, dass der von ihr zu wählende Ausschuss mit dem Vorstande der Gesellschaft in eine geregelte geschäftliche Beziehung tritt. Es soll über die Form dieser Beziehung in der morgigen dritten Sitzung eine Verhandlung eingeleitet werden, etwa mit dem Vorschlag an die Gesellschaft, es möge der Vorstand derselben sich durch einen Centralausschuss ergänzen, bestehend aus je einem Deligirten jeder Abtheilung.

Der von der Abtheilung zu wählende Ausschuss hat den deutschen Fachgenossen durch einen Bericht von den gegenwärtigen Verhandlungen und Beschlüssen Kenntnis zu geben.

Im Auftrag der 1. Abteilung
die Schriftführer
Dr. H. Wellmann
Prof. Dr. E. Papperitz"
(TB, 13/14)

Diese Mitteilung ist gleichsam die Geburtsurkunde der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Die Mathematik innerhalb der Versammlung der DMV ist ausführlich untersucht worden (vergleiche Scharlau 1990), weshalb unser Streifzug durch die Geschichte der Sektion Mathematik an dieser Stelle abbrechen darf. Es folgen noch einige Hinweise zur personellen Struktur - insbesondere zum mehrfach angesprochenen 'harten Kern' der Sektion - sowie eine zusammenfassende, nach Sachgebieten gegliederte Analyse der Ergebnisse unserer Betrachtungen.

Anzumerken bleibt noch, dass die in der Sektion für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht zusammengefassten Pädagogen 1891 einen ähnlichen Schritt vollzogen wie die Mathematiker, was in der Gründung des Fördervereins für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht seinen Ausdruck fand (vergleiche Lorey 1938).

3 Zur personellen Struktur der Sektion

Welche der in den allgemeinen Teilnehmerlisten verzeichneten Personen die Sektion Mathematik besucht haben, lässt sich in Ermangelung von sektionsbezogenen Listen nicht immer genau feststellen. Es war wohl auch üblich, dass ein und dieselbe Person sich an mehreren Sektionen beteiligen konnte. In der Regel dürfte die Teilnehmerzahl in der Sektion Mathematik bei zwanzig gelegen haben.

Sucht man diejenigen Vortragenden heraus, die im Bereich der reinen Mathematik mit mehreren Vorträgen vertreten waren, die also eine Art von 'aktiven Kern' ausmachten, so stellt man bald fest, dass nach 1856 (also in dem Zeitraum, der oben als zweite und dritte Phase benannte wurde), einige Referenten immer wieder auftraten. Anders gesagt: Während in der ersten Phase die aktiven Teilnehmer wechselten, bildete sich danach (bezüglich der reinen Mathematik) ein 'harter Kern' heraus, der der Sektion eine gewissen Konstanz verlieh und als Kristallisationszentrum diente. Die folgenden Mitglieder der 'harten Kerns' stießen bereits in der zweiten Phase zur Sektion (in Klammern die Anzahl ihrer Beiträge sowie das Jahr ihres ersten und ihres letzten Beitrages):

> Moritz Cantor (6; 1857-1889), Benedikt Listing (6; 1865-1878), Karl Reuschle (5; 1856-1864), Oskar Schlömilch (8; 1856-1885), Heinrich Schröter (7; 1860-1880), Simon Spitzer (7; 1856-1880), Christian Wiener (6; 1863-1885).

An dieser Liste ist verschiedenes bemerkenswert: So fällt auf, dass ihre Mitglieder überwiegend zu den heute weniger bekannten Vertretern ihres Faches gehören; nur M. Cantor und H. Schröter sind beispielsweise mit einer Biographie im Dictionary of Scientific Biography vertreten, nach K. Reuschle und S. Spitzer sucht man sogar im Lexikon bekannter Mathematiker vergebens. Bemerkenswert ist ferner, dass wir zwei an polytechnischen Schulen tätige Mathematiker (O. Schlömilch, Chr. Wiener) finden sowie einen Gymnasiallehrer (K. Reuschle) und mit B. Listing einen Physiker und Mathematiker in Personalunion. Es deutet also manches noch auf einen verstärkten Anwendungsbezug hin.

Im Falle M. Cantor darf man davon ausgehen, dass die Sektion ihm ein willkommenes Forum für seine mathematikhistorischen Forschungen lieferte, über die zu berichten sonst wohl nicht allzu viel Gelegenheit bestand (M. Cantor war auch im Heidelberger Dozentenverein mit derartigen Vorträgen aktiv).

Das Bild änderte sich dann in der dritten Phase. Dort finden wir die folgenden Namen:

> Sigmund Günther (6; 1874-1887), Reinhold Hoppe (9; 1872-1883), Franz

Meyer (5; 1884-1890), Ernst Schröder (7; 1879-1890), Heinrich Weber (5; 1867-1890).

Unter den Genannten dürfte H. Weber wohl der bekannteste Mathematiker zu seiner Zeit gewesen sein. Auch E. Schröder und Fr. Meyer waren keine Unbekannten; allerdings dürfte sich Schröders Bekanntheit eher auf seine Beiträge zur Analysis bezogen haben (die heute vollkommen vergessen sind) denn auf seine Arbeiten zur Logik. S. Günther machte sich hauptsächlich seinen Namen als Historiker der Mathematik und des Mathematikunterrichts sowie als Lehrbuchautor. Die Genannten sind denn auch sämtlich mit einer Biographie im Dictionary vertreten.

Ganz anders ist die Situation bei dem Berliner Privatdozenten R. Hoppe, der vergeblich um eine feste Anstellung und Bezahlung und die damit verbundene Anerkennung kämpfte (vergleiche Biermann 1988, 86-88). In der Sektion scheint Hoppe jedoch respektiert gewesen zu sein; die Versammlung übertrug ihm sogar die ehrenvolle Aufgabe eines öffentlichen Vortrages (1872). Ein weiterer Außenseiter, der in der Sektion ausführlich zu Wort kam, war der Heidelberger Hermann Schapira, der seine Theorie (die ansonsten nur in Gestalt von Separatdrucken erschien) in drei Vorträgen vorstellte. Insgesamt wird man die Sektion als ein weitgehend offenes Gebilde bezeichnen müssen, in dem die ganz Großen der Disziplin jedenfalls keine dominante Rolle spielten. Die Kontinuität der Sektion wurde - mit Ausnahme von H. Weber vielleicht - von Mathematikern mittleren Bekanntheitsgrades garantiert. Dabei blieb die Sektion auch für Außenseiter und gänzlich Unbekannte zugänglich, weshalb man sie als ein wichtiges Forum der mathematischen 'Breitenforschung' charakterisieren kann. In ihr gewinnen wir also einen Einblick in den Alltag der mathematischen Forschung in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Bemerkenswert ist ferner, dass der Anteil der hauptamtlich Forschenden an den Sektionsbeiträgen zur reinen Mathematik in den 80er Jahren stark zunahm: Im Zuge einer 'Professionalisierung'[1], wurden allmählich die 'Amateure' zurückgedrängt.

Schließlich sei noch ein letzter Gesichtspunkt zur personellen Struktur der Sektion angeführt: Die 'Berliner Schule' (also K. Weierstraß, L. Kronecker, später L. Fuchs, G. Frobenius und H. A. Schwarz) war hier nur schwach vertreten, sieht man einmal von frühen Auftritten Weierstraß' ab und der Anwesenheit Kroneckers bei der Berliner Versammlung, wo er gewissermaßen 'Hausherr' gewesen ist. Stark hingegen war der Einfluss der Gruppe um die Mathematischen Annalen mit F. Klein, A. Clebsch, H. Weber, Fr. Meyer und anderen. Auffallend ist auch die Tatsache, dass viele aus der Heidelberger Schule hervorgegangenen Mathematiker in der Sektion aktiv waren (M. Cantor, H. Weber, E. Schröder, J.Lüroth, M. Noether).

[1] Der Begriff 'Professionalisierung' wird hier in einem recht weiten Sinn verwendet, der nicht den Anspruch erhebt, in allen Hinsichten mit demjenigen der modernen Wissenschaftssoziologie deckungsgleich zu sein. Vergleiche hierzu die Ausführungen von Jeremy Gray in Scholz 1990, 325-353.

4 Zusammenfassende Bemerkungen

Im Folgenden werden die Beiträge aus dem Bereich der reinen Mathematik im größeren sachlichen Zusammenhang, in den sie sich einordnen, betrachtet. Es wird versucht, die bemerkenswerten Tendenzen herauszuarbeiten und eine umfassende Bewertung der Wichtigkeit des Themas reine Mathematik für die Sektion zu geben. Dabei werden nur ausgewählte Beiträge berücksichtigt; ein vollständigeres Bild gibt der vorangehende zweite Teil.

