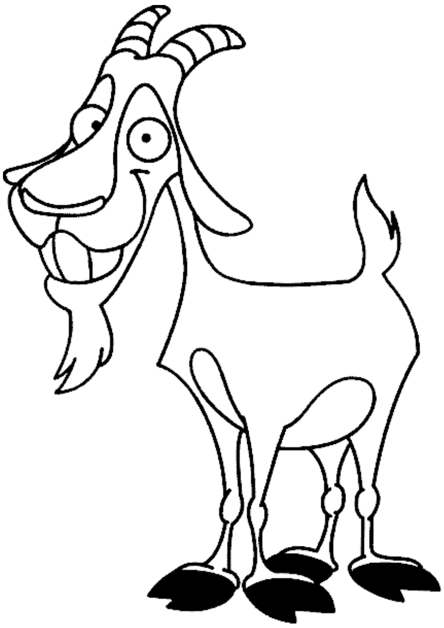
Paradoxien bei bedingten Wahrscheinlichkeiten -

Das Ziegenproblem



Ein Referat von

Maren Hornischer

&

Anna Spitz

Wuppertal, den 28. Mai 2014

Inhalt

1 Das Ziegenproblem oder auch das "3-Türen-Problem"

Das sogenannte Ziegenproblem stammt aus der Fernsehshow "Let's make a deal", bei der ein Kandidat, der die Endrunde erreicht hat, die Chance hat, ein Luxusauto zu gewinnen. Das Auto ist hinter einer von drei Türen versteckt, hinter den anderen beiden Türen steht jeweils eine Ziege - die Nieten.

Jetzt darf der Kandidat sich für eine dieser drei Türen entscheiden, sagen wir er wählt die Tür 2. Egal wie der Kandidat sich entscheidet, mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ trifft er die richtige Tür.

In einem zweiten Schritt stellt der Moderator zunächst fest, für welche Tür sich der Kandidat entschieden hat und öffnet dann eine der verbleibenden Türen, z.B. Tür 1. Da dem Moderator bekannt ist, hinter welcher Tür das Auto steht, erblicken sowohl der Kandidat, als auch das Publikum eine der beiden Ziegen.

Nun hat der Kandidat die Qual der Wahl: Er darf seine erste Wahl überdenken und sich für die andere verbleibende Tür entscheiden, also Tür 3. Was sollte er tun? Verbessert er seine Gewinnchance, wenn er sich für Tür 3 entscheidet? Oder soll er besser bei seiner Erstwahl - Tür 2 - bleiben?

In einer Kolumne "Ask Marilyn" der amerikanischen Zeitschrift "Parade" erklärt die Journalistin Marilyn vos Savant (angeblich hat sie den höchsten jemals gemessenen IQ), dass der Kandidat unbedingt die Tür wechseln sollte, da er dann eine doppelte Gewinnchance hätte. Mit dieser Aussage löste sie eine Lawine von über 10.000 Leserbriefen aus, in der die meisten Verfasser ihr widersprachen.

Ist es wirklich möglich, dass sich die Gewinnchance bei einem Wechsel verdoppelt?

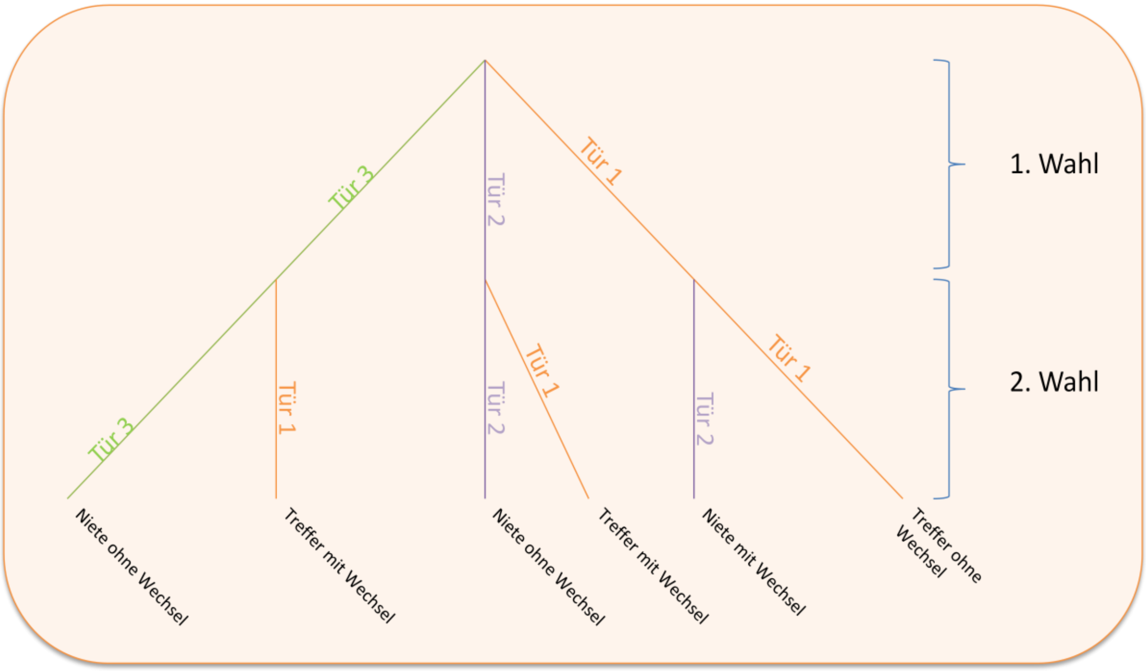
2 Meinungen u.a. aus Leserbriefen

2.1 Marilyn vos Savant

Marilyn vos Savant ist der Meinung, dass man mit einem Wechsel der Tür seine Gewinnchance verdoppelt. Dies begründet sie wie folgt:

