

Widersprüche in der naiven Mengenlehre

Seminar: Geschichte der Mathematik – Pro. Dr. Klaus Volkert

Marc Schwarz (1228787), Yana Götz (1241715)

Definition einer Menge im 19. Jahrhundert:

„ Unter einer `Menge´ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m, unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die `Elemente´ von M genannt werden), zu einem Ganzen“

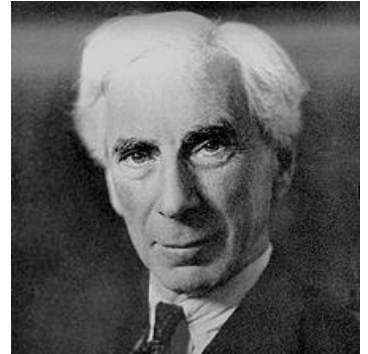
(Georg Cantor, 1895)

Diese Definition einer Menge bildete im 19. Jahrhundert die Grundlage der Mengenlehre und wird heute als „naive Mengenlehre“ bezeichnet. Allerdings führte sie schnell zu fundamentalen Widersprüchen in der damaligen Mathematik, die die besten Köpfe in den Wahnsinn trieben. Neben Cantor, der noch zu Lebzeiten seine eigene Definition anzweifelte, fand auch Bertrand Russell einige grundlegende Probleme. Mit einem dieser wollen wir uns nun im Folgenden beschäftigen.

Bertrand Arthur William Russell, 3. Earl Russell

Lebenslauf:

- Geboren am 18. Mai 1872 bei Trellech, Monmouthshire, Wales als Sohn der Aristokraten John Russell, Viscount Amberly, und Katherine Louisa Stanley
- Aufgewachsen bei viktorianischen Großeltern, da seine Eltern früh verstarben
- 1890 – 1894: Studium der Mathematik an der Universität Cambridge
- 1894: Heirat mit erster Ehefrau Alys Pearsall Smith
- 1910 – 1913: Arbeit an *Principia Mathematica*
- 1921: Scheidung von erster Ehefrau und zweite Heirat mit Dora Black
- 1936: dritten Heirat mit Patricia Helen Spence
- 1950: Nobelpreis für Literatur
- 1952: vierte Heirat mit Edith Finch
- 1955: Verfassung des *Russell-Einstein-Manifests* mit Albert Einstein
- 1963: Gründung der *Bertrand Russell Peace Foundation*
- Gestorben am 2. Februar 1970 in Penrhyndeudraeth, Gwynedd, Wales an Influenza



Russells Leben lässt sich in drei Wirkungsabschnitte einteilen:

- (1) Grundlagen der Mathematik (Fertigstellung der *Principia Mathematica*)
- (2) Philosophische Schaffenszeit (unter anderem Verfassung von *Moral und Ehe*, ausgezeichnet mit dem Nobelpreis)
- (3) Politisches Engagement (kandidierte für das House of Common, Vermittler im Kalten Krieg, Präsident der Campaign of Nuclear Disarmament, u.v.m.)

Verschiedene Lehranstellungen:

- Trinity College der Universität Cambridge
- London School of Economics
- Harvard University
- Peking-Universität,

Widersprüche in der naiven Mengenlehre

Seminar: Geschichte der Mathematik – Pro. Dr. Klaus Volkert

Marc Schwarz (1228787), Yana Götz (1241715)

Russell-Antinomie am Beispiel des fleißigen Barbiers

In einem Dorf lebt ein Barbier, der folgende Aussage macht:

„ich schneide genau denjenigen Dorfbewohnern die Haare, die sich ihre Haare nicht selbst schneiden.“

Nun ist der Barbier aber selber ein Dorfbewohner. Er muss sich also nach seiner Aussage die Haare genau dann schneiden, wenn er sie sich nicht selbst schneidet. Widerspruch! Der Barbier kann also sein Versprechen nicht in die Tat umsetzen, seine Aussage ist eine Lüge.