4.1 Philosophie und Geschichte der Mathematik

Im Bereich Philosophie/Grundlagen der Mathematik, der mit insgesamt zehn Vorträgen vertreten war, dominierten zwei Themenkreise: das Verhältnis von Mathematik und Naturwissenschaften einerseits und die im Umkreis der nichteuklidischen Geometrie auftretenden erkenntnistheoretischen Probleme, insbesondere die Frage nach Art und Wesen der spezifisch mathematischen Erkenntnis, andererseits. In die erste Rubrik gehören die Beiträge Zech 1844, Petzval 1858, Hoppe 1882 und Worpitzky 1884, auf deren Inhalt und Einschätzung bereits an anderer Stelle eingegangen worden ist. Zum zweiten Themenkreis sind die Vorträge Hoppe 1872, Vogt 1874, Hoppe 1875, Hoppe 1876 und Schüler 1877 zu rechnen sowie einige im Abschnitt Geometrie und Topologie zu besprechende Beiträge. Bemerkenswerterweise setzen alle zu diesem Thema gehörigen Beiträge erst nach 1870 ein. Hieran wird deutlich, dass die Rezeption der nichteuklidischen Geometrie in breiteren Kreisen erst in diesem Zeitraum begann. Als Anstöße hierfür werden genannt (vergleiche Volkert 2013):

- die Veröffentlichung des Briefwechsels Gauß-Schumacher (1860-1866), welcher zeigte, dass der „Fürst der Mathematik" ernsthaft an die Möglichkeit einer nichteuklidischen Geometrie geglaubt hatte;
- die Entwicklung von Modellen für die nichteuklidische Geometrie durch Eugenio Beltrami (1835-1900; differentialgeometrische Richtung 1868) und F. Klein (projektive Richtung 1871), welche die anschauliche und die logische Gleichberechtigung (relative Konsistenz) der nichteuklidischen Geometrie zeigten. Dieser logische Aspekt spielte aber anfangs - hierauf hat Freudenthal aufmerksam gemacht (loc. cit.) - keine Rolle, weshalb anzunehmen ist, dass der erkenntnistheoretische Aspekt (siehe unten) dominierte;
- die erkenntnistheoretische Auswertung des Beltrami-Modells durch Hermann von Helmholtz (1821-1894) im Sinne einer empiristisch orientierten antikantischen Philosophie der Geometrie (1868, 1870).

Die Position von Helmholtz' wurde im Rahmen der Sektion vor allem von dem Berliner Privatdozenten Reinhold Hoppe vertreten, der auch hinsichtlich der Philosophie allgemein eine Orientierung an der Naturwissenschaft und Mathematik forderte (in seinem öffentlichen Vortrag 1872): „Mathematik und Naturwissenschaft sind die Paradigmata der Universalwissenschaft" (Hoppe 1872, 105). Der Ursprung der Geometrie und ihrer Axiome in der Erfahrung wird von R. Hoppe als Faktum vorausgesetzt; für ihn ist nur die Frage offen, wie sich deren Konstitution vollzieht, ein Thema, das auch Helmholtz und später Henri Poincaré beschäftigte (vergleiche Heinzmann 1989). Eine Gegenposition hierzu vertrat R. Vogt, der behauptete, dass das Faktum nichteuklidische Geometrie neutral sei gegenüber der Alternative Empirismus/Idealismus. Dies kommt der bekannten neuantikantischen These nahe (vertreten etwa von Otto Liebmann in Liebmann 1876), die nichteuklidische Geometrie erschüttere nicht die Kantische Behauptung vom synthetischen Apriori, weil sie bloß logisch, nicht aber anschaulich möglich sei. Diese Position geriet natürlich nach der Verbreitung der Modelle in größere Beweisnot, wurde aber dennoch aufrechterhalten.

Neben der Problematik der nichteuklidischen Geometrie im engeren Sinne (also der hyperbolischen Geometrie) spielte auch die Frage nach dem Status höherdimensionaler Räume eine wichtige Rolle, deren Einführung man ebenfalls zur 'antieuklidischen Revolution' rechnen kann. Direkt greifbar werden die Vorbehalte gegen die Räume in der Sektion lediglich in dem Titel von Oskar Schlömilch „Über die Unzulässigkeit der Geometrie in vier und mehr Dimensionen" (Straßburg, 1885); indirekt werden diese aber auch in den verschiedenen Rechtfertigungsversuchen deutlich, die diejenigen Redner vorbrachten, die über n-dimensionale Geometrie sprachen (siehe unten Abschnitt 4.2 Geometrie und Topologie). Interessante Parallelen ergeben sich an dieser Stelle zur Entwicklung in der 'British Association for the Advancement of Sciences', die ja bezüglich Zusammensetzung und Zielvorstellungen durchaus mit der Versammlung deutscher Ärzte und Naturforscher vergleichbar ist (vergleiche hierzu Richards 1988, Kapitel 2). Schließlich sei noch auf die Plückersche Liniengeometrie verwiesen, die von ihrem Schöpfer 1864 in der Sektion vorgestellt und dann nochmals von Paul Gordan 1867 zur Sprache gebracht wurde. Diese stellt auch eine Art von nichteuklidischer Geometrie dar, insofern sie es erlaubt, den gewöhnlichen Raum als vierdimensional zu betrachten, vorausgesetzt, man verwendet Geraden und nicht mehr Punkte als Grundelemente. Allerdings scheint dieser nichteuklidische Impetus der Plückerschen Ideen anfänglich nicht recht gewürdigt worden zu sein (auch in England nicht, wie man bei Richards 1988, 58 nachlesen kann); insbesondere hielt Plücker selbst an der Einzigkeit des dreidimensionalen Raums fest.

Insgesamt ist der Aufschwung, den der Themenkreis nichteuklidische und n-dimensionale Geometrie in der Sektion nahm, auffallend, was wiederum als Beleg dafür gelten darf, dass die eingangs formulierten Thesen zur Rezeptionsgeschichte dieser Gegenstände zutreffend sind.

Ein anderes wichtiges Grundlagenproblem, das viele Bereiche der Mathematik berührt, wurde 1883 von Otto Stolz angesprochen, als er auf die Rolle der Archimedischen Axioms (wir sprechen heute meist - historisch angemessener - vom Axiom von Archimedes-Eudoxos) hinwies und damit (und natürlich durch seine entsprechenden

Arbeiten in den mathematischen Annalen 1881 und 1883) das Interesse hieran wieder wachrief[1]. In der Geschichte der Analysis kommt diesem Axiom (das besagt, dass im Falle zweier Größen die kleinere immer so oft zu sich hinzugefügt werden kann, dass sie schließlich die größere übertrifft) eine Schlüsselstellung zu, insofern es die unendlichkleinen Größen (Infinitesimalien), die bis weit ins 19. Jahrhundert hinein in der Differential- und Integralrechnung in Gestalt der Differentiale gebräuchlich waren, ausschließt. Daneben spielt das fragliche Axiom aber auch in der Geometrie - gerade im Zusammenhang mit dem Parallelenaxiom - eine wichtige Rolle, die vor allem Max Dehn (1878-1952) im Anschluss an D. Hilbert untersuchte[2]. Insofern darf man den Beitrag von O. Stolz als einen wichtigen Moment in der Entwicklung der Grundlagendiskussion bezeichnen.

Beiträge der Geschichte der Mathematik finden wir in allen drei Phasen der Entwicklung der Sektion. In der ersten handelt es sich dabei fast ausschließlich um Berichte über den Stand der Kepler-Ausgabe von Frisch. Ab 1857 ist dann die Mathematikgeschichte in Person von Moritz Cantor präsent, der über verschiedene Gegenstände aus Antike und Renaissance insgesamt fünfmal vortrug.

Neben Cantor trat Siegmund Günther, dessen Beiträge sich von denen Cantors durch einen stärker mathematisch-technischen Charakter unterschieden. Bei S. Günther gehen oft (z.B. bei seinem Determinantenvortrag 1874) historische und systematische Interessen Hand in Hand, wobei er seine Themen hauptsächlich der neueren Mathematik entlehnte. Die Wertschätzung, die die Mathematikgeschichte innerhalb der Sektion fand, kommt nicht nur in der relativ hohen Anzahl von Vorträgen (20) zum Ausdruck, sondern auch in der Tatsache, dass man S. Günther gleich zweimal die Gelegenheit gab, dieses Gebiet in öffentlichen Sitzungen zu behandeln und für es zu werben (1875, 1877).

In diesen beiden Vorträgen formulierte Günther die Aufgaben und Ziele mathematikhistorischer Forschung, wobei er als deren Grundaufgabe - ganz im Sinne der Heidelberger Tradition von Alfred Arneth (1802-1858) und Moritz Cantor - postulierte, die Mathematikgeschichte in den Zusammenhang der Geistesgeschichte zu stellen und sie als „ein vorzügliches Mittel zur Erkenntnis des damals herrschenden geistigen Lebens" (Günther 1857, 121) einzusetzen. In bemerkenswerter Klarheit sprach der Vortragende die Ansicht aus, Wissenschaftsgeschichte sei ein Nachvollzug der bruchlosen Akkumulation von Wissen: „Unsere Aufgabe besteht in erster Linie darin, die allenthalben zu Tage tretende Continuität des Wissens darzulegen, zu zeigen, dass allüberall in dem weiten Gebiet ein stetiger Fortschritt von den ältesten Zeiten her dem geübten Auge kenntlich gemacht werden kann" (Günther 1875, 84). Der geistesgeschichtliche Ansatz, der schon paradigmatisch bei A. Arneth im Titel „Die Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Entwicklung des reinen Geistes" (1852) seines mathematikhistorischen Hauptwerkes zum Ausdruck kam, trat in unserem Jahrhundert, vor allem wohl unter dem Einfluss von Johannes Ehren-

[1] Unabhängig von O. Stolz ist Moritz Pasch etwa zur gleichen Zeit zu ähnlichen Einsichten gelangt; vergleiche dessen „Vorlesungen über neuere Geometrie" von 1882.

[2] Vergleiche hierzu Volkert 2015.

fried Hoffmann (1900-1983), zugunsten einer stärkeren Problemorientierung zurück. Die von S. Günther vertretene Ansicht, Wissenschaftsgeschichte sei in erster Linie kontinuierliche Akkumulation von Wahrheit, wurde zeitweise unter dem Eindruck der Thesen von Thomas Kuhn (1962) intensiv diskutiert.

Zusammenfassend darf man feststellen, dass sowohl die Philosophie als auch die Geschichte der Mathematik integrale Bestandteile der Sektion gewesen sind, die mehr oder minder konstant präsent waren. Der auffällige Rückgang der Themen aus diesem Bereich in der dritten Phase kann auch als Ausdruck der zunehmenden Professionalisierung der Sektion gesehen werden, insofern sich gerade Beiträge aus der Geschichte und der Philosophie der Mathematik für ein breiteres Publikum von Nichtspezialisten eignen.