- Die Chancen des Kandidaten, bei der Wahl der ersten Tür das Auto zu gewinnen, liegen bei $\frac{1}{3}$.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn hinter den verschlossenen Türen zwei und drei ist, liegt bei $\frac{2}{3}$.
- Wenn der Quizmaster eine der Türen, bspw. die dritte, öffnet und eine Ziege freigibt, ändert sich die Trefferwahrscheinlichkeit der ersten Tür nicht (nach wie vor $\frac{1}{3}$).
- Wird nun eine Tür von den beiden verbliebenden Türen, also z.B. Tür drei, geöffnet, fällt die Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ auf die eine Tür, zu der der Kandidat wechseln könnte, Tür 2. Somit verdoppelt sich die Gewinnchance bei einem Wechsel von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{2}{3}$.

2.2 Jürgen Agster/ Der Spiegel



Zum Verständnis muss erwähnt werden, dass das Auto hinter Tür 1 steht. Demnach liegt die Trefferwahrscheinlichkeit ohne Wechsel bei $\frac{1}{6}$. Die Trefferwahrscheinlichkeit bei einem Wechsel liegt bei $\frac{2}{6}$ - also doppelt so hoch (s. auch M. vos Savant).

Insgesamt liegt somit die Trefferwahrscheinlichkeit bei $\frac{3}{6}$, also bei 50 %, wie nicht anders zu erwarten, wenn man die Vorgeschichte nicht berücksichtigt.

2.3 Stefan Sent aus Bonn

Angenommen es gibt zwei Kandidaten A und B. A bleibt immer bei seiner ersten Wahl, B wechselt nach dem öffnen der Tür zu der verbleibenden. Das Experiment findet 999 mal statt. Demnach müsste Kandidat A mit einer Gewinnchance von $\frac{1}{3}$ 333 mal ein Auto gewinnen. Doch wo bleiben die verbleibenden 666 Autos? Diese können nur von Kandidat B gewonnen sein. Also hat B doppelt so viele Autos wie Kandidat A gewonnen.

2.4 Gerhard Keller aus Berlin

Gerhard Keller macht den Vorschlag, das Experiment mit 100 - anstelle von 3 - Türen durchzuführen. Angenommen der Kandidat wählt zu Beginn Tür 23 aus. Der Moderator muss nun von den verbleibenden 99 Türen 98 öffnen, hinter denen das Auto nicht steht. Neben Tür 23 bleibt also nur eine weitere, z.B. Tür 88, geschlossen. Welche Entscheidung sollte der Kandidat wohl treffen?

3 Mathematische Erklärung

Wir wenden den Satz von Bayes (nach Thomas Bayes) an:

Allgemein:

$P(Aj|B) = \frac{P(B|Aj)*P(Aj)}{\sum_{j=1}^{N} P(B|Aj)*P(Aj)}$ (Aj sind Ereignisse; $P(Aj|B)$: $P(Aj)$ unter der Bedingung B)

Wir nehmen an, dass der Kandidat Tür 1 wählt und der Moderator Tür 3 öffnet.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto hinter Tür 2 steht?

- ➔ Der Kandidat macht die Beobachtung M3

$$P(A2|M3) = \frac{P(M3|A2) * P(A2)}{P(M3|A2) * P(A2) + P(M3|A1) * P(A1) + P(M3|A3) * P(A3)}$$

$$P(M3|A2) = 1\ (denn\ der\ Moderator\ kann\ jetzt\ nur\ Tür\ 3\ öffnen)$$

$$P(A2) = P(A1) = P(A3) = {}^{1}/_{3}\ (das\ Auto\ wird\ gleich\ wahrscheinlich\ verteilt)$$

$$P(M3|A1) = {}^{1}/_{2}\ (der\ Moderator\ wählt\ zwischen\ 3\ und\ 2\ zufällig\ aus)$$

$$P(M3|A3) = 0\ (der\ Moderator\ will\ das\ Spiel\ nicht\ beenden)$$ [1]

Einsetzen:

$$P(A2|M3) = \frac{{}^{1}/_{3}}{{}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{6}} = \frac{2}{3}$$

Gegenprobe: (Wahrscheinlichkeit, dass das Auto hinter Tür 1 ist)

$$P(A1|M3) = \frac{P(M3|A1) * P(A1)}{P(M3|A1) * P(A1) + P(M3|A2) * P(A2) + P(M3|A3) * P(A3)}$$

$$= \frac{{}^{1}/_{6}}{{}^{1}/_{6} + {}^{1}/_{3}} = \frac{1}{3}$$

[1] Randow, Gero v.: Das Ziegenproblem – Denken in Wahrscheinlichkeiten, Hamburg 1992, S. 130.

4 Quellen

Der Spiegel, Nr. 36,45, 1991.

Randow, Gero v.: Das Ziegenproblem – Denken in Wahrscheinlichkeiten, Hamburg 1992.

u.V.: Schönheit des Denkens, in: Der Spiegel, Nr. 34,45, 1991.