4.2 Geometrie und Topologie

Anerkanntermaßen bildete die Geometrie eines der wichtigsten Arbeitsgebiete der Mathematiker des 19. Jahrhunderts. Hier gab es zum einen Entwicklungen mit weitreichenden Folgen für die Grundlagen der Mathematik und für die Erkenntnistheorie, wie die nichteuklidischen Geometrien, zum anderen eröffneten Ansätze wie die Differentialgeometrie, die mit C. F. Gaußens „Disquisitiones generales circa superficies curvas" (1827) zu einer selbstständigen Disziplin wurde, und die algebraische Geometrie, deren Fortschritte aufs engste mit denen der Algebra verknüpft waren, sowie die sich allmählich entfaltende kombinatorische Topologie, die vor allem durch das Werk von Bernhard Riemann wichtige Anregungen erfuhr, neue und reichhaltige Forschungsmöglichkeiten.

Auf diesem Hintergrund erstaunt es nicht, dass mehr als ein Drittel aller Beiträge zur reinen Mathematik, die in der Sektion gehalten wurden, zu dem Bereich Geometrie/Topologie gerechnet werden kann. Lediglich in der ersten Phase ist die Geometrie schwach vertreten (durch einen Beitrag zur Stereometrie und einen anwendungsbezogenen zur Geodäsie). In den nächsten beiden Phasen nimmt die Geometrie überproportional zu; sie wird zum wichtigsten Thema der Sektion überhaupt (13 beziehungsweise 44 Vorträge), wobei in der dritten Phase noch 13 Themen aus der Topologie hinzukamen.

Über die eher philosophischen Beiträge im Kontext der Geometrie wurde schon oben berichtet. Im Bereich der Geometrie selbst finden wir in diesem Zusammenhang vor allem Referate, die die Möglichkeiten und Verhältnisse einer n-dimensionalen Geometrie ($n \geq 4$) erforschen (Durège 1880, Hoppe 1883, Mayer 1884, Schlegel 1884, Hess 1986, Dyck 1889).

Knotentheoretische Probleme werden heute der Topologie zugerechnet. In der Sektion trat Oskar Simony ab 1886 als ein früher Vertreter dieser Disziplin auf, die sich ja ein gutes Stück weit ohne die modernen topologischen Methoden rein kombinatorisch entwickeln lässt. Der erste Mathematiker, der sich mit Knoten beschäftigte, ist J. B. Listing gewesen (1848), der hierzu von Gauß angeregt wurde, welcher sich für die elektrischen Verhältnisse in verschlungenen Leitern interessierte (in diesen

Zusammenhang gehören auch die Gaußschen Untersuchungen über Verschlingungszahlen). Vermutlich spielte auch das von William Thomson (1824-1907) aufgestellte Atommodell, das Atome als Knoten in einer Art von Äther auffasste („Wirbelatome"), eine Rolle beim Aufschwung, den die Knotentheorie in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts erfuhr. Einen gewissen Abschluss erreichte sie mit Peter Guthree Tait (1831-1901), dem es 1879 gelang, die alternierenden Knoten mit bis zu zehn Überkreuzungen zu klassifizieren (vergleiche Dehn-Heegard 1907, 207-215, sowie Epple 1999). Die Grundidee, Knoten gewisse Invarianten (im einfachsten Falle Zahlen) zuzuordnen, findet sich auch bei O. Simony 1886 und 1887. Der Eulersche Polyedersatz, einer der ältesten, heute zur Topologie gerechneten Sätze, wurde in der Sektion zweimal angesprochen: einmal von B. Listing 1867 im Zusammenhang seiner Censustheorie, und einmal von R. Hoppe mit elementarisiernder Tendenz (1878). Heute behandelt man diesen Satz in einem eher algebraischen Kontext, was erst durch die Algebraisierung der Topologie in den 20er und 30er Jahren des 19. Jahrhunderts möglich wurde (vergleiche Dieudonné 1989). Insofern dürfte den Versuchen Listings nur noch historisches Interesse zukommen. Bemerkenswert bei Listing wie bei Simony ist, dass diese Forscher die Topologie stets in einem engen Zusammenhang mit der Beschreibung der Natur sahen. Insofern kann man auch diese Mathematiker zur großen antieuklidischen Bewegung rechnen, galt doch die Geometrie Euklids zweitausend Jahre lang als das Mittel der Wahl zur Beschreibung der natürlichen räumlichen Verhältnisse.

Ähnliches wie das oben zu B. Listing Gesagte trifft auch auf Walter Dycks Beitrag von 1889 zu: Die Methoden, mit denen er seine Klassifikation zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten erzielte (und die er auf den höherdimensionalen Fall zu erweitern suchte) sind heute weitgehend überholt. Dennoch bilden seine Arbeiten einen Markstein in der Geschichte der Topologie, enthalten sind doch erstmals eine vollständige Einteilung der Flächen unter Einschluss des nichtorientierbaren Falles. Einen einigermaßen strengen Beweis für dieses Ergebnis erbrachten allerdings erst Max Dehn und Paul Heegard in ihrem Enzyklopädieartikel von 1907 (vgl. Volkert 2002).

Ein drittes wichtiges Thema aus dem Bereich der Topologie kam 1878 aus aktuellem Anlass zur Sprache: die Dimensionserhaltung. Während sich diese im zweidimensionalen Fall mit Mitteln der klassischen Analysis behandeln lässt (wie unter anderem Enno Jürgens in seinem Vortrag 1878 zeigte), erfordert der allgemeine Fall die Entwicklung neuer Methoden (Brouwer 1910), die schließlich in die moderne Dimensionstheorie mündeten. Auch David Hilberts geometrische Veranschaulichung der Peanoschen Kurve (bei der Versammlung 1890 in Bremen) steht mit der Frage der Dimensionserhaltung in Zusammenhang.

Zusammenfassend darf man feststellen, dass in den geschilderten Bereichen (n-dimensionale Geometrie, Topologie) einerseits einige wichtige, hauptsächlich in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts entwickelten Ansätze und Fragestellungen diskutiert wurden, dass dabei aber auch andererseits die methodischen Beschränkungen deutlich geworden sind, welche erst im Laufe des 20. Jahrhunderts überwunden werden konnten durch die mengentheoretische Topologie und die Algebraisierung der kombinatorischen Topologie.

Im 18. Jahrhundert pflegte man die Geometrie in die differentialgeometrische und die „neuere" Richtung einzuteilen. Letztere entstand aus der Verschmelzung der traditionellen projektiven Geometrie (in synthetischer Behandlung), wie sie Gaspard Monge und Jean Victor Poncelet geschaffen hatten, mit entsprechenden algebraischen Methoden durch Einführung geeigneter Koordinaten (zum Beispiel homogene Koordinaten). Als Schöpfer dieser neuen Geometrie gelten Michel Chasles in Frankreich und Julius Plücker in Deutschland. Wichtige Vertreter waren unter anderem Alfred Clebsch, der auch in der Naturforscherversammlung aktiv war, und Ludwig Otto Hesse.

Eine Vielzahl von Sektionsvorträgen beschäftigte sich mit dieser „neueren" Geometrie (wir würden heute wohl eher von algebraischer Geometrie (im klassischen Sinne) reden).

Die große Fülle von Ergebnissen lässt sich grob in drei Kategorien einordnen: Kurventheorie (sieben Vorträge), Flächentheorie (neun Vorträge) sowie sonstiges. Die Abgrenzung gegenüber der Funktionentheorie und der Algebra ist dabei gelegentlich problematisch, weil ja Methoden aus beiden Gebieten Einzug in die Geometrie hielten.

Die meisten Vorträge behandelten konkrete Fragestellungen - die sich natürlich für eine vortragsmäßige Behandlung in einem beschränkten Zeitraum besonders gut eignen (zum Beispiel Brill 1867 und Schröter 1897). Bemerkenswert ist auch Durège 1872, ein Beitrag, in dem der Verfasser das alte Newtonsche Vorhaben (aus dem bekannten Anhang zur „Opticks" 1704) einer Klassifikation der Kurven dritter Ordnung wieder angeht. Auch die im Bereich der Flächentheorie aufgegriffenen Fragen waren überwiegend handfest: Gestalt der Kummerschen und der Steinerschen Fläche sowie Eigenschaften der Fläche dritter Ordnung mit 27 Geraden. Oft wurden die theoretischen Ausführungen durch Vorführung von Modellen unterstützt und ergänzt.

Einen recht breiten Raum nahm auch die Differentialgeometrie in der Sektion ein (zehn Vorträge. Hier ging es zum einen um die (heute so genannten) Frenetschen Formeln, also um diejenigen Grundgleichungen, die das Verhalten einer Kurve im Raum beschreiben und deren Weiterentwicklung mit den Namen Paul Serret und Gaston Darboux verknüpft ist (Enneper 1865, Hoppe 1873 und Hoppe 1874), um die Krümmungstheorie von Flächen (mit elementarisierender Tendenz Gugler 1856, Zech 1858) und deren Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen (Mahler 1882) sowie um Extremalprobleme (geodätische Linien: Weierstraß 1861; Minimalflächen: Enneper 1861, Lie 1877). Die später von Alfred Enneper (1864) gefundene Minimalfläche spielt auch heute noch - ähnlich wie die Scherkschen von 1833 - eine wichtige Rolle als wegen seiner Einfachheit geschätztes Beispiel (Dieudonné 1984, 614).

Im Jahre 1867 trat Georg Zehfuß mit zwei Beiträgen zum Thema Riemannsche Flächen hervor, über die wir allerdings inhaltlich nichts erfahren. Der Beitrag Heinrich Webers aus dem gleichen Jahr behandelt eine differentialgeometrische Fragestellung, geht es ihm doch darum, ein Maß für die Verzerrung zu definieren, die die konforme Abbildung einer Fläche auf die Ebene bewirkt.

Insgesamt kann man feststellen, dass die Differentialgeometrie in der Sektion eine wichtige Rolle, in etwa der der neueren Geometrie vergleichbare Rolle spielte.

Allerdings kreisen die differentialgeometrischen Beiträge nur um einige wenige Themenbereiche, die große Vielfalt an Einzelergebnissen, die im Bereich der neueren Geometrie begegnet, fehlt hier.

Neben den Beiträgen, die in die genannten Großgebiete fallen, gab es noch eine Reihe von Vorträgen zu Themen der klassischen synthetischen Geometrie, unter anderem von Heinrich Schröter, der Fragen wie die Erweiterung des Involutionsbegriffes (1868) und die projektive Interpretation komplexer Zahlen (1876) behandelte (ersteres im Anschluss an Jacob Steiner, letzteres an Christian von Staudt). Die projektive Interpretation der komplexen Zahlen als metrikfreie Doppelverhältnisse gilt als der Ausgangspunkt für die Behandlung des Komplexen im Rahmen der Geometrie. Weiter finden wir Ausführungen zu den Grundformeln der sphärischen Geometrie (Hansen 1851, Stolz 1869), zur abzählenden Geometrie (Schubert 1876) sowie zu Fragen der Elementargeometrie und der Stereometrie (z.B. zu Sternpolyedern [Schröter 1874] und zu den Archimedischen Körpern [Hess 1872]). Auch hier wurden oft Modelle vorgestellt; ein Zeichen dafür, wie wichtig der konkret-anschauliche Bezug der Mathematik damals noch war.

4.3 Algebra

Die Beiträge, die in das Großgebiet Algebra fallen, lassen sich bis auf wenige Ausnahmen einem der folgenden drei Teilgebiete zuordnen: Gleichungslehre, lineare Algebra und Invariantentheorie. Über die algebraische Zahlentheorie wird im Abschnitt Zahlentheorie berichtet werden.

Die Gleichungslehre bildete bis gegen Ende des 19. Jahrhunderts das Kernstück der Algebra überhaupt[3]. Unter dem Einfluss der bahnbrechenden Arbeiten von Joseph Louis Lagrange, Évariste Galois und anderen entwickelte sich aus gleichungstheoretischen Betrachtungen Ansätze der Gruppentheorie (vergleiche Wussing 1969) und in Verbindung beider Betrachtungsweisen die Galois-Theorie. Letztere setzte sich erst nach und nach im allgemeinen Bewusstsein durch. So sah sich Franz Meyer noch 1885 genötigt, die Grundlagen dieser Theorie in seinem Vortrag darzulegen. Heinrich Weber, dem allgemein das Verdienst zuerkannt wird, im deutschsprachigen Raum die Galois-Theorie (1893) bekannt gemacht zu haben, ergriff in der Sektion nicht das Wort zu diesem Thema. Im Bereich der Gleichungslehre gab es neben dem bereits genannten Beitrag von F. Meyer Referate über Diskriminanten (auch abstrakt) und Resolventen von Gleichungen bzw. Zahlkörpern (Luther 1860, Hensel 1876, Minkowski 1890) sowie über die Auflösung bestimmter Gleichungstypen (etwa derjenigen vierten Grades: Unger 1851, Matthiesen 1868, Schumacher 1887). Paul Gordan stellte 1877 die auf Charles Hermite und Leopold Kronecker zurückgehende Idee, die Gleichung fünften Grades mit analytischen Mitteln (elliptische Funktionen) zu lösen, vor (vergleiche Klein 1970, 356f und Weber 1899, 14. Abschnitt).

Der Fundamentalsatz der Algebra taucht zweimal als Thema auf, nämlich 1845 bei Conrad Ullherr, der einen mehr oder weniger direkten traditionellen Beweis vortrug,

[3] Zur Geschichte der Algebra vergleiche man Scholz.

und 1879 bei Enno Jürgens, der vermutlich (es gibt zu diesem Vortrag keine weiteren Informationen) den Fundamentalsatz mit Hilfe des Satzes über die Invarianz des Gebietes bewies und damit dem heute noch geübten Brauch folgte, diesen Satz als Folgerung aus anderen tiefliegenden analytischen Sätzen (heute meist der Satz von Liouville) zu gewinnen. Hiermit tritt eine bemerkenswerte historische Umkehrung ein: Der Fundamentalsatz, der einst als Grundlage und Anfang der Gleichungslehre galt, wird zu einem Korrolar der Funktionentheorie.

Ein weiterer stark vertretener Teilbereich der Algebra (neun Vorträge) war die heute sogenannte lineare Algebra (damals sprach man von Formen und linearen Substitutionen). Neben einigen nur schlecht dokumentierten Beiträgen zur Determinante und ihren Verallgemeinerungen (Zehfuss 1867, Zehfuss 1869 und Lips 1879) behandelten die fraglichen Vorträge meist Probleme, die mit dem Transformationsverhalten von Formen (überwiegend quadratischen) und Invarianten unter denselben zusammenhingen. Bekanntlich spielten diese Fragen bei der Herausbildung der Matrizenrechnung und der Invariantentheorie (siehe unten) eine wichtige Rolle. Als Modell für ein anzustrebendes Ergebnis taucht (zum Beispiel bei Bachmann 1871 und Rosanes 1874) dasjenige von Ch. Hermite (1855) über die Transformation binärer und ternärer quadratischer Formen (das sind homogene Polynome vom Grade zwei in zwei beziehungsweise drei Variablen) in sich auf, welches den heute noch geläufigen Begriff der Hermitischen Matrix beinhaltete (vergleiche Dieudonné 1985, 101f). Der Beitrag von James Joseph Sylvester in Berlin 1886 beschäftigte sich direkt mit Matrizen und deren Unterdeterminanten. Solche Unterdeterminanten spielten damals in der gerade in Entwicklung befindlichen Theorie der Elementarteiler (Henry John Stanley Smith, 1861 - vergleiche Dieudonné 1985, 103) eine wichtige Rolle. Diese wurde von Henri Poincaré (1854-1912) gegen Ende des Jahrhunderts neu entdeckt und in überraschender Weise in der Topologie (Berechnung des Torsionskoeffizienten) angewendet.

Mehrere Beiträge beschäftigten sich mit algebraischen Funktionen und ihren Eigenschaften. Auf Weber 1882, in der die bahnbrechende Arbeit von Weber und Dedekind vorgestellt wurde, ist bereits ausführlich eingegangen worden. Ludwig Stickelberger sprach über eine Erweiterung des Bézoutschen Eliminationsverfahrens, welches es gestattet, die Schnittpunkte algebraischer Kurven zu bestimmten (1883), Franz Meyer behandelte die Zerlegung ganzer Funktionen in Faktoren (1886) und Eugen Netto ging auf den größten gemeinsamen Teiler ganzer Funktionen ein (1889). Die beiden letztgenannten Beiträge untersuchen also modern gesprochen die Struktur von Polynomringen, während der erste mit der simultanen Lösung von Gleichungen zu tun hat.

Die Algebra gewann im Berichtszeitraum als Thema der Sektion stark an Bedeutung: Während in der ersten Phase nur drei Beiträge der Algebra zugerechnet werden können (zwei der Gleichungslehre und einer der Anwendung) und auch in der zweiten Phase nur zwei Beiträge zur Gleichungslehre zu finden sind, steigt die entsprechende Anzahl nach 1865 auf 25, wobei die abstrakte Algebra deutlich überwiegt. Auf die Invariantentheorie, die ja eng mit der linearen Algebra verknüpft war, wird weiter unten eingegangen.

4.4 Analysis

Der Großbereich Analysis, zu dem im Folgenden auch die Funktionentheorie und die Theorie der Differentialgleichungen gerechnet werden (wobei es gerade bei der letzteren mannigfaltige Überschneidungen mit den Anwendungen der Mathematik, insbesondere in Physik und Astronomie, gibt), spielte in allen drei Phasen eine wichtige Rolle.

Eine Andeutung der in den Grundlagen der Analysis ab Beginn des 19. Jahrhunderts vorgehenden Veränderungen finden wir in der ersten Phase in den Beiträgen von Martin Ohm (1845) und von Oskar Schlömilch (1851). Der erstere vertrat den Standpunkt der kombinatorischen Schule, insbesondere verteidigte er einen formalen Umgang mit (eventuell divergierenden) Reihen, während Schlömilch den Cauchyschen Standpunkt (nur konvergente Reihen haben überhaupt einen Sinn) einnahm. Anders als bei der Geometrie, wo Grundlagenfragen nach 1870 in der Sektion eine wichtige Rolle spielten, blieb dieser Aspekt in der Analysis - mit den beiden genannten Ausnahmen - unberücksichtigt. Eine mögliche, wenn auch recht spekulative Erklärung hierfür wäre, dass in Deutschland mit Verschwinden der kombinatorischen Schule (deren letzte bedeutendere Vertreter wohl Martin Ohm [bis 1872] und Franz Ferdinand Schweins [bis 1856] gewesen sein dürften) auch die Opposition gegen die angestrebten Veränderungen in den Grundlagen der Analysis beseitigt war.

Die Reihenlehre, das Kernstück der neuen Analysis, wurde nochmals 1872 von O. Schlömilch sowie 1889 von Alfred Pringsheim angesprochen sowie unter einem sehr speziellen Aspekt von Felix Klein 1890. Einen überraschend modernen Gedanken, nämlich ausgehend vom gewöhnlichen Differenzieren eine allgemeine Theorie des mathematischen Operierens zu entwickeln, welche ihrerseits wiederum eine Interpretation der Liouvilleschen Ableitungen gebrochener Ordnung erlaubt, findet sich bei Anton Karl Grünwald 1868 (ähnliche Ideen verfolgte übrigens etwa zur gleichen Zeit Ernst Schröder; vergleiche Lüroth 1903, VI). In eine verwandte allerdings sehr algebraisch orientierte Richtung ging E. Schröder später dann mit seiner „allgemeinen Theorie der Verknüpfungen", welche schon auf dem Hintergrund seiner „Algebra der Logik" zu sehen ist.

Einen breiten Raum nahm das Thema Differentialgleichungen ein (neun Vorträge), während die Funktionalgleichungen nur mit einem Beitrag (Schröder 1886) berücksichtigt wurden. Bei den ersteren überwog das Studium spezieller Gleichungen oder Gleichungstypen und ihrer Lösungsmethoden, während allgemeinere Gesichtspunkte (im Sinne abstrakter Eixstenz- oder Eindeutigkeitssätze) fehlten.

Von etwa gleichgroßer Bedeutung wie die anwendungsbezogenen Differentialgleichungen war in der Sektion ein Gebiet, das zu jener Zeit als eines der abstraktesten überhaupt galt, nämlich die Theorie der höheren Transzendenten (wie man sich ausdrückte). Stichworte hierzu lauten: elliptische Funktionen, komplexe Multiplikation, Modulargleichung, Thetafunktionen usw. Hierzu finden wir immerhin zehn Beiträge, unter anderem von F. Klein (1877), Ludwig Kiepert (1881, 1883) und H. Weber (1885). Beim letztgenannten, der 1891 in seinen „Akademischen Vorlesungen..." (Weber 1908) aufbauend auf eigenen Vorarbeiten das Problem der komplexen Multiplikation zu einem gewissen Abschluss brachte, wird schon im Vortragstitel der Bezug von komplexer Multiplikation und Zahlentheorie formuliert. Es ist nicht erstaunlich, dass dieses Problem, das für mehrere Teilgebiete der reinen Mathematik wichtig ist (Zahlentheorie, Algebra, Funktionentheorie), so große Beachtung fand.

Aufgrund der Anzahl der Beiträge muss man den Bereich 'höhere Transzendenten' wohl als einen der wichtigsten in der Sektion überhaupt einstufen. Wie schnell das Interesse hieran erlosch, zeigt das folgende Zitat von F. Klein aus der Zeit des Ersten Weltkrieges: „Als ich studierte, galten die Abelschen Funktionen - in Nachwirkung der Jacobischen Tradition - als der unbestrittene Gipfel der Mathematik, und jeder von uns hatte den selbstverständlichen Ehrgeiz, hier weiterzukommen. Und jetzt? Die junge Generation kennt die Abelschen Funktionen kaum mehr" (Klein 1970, 312). Klein nennt für derartige Phänomene zwei Gründe:

1. Es treten in der Wissenschaft neue Fragestellungen auf, die die jungen Forscher von den alten ablenken.

2. Die alten Fragen erfordern, weil entsprechend gut ausgearbeitet, ein breites Studium und ein hohes technisches Niveau.

Der erste übrigens, der den fraglichen Themenkreis in der Sektion ansprach, war Heinrich Schröter (1860) - also ein Mathematiker aus der Jacobi-Schule (der auch deren Verdienste betonte). Alle anderen Beiträge fallen dann in den Zeitraum nach 1877.

In den Bereich der Analysis gehören schließlich noch eine Reihe von Vorträgen, die spezielle Themen (z.B. die Kugelfunktionen oder die Gammafunktionen) behandelten (Pochhammer 1873, Spitzer 1876).

4.5 Invariantentheorie

Ähnliches, wie das, was F. Klein zum Thema Abelsche Funktionen gesagt hat, ließe sich auch zur Invariantentheorie sagen, einer Theorie, die in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts aufblühte, um nach den Hilbertschen Arbeiten 1890-1893 weitgehend wieder zu verschwinden (vergleiche hierzu Fisher 1967). Einige der wichtigsten Protagonisten dieses Forschungsprogrammes (S. Aronhold, A. Clebsch, P. Gordan) waren mehr oder minder aktive Teilnehmer der Sektion.

Die Invariantentheorie hatte hauptsächlich zwei Wurzeln und damit auch zwei Ausrichtungen. Die eine lag in dem Bereich, den wir heute lineare Algebra nennen. Dabei ging es darum, Eigenschaften von Formen (homogenen Polynomen) zu finden, die sich bei Transformationen vermöge Matrizen nicht (oder nur in bestimmter) Weise ändern, woraus sich die Bezeichnung 'Invariante' erklärt. Diese algebraische Richtung begegnet im Vortrag von Alfred Clebsch (1867), dem es um die Darstellung binärer Formen von ungeraden Grade durch ein vollständiges Invariantensystem ging. Eine andere Richtung, die Methoden der Analysis verwendete und sogenannte Differentialinvarianten studierte, nahm ihren Ausgang von Variablentransformation in elliptischen Integralen. In Gordan 1890 werden Sophus Lie und Andrew Russell

Forsyth als Wegbereiter dieser Richtung genannt, die in der Sektion neben dem bereits genannten Beitrag von P. Gordan noch durch Aronhold 1860, Kiepert 1886 und Papperitz 1887 vertreten war.

4.6 Zahlentheorie

Eine ähnliche Zwischenstellung zwischen Analysis und Algebra wie die Invariantentheorie nimmt auch die Zahlentheorie ein, die zu den kontinuierlichsten Themen der Sektion gehörte. Frühe Beiträge hierzu waren Scherk 1846, Scherk 1846a sowie Reuschle 1856; spätere Referate bezogen sich meist auf die analytische Zahlentheorie, insbesondere auf die Bernoulli-Zahlen (Lipschitz 1883, Cantor 1890, Schröder 1890). In Rudolf Lipschitz' Beitrag „Über einige arithmetische Sätze" (1886) klingt ein wichtiges Ereignis jener Zeit an, nämlich der Nachweis der Transzendenz von e (Charles Hermite 1873) und von π (Ferdinand Lindemann 1882) und damit der Unlösbarkeit der Quadratur des Kreises (im Sinne einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal) im Rahmen der Euklidischen Geometrie.

4.7 Logik und Mengenlehre

Ein letzter Bereich, zu dem einige Vorträge vorliegen, lässt sich mit (mathematischer) Logik und Mengenlehre beschreiben. Die Tatsache, dass diese damals noch jungen Gebiete überhaupt in der Sektion in Erscheinung traten, ist natürlich dem Engagement von E. Schröder - als Protagonisten der Logik - und von Georg Cantor - einer der Schöpfer der Mengenlehre - zu verdanken. Auffallend ist, dass sich G. Cantor nur einmal (1883) zur Mengenlehre - genauer gesagt: zur transfiniten Arithmetik - äußerte. Sein Beitrag 1890, also auf der Versammlung, die ihn zum Vorsitzenden der neu zu erschaffenden Deutschen Mathematikervereinigung bestimmte, behandelte er die völlig unkontroversen Bernoulli-Zahlen. E. Schröder widmete sich kombinatorisch-logischen Problemen, wobei bemerkenswert ist, dass er in großem Umfang englischsprachige Autoren zitierte. Hieran wird zweierlei deutlich: Erstens, dass Schröder eine wichtige Rolle als Mittler zwischen dem angelsächsischen Raum und Deutschland spielte (das wird auch an den Literaturverzeichnissen der beider ersten Bände der „Algebra der Logik" klar, wo man weiterhin erkennt, dass Schröder in Deutschland - mit Ausnahme von Gottlob Frege - keinerlei Anknüpfungspunkte hatte), und zweitens, dass E. Schröder mit seinen Forschungen in seiner Heimat weitgehend alleine dastand (vergleiche Lüroth 1903).

4.8 Mathematischer Unterricht

Zum Abschluss sei noch auf einige Vorträge zum Thema Mathematikunterricht verwiesen, die in der Sektion für naturwissenschaftlichen Unterricht gehalten wurde. Zwei Themen fallen hier auf: Zum einen die Spannung zwischen wissenschaftlicher Strenge und für das Schülerverständnis notwendiger Elementarisierung, die von

Feyerabend 1880 angesprochen wurde, und zum anderen die Auseinandersetzung zwischen gruppentheoretischer und axiomatischer Auffassung im Geometrieunterricht (Abbildungsgeometrie versus Euklidische Geometrie) bei Scholz 1886 und Diekmann 1888. Es ist wohl nicht übertrieben, zu sagen, dass beide Themen auch noch heute eien wichtige Rolle in der fachdidaktischen Diskussion spielen.

4.9 Übersicht zur Entwicklung der einzelnen Disziplinen

Betrachtet man die Entwicklung der genannten Teilgebiete der reinen Mathematik (Algebra, Analysis, Geometrie, Geschichte/Philosophie und Zahlentheorie) relativ zueinander, so ergibt sich das folgende Bild:

	1. Phase	2. Phase	3. Phase
Algebra	18,75%	4% (11%)	15,5% (9,5%)
Analysis	25%	12% (23,6%)	26,7% (30,5%)
Geometrie	18,75%	40% (37,1%)	37,3% (37%)
Geschichte/ Philosophie	18,75%	32% (10,7%)	12,4% (15%)
Zahlentheorie	18,75%	12% (6,7%)	3,1% (5,1%)
Sonstiges	-	-	5%
absolute Anzahl der Vorträge	16	25	161

(Bei dieser Auswertung wurden die Beiträge zu den Bereichen Logik und Mengenlehre unter Sonstiges berücksichtigt; die Beiträge zur Invariantentheorie wurden gemäß ihrem jeweiligen Standpunkt der Algebra (ein Vortrag) beziehungsweise der Analysis (vier) zugeordnet.)

Es liegt auf der Hand, dass die für die erste Phase ermittelten Anteile aufgrund der geringen Gesamtanzahl an Vorträgen und der damit verbundenen großen Anfälligkeit für Sondereinflüsse nur sehr bedingt herangezogen werden können (so ist beispielsweise die Zahlentheorie stark vertreten, weil Heinrich Friedrich Scherk 1846 in Kiel - gewissermaßen als Hausherr - gleich zwei Vorträge zu dieser Disziplin hielt).

Deshalb will ich mich auf die beiden letzten Phasen beschränken. Hier zeigen sich mehrere Tendenzen:

1. Die Geometrie war in beiden Phasen das beherrschende Thema; ihr Anteil blieb fast unverändert.

2. Wesentlich hinzu gewonnen haben die Algebra und die Analysis (erstere vervierfacht in etwa ihren Anteil, während die zweite den ihren verdoppelt).

3. Die Gebiete Geschichte/Philosophie der Mathematik sowie Zahlentheorie verlieren beide erheblich an Bedeutung.

Aufschlussreich ist ein Vergleich mit den von Walter Purkert ermittelten Anteilen der genannten Gebiete für die Jahre 1869/70 und 1890 an den Referaten im „Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik", das man als einen halbwegs repräsentativen Spiegel[4] der damaligen mathematischen Produktion ansehen kann. Die Zahlen von W. Purkert sind in der obigen Tabelle eingeklammert wiedergegeben. Man bemerkt:

1. Die Anteile der Geometrie in der Sektion und im Jahrbuch stimmen ziemlich genau überein.

2. Sowohl im Jahrbuch als auch in der Sektion wächst die Analysis stark an, wobei der Zuwachs in der Sektion wesentlich deutlicher ausfällt.

3. Während die Algebra in der Sektion ihren Anteil vervierfacht, nimmt sie im Jahrbuch leicht ab. Die Anteile in der dritten Phase und von 1890 differieren hier beträchtlich.

4. Geschichte/Philosophie nimmt im Jahrbuch um 50% zu, während in der Sektion eine deutlich gegenteilige Entwicklung zu verzeichnen ist. Hier differieren die Zahlen der zweiten Phase von den Zahlen 1869/70 erheblich.

5. Die Bedeutung der Zahlentheorie nimmt sowohl im Jahrbuch als auch in der Sektion ab, wobei die Abnahme in der Sektion stärker ausfällt.

Auf einen knappen Nenner gebracht kann man somit sagen: Die Algebra war, gemessen am Jahrbuch als Spiegel für die allgemeine mathematische Produktion, in der Sektion deutlich überrepräsentiert, während Geschichte/Philosophie der Mathematik eher unterbewertet war. Bedenkt man, dass die Algebra - insbesondere die in der dritten Phase in der Sektion sich ansatzweise entfaltende abstrakte Algebra - damals zu den neuen, forschungsdynamischen und nur wenigen Mathematikern zugänglichen Gebieten zählte, so liegt der Schluss nahe, dass in der Sektion im Vergleich zur Allgemeinproduktion ein höheres und anspruchsvolleres Niveau erreicht wurde.

Die Geometrie bewahrte in der dritten Phase ihre eindeutige Vormachtstellung, dies zum Teil deshalb, weil ihr in Gestalt der Topologie ein neues produktives Teilgebiet erwuchs. Die Analysis schloss zur Geometrie auf, im Wesentlichen durch die Zunahme in den Bereichen höhere Transzendenten und Differentialinvarianten. Der Zuwachs bei der Algebra geschah sowohl im Gebiet der Gleichungslehre, wo neben die

[4]Bei diesem Vergleich muss allerdings berücksichtigt werden, dass das Jahrbuch nicht nur deutsche sondern auch ausländische Publikationen in Betracht zog. Somit drücken die auf das Jahrbuch bezogenen Angaben eher einen internationalen Trend aus. Ein weiterer Unterschied zwischen Jahrbuch und Sektion liegt darin, dass ersteres gedruckte und damit meist einer gewissen Qualitätskontrolle unterliegende Arbeiten berücksichtige, während letztere mehr oder minder jedermann die Gelegenheit zu Vorträgen bot. Allerdings scheinen die Hürden, die eine Arbeit bis zum Druck zu überwinden hatte, im letzten Jahrhundert in der Regel nicht allzu hoch gewesen zu sein, weshalb der genannte Unterschied wohl als nicht allzu gravierend anzusehen ist.

Interessant ist darüber hinaus ein Vergleich mit der Entwicklung in Frankreich, die seinerzeit durch einige Sonderbedingungen eher aus dem internationalen Rahmen herausfiel. Hierzu vergleiche man Gispert 1991.

traditionellen Fragen die abstrakte Glaois-Theorie trat, als auch in der linearen Algebra und in der Gruppen-/Körpertheorie. Alle genannten Entwicklungen fanden allerdings in der Grundlagendebatte, soweit sie in der Sektion ausgetragen wurde, keine Resonanz. Hier kamen nur die Entwicklungen aus dem Bereich Geometrie/Topologie zur Sprache. Die grundlagentheoretische Reflexion auf die Ergebnisse in der Analysis und in der Algebra blieb weitgehend dem 20. Jahrhundert vorbehalten. In der dritten Phase, in der immerhin drei Viertel aller rein mathematischen Vorträge gehalten wurden, gestaltete sich das Angebot an Beiträgen auch in dem Sinne vielfältiger, dass hier erstmals Referate mit einem Inhalt gehalten wurden, der sich kaum den klassischen Gebieten zuordnen lässt.

Insgesamt bemerkt man, dass die Sektion einerseits einen recht treuen Eindruck von der Entwicklung der reinen Mathematik in der zweiten Hälfte des vorangegangenen Jahrhunderts vermittelt, dass sie aber in einigen charakteristischen Punkten doch von der allgemeinen Linie in Richtung auf fortgeschrittenere und speziellere Fragestellungen abweicht. Hierzu passt auch gut die Tatsache, dass in der dritten Phase die eher allgemeinverständlichen Vortragsthemen aus den Bereichen Philosophie/Geschichte der Mathematik im Vergleich zum Jahrbuch stark unterrepräsentiert sind. Rückblickend erscheint es darum nur konsequent, wenn sich die Mathematiker in Gestalt der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ihr eigenes Forum schufen, in dessen Rahmen weniger Rücksichten auf ein breites 'nicht-professionelles' Publikum genommen werden musste. Dies war lediglich der Schlussstrich unter eine Entwicklung, die sich in der Sektion über Jahrzehnte hinweg vollzogen hatte.

4.10 Übersicht zur Zuordnung der einzelnen Vorträge zu größeren Sachgebieten

Vorbemerkung: Die Zuordnung eines Vortrages zu einem Sachgebiet ist nicht immer eindeutig möglich: Soll man P. Gordans Ausführungen zu Auflösung von Gleichungen fünften Grades mit analytischen Mitteln zur Algebra oder zur Analysis rechnen? Wohin gehört D. Hilberts flächenfüllende Kurven? In solchen Fällen wurde die Festlegung nach dem Schwerpunkt des fraglichen Beitrages gelegt, weshalb Hilberts Beitrag der Geometrie und Gordans der Algebra zugerechnet wurde. Es steht außer Frage, dass man hier viele Einwände erheben kann, weshalb die nachstehende Liste nur als Anhaltspunkt genommen werden sollte. Die vorangestellte Zahl gibt die Phase an, der der Beitrag zuzuordnen ist.

Philosophie und Geschichte der Mathematik

2	Argelander	1857
3	Brill	1877
2	Cantor	1857
2	Cantor	1858
2	Cantor	1864
3	Cantor	1879
3	Cantor	1889
1	Drechsler	1851
1	Frisch	1845
2	Frisch	1858
3	Frisch	1861
3	Günther	1874
3	Günther	1874a
3	Günther	1875
3	Günther	1877
3	Günther	1877a
3	Günther	1887
3	Hoppe	1872
3	Hoppe	1875
3	Hoppe	1876
3	Mahler	1882
2	Petzval	1858
2	Reuschle	1856
3	Schüler	1877
3	Spitzer	1878
3	Stolz	1883
3	Vogt	1874
3	Weissenborn	1882
2	Wittenstein	1865
3	Worpitzky	1884
1	Zech	1844

Geometrie und Topologie

3	Brill	1867
3	Burmester	1874
2	Clebsch	1864
3	Clebsch	1867
3	Cremona	1877
3	Durège	1872
3	Durège	1880
3	Dyck	1889
2	Enneper	1861
2	Enneper	1865
2	Escher	1858
3	Gordan	1867
3	Gordan	1867a
3	Gordan	1867b
2	Gugler	1856
1	Hansen	1851
3	Hauck	1885
3	Hess	1872
3	Hess	1878
3	Hilbert	1890
3	Hoppe	1873
3	Hoppe	1874
3	Hoppe	1878
3	Hoppe	1880
3	Hoppe	1883
3	Jürgens	1878
3	Klein	1877
3	Lie	1877
3	Lie	1886
3	Listing	1867
3	Listing	1878
3	Listing	1878a
3	Listing	1878b
3	Lüroth	1878
3	Mahler	1882
3	Meyer	1884
3	Meyer	1890
3	Noether	1889
2	Plücker	1864
3	Reitlinger	1875
3	Reye	1873
3	Schlegel	1884
2	Schlömilch	1862
3	Schlömilch	1867
3	Schlömilch	1872b
3	Schlömilch	1885
3	Schoenflies	1889
1	Schnürlein	1845
3	Schröter	1868
3	Schröter	1874
3	Schröter	1874a
3	Schröter	1876
3	Schröter	1879
3	Schröter	1879a
3	Schröter	1879b
3	Schubert	1876
2	Schütz	1867
3	Simony	1886
3	Simony	1887
3	Simony	1887a
3	Stolz	1869
3	Study	1890
3	Weber	1867
2	Weierstraß	1861
3	Wiener	1867
3	Wiener	1868
3	Wiener	1879
3	Wiener	1883
3	Wiener	1885
1	Winkler von Brückenbrand	1843
2	Zech	1858
3	Zehfuss	1867a
3	Zehfuss	1867b

Algebra

3	Bachmann	1871
1	Beskiba	1843
3	Hess	1886
3	Gordan	1877
3	Gräfe	1879
3	Günther	1875
3	Hensel	1886
3	Jürgens	1879
3	Kaiser	1887
3	Lips	1879
2	Luther	1860
3	Matthiesen	1868
3	Meyer	1885
3	Meyer	1886
3	Minkowski	1890
2	Netto	1890
3	Rosanes	1874
3	Rudio	1887
3	Schröder	1879
3	Schumacher	1887
3	Schumacher	1887a
3	Schütz	1867
3	Stickelberger	1883
3	Sylvester	1886
1	Ullherr	1845
1	Unger	1851
3	Weber	1882
3	Zehfuss	1867
3	Zehfuss	1869

Analysis und Funktionentheorie

3	August	1886
3	Braunmühl	1885
3	Burkhardt	1886
3	Enneper	1875
3	Franz	1880
3	Gruenewald	1868
3	Günther	1881
1	Huther	1849
3	Kiepert	1881
3	Kiepert	1883
3	Klein	1877
3	Klein	1890
3	Königsberger	1885
3	Königsberger	1889
3	Kronecker	1886
3	Krause	1889
3	Lindemann	1877
3	Meyer	1885
3	Minding	1871
1	Ohm	1845
3	Pochhammer	1872
3	Pringsheim	1889
3	Recht	1869
3	Reuschle	1889
3	Runge	1886
3	Schapira	1879
3	Schapira	1881
3	Schapira	1882
3	Schapira	1884
1	Schlömilch	1851
3	Schlömilch	1872
3	Schlömilch	1872a
3	Schröder	1886
3	Schröder	1890
2	Schröter	1860
3	Spitzer	1875
3	Spitzer	1876
3	Spitzer	1877
3	Stickelberger	1883
3	Thome	1873
3	Weber	1867
3	Weber	1885
1	Weiler	1851
2	Winkler	1856
3	Zmurko	1875
3	Zmurko	1881

Zahlentheorie

3	Cantor	1890
3	Lipschitz	1883
3	Lipschitz	1886
3	Matthiesen	1868
2	Prinz	1856
2	Reuschle	1856
2	Reuschle	1864
1	Scherk	1846
1	Scherk	1846a
3	Schröder	1890
1	Stern	1854

Invariantentheorie

2	Arnhold	1860
3	Clebsch	1867a
3	Gordan	1890
3	Kiepert	1886
3	Papperitz	1887

Literaturverzeichnis

Ampère, André Marie (1836). "Sur une résolution de l'équation du quatrieme degré". In: *Correspondance mathématique et physique par Quetelet*, 9 (1847) (deutsche Übersetzung in: *Archiv der Mathematik und Physik*, 1(16) (1841)).

Bekemeyer, Bernd (1987). *Martin Ohm (1792 - 1872): Universitäits- und Schulmathematik in der neuhumanistischen Bildungsreform.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Biermann, Kurt Raimund (1988). *Die Berliner Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810 - 1933.* Berlin [DDR]: Akademie-Verlag.

Braunmühl, Anton von (1903). *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie: Band 2.* Leipzig: Teubner.

Bottazini, Umberto (1986). *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass.* New York u.a.: Springer.

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan (1976). *Collected Works: Band 2.* Hans Freudenthal (Hrsg.). Amsterdam u.a.: North Holland.

Brückner, Max (1900). *Vielecke und Vielflache.* Leipzig: Teubner.

Cantor, Moritz (1901). "Nachruf auf Oskar Schlömilch". In: *Bibliotheca mathematica* 3. Folge 2, 260-281.

Cauchy, Augustin Louis (1823). "Résumée des lé\c{c}ons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal" In: A. L. Cauchy (Hrsg.), *Oeuvres completes 2^{e} série* 4, 5-262.

Chabert, Jean-Luc (1990). "Un demi-siecle de fractales: 1870 - 1920". In: *Historia Mathematica* 17, 339-363.

Chandler, Bruce & Magnus, Wilhelm (1982). *The history of combinatorical group theory: A case study in the history of ideas.* New York - Heidelberg - Berlin: Springer.

Connes, Alain (1992). "Sur le nature de la réalité mathématique". In: *Elemente der*

Mathematik 47, 19-26.

Dauben, Joseph W. (1975). "The Invarinace of Dimension: Problems in the early Development of Set Theory and Topology". In: *Historia Mathematica* 2, 273-288.

Dehn, Max & Heegard, Paul (1907). "Analysis situs". In: *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Dritter Band: Geometrie.* Redigiert von W. F. Meyer und M. Mohnnann. Erster Teil. Erste Hälfte. (Leipzig, 1907 - 1910), 153 - 220.

Dieudonné, Jean (1974). *Cours de géométrie algébrique. Band 1: Aperçu historique sur le développement de la géométrie algébrique.* Paris: PUF.

Dieudonné, Jean (Hrsg.) (1984). *Geschichte der Mathematik. 1700 - 1900.* Braunschweig - Wiesbaden: Vieweg.

Dieudonné, Jean (1989). *A History of Algebraic and Differential Topology 1900 - 1960.* Boston - Basel: Springer.

Du Bois - Reymond, Paul (1877). "Ueber die Paradoxien des Infinitärcalcüls". In: *Mathematische Annalen* 11, 149-167.

Dubucs, Jean-Paul (1988). "L. E. J. Brouwer: topologie et constructivisme". In: *Revue d'histoire des sciences* 41, 133 - 155.

Eisenlohr, August (1877). *Ein mathematisches Handbuch der Alten Agypter (Papyrus Rhind des British Museum) iibersetzt und erklärt.* Leipzig: Teubner.

Enneper, A. (1864). "Analytisch-geometrische Untersuchungen". In: *Zeitschrift fiir Mathematik und Physik* 2, 96-125.

Epple, Moritz (1999). Die Entstehung der Knotentheorie. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Erdmann, Benno (1877). *Die Axiome der Geometrie.* Leipzig: Voss.

Eytelwein, Johann August (1824). *Grundlehren der höheren Analysis.* 2 Bände. Berlin: Reimer.

Federico, Pasquale Joseph (1982). *Descartes on Polyhedra.* New York/Heidelberg/Berlin: Springer.

Fisher, C. S. (1967). "The last invariant theorists". In: *Archives européennes de sociologie* 8, 216-244.

Frei, Günter (1989). “Heinrich Weber and the emergence of class field theory”. In: David Rowe & John McCleary (Hrsg.): *The history of modern mathematics. Band 1: Ideas and their Reception*, 425-450. San Diego: Academic Press.

Freudenthal, Hans (1961). “Im Umkreis des sogenannten Raumproblems”. In: Yoshua Bar-Hillel et al. (Hrsg.): *Foundations of Mathematics*, 322-327. Amersterdam: North Holland.

Freudenthal, Hans (1961a). “Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jahrhunderts”. In: *Mathematisch-physikalische Semesterberichte* 7, 2-25.

Friedelmeyer, Jean-Pierre & Fuchs, Aimé (1989). “L'activité mathématique à Strasbourg et en Alsace de 1538 à nos jours”. In: *Les sciences en Alsaces*, 33-47. Strasbourg: Oberlin.

Friedelmeyer, Jean-Pierre & Volkert, Klaus (1992). “Quelle réalité pour les imaginaires?” In: *Le livre du problème* (im Druck).

Geyer, Wulf-Dieter (1981). “Die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen bei Dedekind und Weber”. In: Winfried Scharlan (Hrsg.): *Richard Dedekind 1831 - 1931.* Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Gispert, Helene (1991). “La France mathématique: La Société mathématique de France (1872 - 1914)”. In: *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences* 34, 7-180.

Hankel, Hermann (1867). *Theorie der complexen Zahlensysteme.* Leipzig: Teubner.

Hardy, Godfrey Harold (1910). *Orders of Infinity: The 'infinitärcalcül' of Paul du Bois-Reymond.* Cambridge: Cambridge University Press.

Heinzmann, Gerhard (1989). *Zwischen Objektkonstruktion und Strukturanalyse: Überlegungen zur Philosophie der Mathematik von Jules Henri Poincaré und Charles Sanders Peirce.* Habilitationsschrift Saarbrücken.

Helmholtz, Hermann (1868). “Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen”. In: *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen*, 193-222. Auch in: H. von Helmholtz (1968). *Über Geometrie*, 32-60. Darmstadt: Wissenschatliche Buchgesellschaft.

Helmholtz, Hermann (1870). “Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome”. In: H. von Helmholtz (1968): *Über Geometrie*, 1-31. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Hermite, Charles (1916). "Briefe von Ch. Hermite an P. du Bois-Reymond aus den Jahren 1875 - 1888". In: *Archiv der Mathematik und Physik*, 3(24), 193-210.

Ifrah, Georges (1989). *Universalgeschichte der Zahl.* Frankfurt a.M.: Campus.

Jaffe, L. (1939). *Rabbi and mathematician: the life of Hermann Schapira.* Jerusalem: Verlag unbekannt.

Jahnke, Niels H. (1990). *Mathematik und Bildung in der Humboldtschen Reform.* Göttingen: Vandenhock & Ruprecht.

Jahnke, Niels H. (1990). "Die Algebraische Analysis im Mathematikunterricht des 19. Jahrhunderts". In: *Der Mathematikunterricht* 36, 61-74.

Jospeh, George Gheverghese (1991). *The Crest of the Peacock.* London/New York: Penguin.

Johnson, D. M. (1979). "The Problem of the Invariance of Dimension in the Groth of Modern Topology". In: *Archive for History of Exact Siences* 20, 97-188.

Johnson D. M. (1981). "The Problem of the Invariance of Dimension in the Groth of Modern Topology II". In: *Archive for History of Exact Sciences* 25, 85-267.

Klein, Adolf (1990). Ringen um die mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung. Bonn: Dümmler.

Klein, Felix (1970). *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.* Nachdruck der Ausgaben Berlin, 1926 (Teil I) und Berlin, 1927 (Teil lI). Berlin/Heidelberg/New York: Springer.

Koch, Helga (1990). "Oskar Xaver Schlömilch - ein Förderer des mathematischen Unterrichts für Techniker und Ingenieure". In*: Schriftenreihe fur Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin* 27, 1-10.

Koehler, Carl (1899). "Hermann Schapira". In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 2, 61-66.

Krause, Martin (1897). "Gustav Ferdinand Mehler +". In: *Mathematische Annalen* 48, 603-606.

Krause, Martin (1908). "Enno Jürgens". In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 17, 163-170.

Krazer, Adolf (1903). *Lehrbuch der Thetafunktionen.* Leipzig: Teubner.

Lakatos, Imre (1976). *Proofs and Refutations.* Cambridge u.a.: Cambridge University Press.

Lampe, Emil (1900). "Reinhold Hoppe". In: *Jahresbericht der Deutschen Mathemaliker-Vereinigung* 10, 33-58.

Lampe, Emil (1905). "Guido Hauck +". In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 14, 289-311.

Liebmann, Otto (1880). *Zur Analysis der Wirklichkeit.* Berlin: Trübner.

Listing, Benedikt (1847). "Vorstudien zur Topologie". In: Göttinger Nachrichten, 811-875.

Lorey, Walter (1916). *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäiten seit Anfang des 19. Jahrhunderts.* Leipzig/Berlin: Teubner.

Lorey, Walter (1938). *Der Deutsche Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V. 1891-1938.* Frankfurt a. M.: Salle.

Loria, Gino (1891). "Esame di alcuni ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche". In: *Bibliotheca Mathematica* 2, Folge 5, 99-112.

Loria, Gino (1921). *Storia della Geometriva Descrittiva.* Milano: Hoepli.

Lüroth, Jürgen (1903). "Ernst Schröder +". In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 12, 249-265.

Matthiesen, Ludwig (1878). *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen.* Leipzig: Teubner.

Meyer, Franz (1904). "Einleitender Bericht über das Unternehmen der Herausgabe der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften". In: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Erster Band, Erster Teil, redigiert von Wilhelm Franz Meyer (Leipzig, 1898-1904), V-XXIX.

Müller, Felix (1905). "Karl Schellbach: Rückblick auf sein wissenschaftliches Werk". In: *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften* 20, 1-86.

Poincaré, Jules Henri (1913). *Dernières pensées.* Paris: Flammarion.

Pont, Jean-Claude (1974) *La topologie algébrique des origines à Poincaré.* Paris: Flammarion.

Preobraschensky, W. (1882). "Besprechung von Dr. Hermann Schapira 'Grundlage zu einer Theorie allgemeiner Cofunctionen und ihrer Anwendungen'". In: Zeitschrit fiir Mathematik und Physik 27, 21-26.

Puppe, Dieter (1986). *Manuskript zur Geschichte der Mathematik an der Universitat Heidelberg.* In: Scharlau (1990)*, Ein Jahrhundert Mathematik.* Braunschweig: Vieweg.6

Purkert, Walter & Ilgauds, Hans Joachim (1987). *Georg Cantor 1845-1918.* Basel/Boston/Stuttgart: Birhäuser.

Reich, Karin (1989). "Michael Stifel". In: *Maß, Zahl und Gewicht: Mathematik als Schlüssel zu Weltverständnis und Weltbeherrschung.* Weinheim: VCh.

Remmert, Reinhold (1985). "Komplexe Zahlen". In: Hans-Dieter Ebbinghausen et al. (Hrsg.): *Zahlen.* Darmstadt: Springer.

Richards, Joan (1988). *Mathematical Visions: The Pursuit of Geometry in Victorian England.* San Diego u.a.: Academic Press.

Richenhagen, Gottfried (1986). *Carl Runge (1856-1927): Von der reinen Mathematik zur Numerik.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Schapira, Hermann (1880). "Mischnath Hammidoth, Lehre von den Maassen". In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik 25*, Supplement, 1-56.

Scharlau Winfried (Hrsg.) (1990). *Ein Jahrhundert Mathematik.* Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Scherk, H. F. (1835). "Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen". In: *Journal fur die reine und angewandte Mathematik* 13, 185-208.

Schlegel, Victor (1886). "Ueber Entwicklelung und Stand der n-dimensionalen Geometrie, mit besonderer Beriicksichtigung der vierdimensionalen". In: *Nova Acta Leopoldina* 48, 92-96, 108-110, 133- 135, 149-152 und 160-163.

Sschlömilch, Oskar (1854). "Geometrie, descriptive". In: J. S. Ersch & J. G. Gruber (Hrsg.): *Allgemeine Encyklopädie der Wissenschaften und Künste.* Erste Section A-G, herausgegeben von M.H.E. Meier. 59. Theil Georgias-Georg III (König von England) [Leipzig], 244-258.

Schlömilch, Oskar (1862). “Ueber die bedingt convergierenden Reihen”. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 7, 283- 284.

Schlömilch, Oskar (1877). “Philosophische Aphorismen eines Mathematikers”. In: *Zeitschrift fiir Philosophie und philosophische Kritik*. Neue Folge 70-71, 1-15.

Schmitt, Wolfram (1978). “Struktur und Funktion des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg im 19. Jahrhundert”. In: *Heidelberger Jahrbücher* 22, 71-92.

Scholz, Erhard (Hrsg.) (1990). *Geschichte der Algebra.* Mannheim/Wien/Zürich: BI.

Schouten, Pieter H. (1905). *Mehrdimensionale Geometrie. Zweiter Teil: Die Polytope.* Leipzig: Göschen.

Schröder, Ernst (1966). *Vorlesungen über die Algebra der Logik.* 3 Bände. New York: Chelsea.

Schubert, Hermann (1886). “Beiträge zur abzählenden Geometrie”. In: *Mathematische Annalen* 10, 1-116.

Seidel, Philipp Ludwig von (1855). “Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen dem Bildungsgesetz eines Kettenbruches und der Art des Fortganges seiner Näherungsbrüche”. In: *Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, 559-602.

Simon, Max (1985). *Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik.* Paderborn u.a.: Schöningh.

Stäckel, Paul (1906). “Das Archiv der Mathematik und Physik, Geleitwort”. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 15, 323-335.

Stäckel, Paul (1913). “Nachruf auf Peter Treutlein”. In: *Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission.* Heft Vlll, 127-128.

Struik, Dirk (1969). *A source book in mathematics, 1200-1800.* Cambridge: Cambridge University Press.

Sturm, Rudolf (1871). “Ueber die römische Fläche von Steiner”. In: *Mathematische Annalen* 3, 76-123.

Süssmann, Georg (1990). “Kennzeichnungen der Räume konstanter Krümmung”. In: *Philosophia naturalis* 27, 206-233.

Tietze, Heinrich (1943-44). “Über spezielle Simony-Knoten und Simony-Ketten mit vorgeschriebenen singulären Primzahlen I, II”. In: *Monatshefte fiir Mathematik und Physik* 51, 1-14 und 85-100.

Tietze, Heinrich (1944). “Übcr Simony-Knoten und Simony-Ketten mit vorgeschriebenen Primzahlen für die Figur und ihr Spiegelbild”. In: *Mathematische Zeitschrift* 49, 351-369.

Timerding, Heinrich Emil (1912). “Theodor Reye”. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 31, 185-203.

Van der Waerden, Bartel Lendard (1985). A History of Algebra: From al-Khwarizmi to Emmy Noether. Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo: Springer.

Volkert, Klaus (1987). “Die Geschichte der pathologischen Funktionen - Ein Beitrag zur Entstehung der mathematischen Methodologie”. In: *Archive for history of exact sciences* 37, 193-232.

Volkert, Klaus (2002). *Das Homömorphieproblem insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten in der Topologie 1892-1935.* Pais: Kimé.

Volkert, Klaus (2013). *Das Undenkbare denken.* Berlin u.a.: Springer.

Volkert, Klaus (Hrsg.) (2015). *David Hilbert - Grundlagen der Geometrie.* Berlin u.a.: Springer.

Weber, Heinrich (1893). “Leopold Kronecker”. In: *Mathematische Annalen* 43, 1-25.

Weber, Heinrich (1899). *Lehrbuch der Algebra: Band 2.* 2. Aufl. Braunschweig: Vieweg.

Weber, Heinrich (1908). *Lehrbuch der Algebra: Band 3.* 2. Aufl. Braunschweig: Vieweg.

Wieleitner, Heinrich (1930). *Algebraische Kurven. Erster Teil: Gestaltliche Verhältnisse.* Berlin/Leipzig: Teubner.

Woepke, Franz (1863). “Mémoire sur la propagation des chiffres indiens”. In: *Joumal asiatique*, 6e série 1, 27-79, 234-290 und 442-529.

Wollmershäuser, F. R. (1981). “Das Mathematische Seminar der Universität Strßburg 1872-1900”. ln: P. L. Butzer & E. Fehér (Hrsg.): *E. B. Christoffel. The Influence of His Work on Mathematics and Physical Sciences.* Basel/Boston/Stuttgart: Birkhäuser.

Wussing, Hans (1969). *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs.* Berlin [DDR]: VEB Wissenschaft.

Wussing, Hans (Hrsg.) (1985). *Biographien bedeutender Marhematiker*. Köln: Aulis.