Russell-Zermelosches Paradoxon

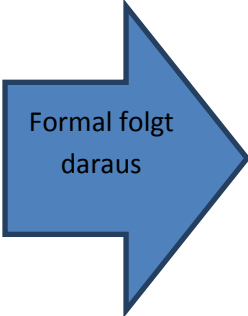
Sei $R = \{ x \mid x \text{ ist Menge und } x \notin x \}$ die Menge aller Mengen, die nicht Element von sich selbst sind. Dann gilt für alle Mengen y :

$$(+)\ y \in R \text{ gdw } y \notin y.$$

Insbesondere gilt (+) auch für $y = R$. Dies ergibt:

$$R \in R \text{ gdw } R \notin R.$$

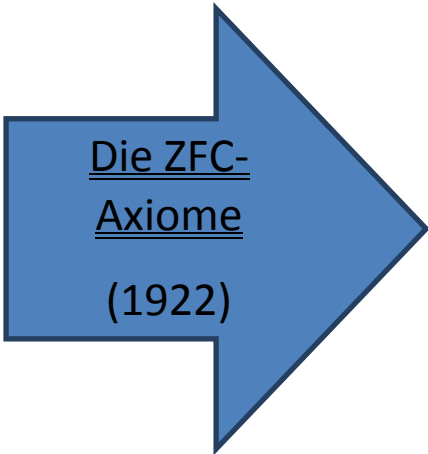
Widerspruch!



Formal folgt
daraus

Für den Widerspruch ist das sogenannte *Komprehensionsaxiom* verantwortlich. Dieses erlaubt uns, wie in Cantors Definition vom Anfang geschildert, unbegrenzt viele Mengen zu einem Ganzen zusammenzufassen. Es wird gezeigt, dass ein R mit der Eigenschaft (+) nicht existieren kann, bzw. dass wir R nicht zu dem Bereich von Objekten zählen dürfen, die wir in (+) für y einsetzen.

Abhilfe dieses Problems der naiven Mengenlehre schafften Zermelo und Fraenkel mit der Einführung der „Axiomatischen Mengenlehre“, welche den Begriff der Menge von dem der Klasse trennt.



Die ZFC-
Axiome
(1922)

(EXT)	Extensionalitätsaxiom	Beschreibung von $=, \in$
(FUN)	Fundierungsaxiom	Beschreibung von \in
(LM)	Existenz der leeren Menge	elementares Existenzaxiom
(PA)	Paarmengenaxiom	elementares Existenzaxiom
(VER)	Vereinigungsmengenaxiom	elementares Existenzaxiom
(AUS)	Aussonderungsschema	elementares Existenzaxiom
(UN)	Unendlichkeitsaxiom	starkes Existenzaxiom
(ERS)	Ersetzungsschema	starkes Existenzaxiom
(POT)	Potenzmengenaxiom	starkes Existenzaxiom
(AC)	Auswahlaxiom	starkes Existenzaxiom

Widersprüche in der naiven Mengenlehre

Seminar: Geschichte der Mathematik – Pro. Dr. Klaus Volkert

Marc Schwarz (1228787), Yana Götz (1241715)

Das Axiom, das das Russell-Paradoxon löst, ist das Fundierungsaxiom:

(FUN) Fundierungsaxiom

Jede nichtleere Teilmenge x hat ein Element y , das mit x kein Element gemeinsam hat.

Anschaulich folgt daraus:

- Das Fundierungsaxiom sorgt für eine Beschränkung des Mengenuniversums
- Für alle Mengen x existiert ein $y \in x$ mit der Eigenschaft $y \cap x = \emptyset$
- Die Paradoxie wird durch die Einführung dieses Axioms gelöst, da nun nicht mehr beliebige Vielheiten als Menge bezeichnet werden dürfen
- Vielheiten auf die das Axiom nicht zutrifft werden nun in der heutigen Axiomatischen Mengenlehre als echte Klassen bezeichnet
- Wichtige Definitionen in der „Axiomatischen Mengenlehre“:
 - **Klasse:** Eine Klasse ist eine Zusammenfassung beliebiger Objekte, die alle eine bestimmte Eigenschaft erfüllen.
 - **Menge:** Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Elementen, die keinem ZFC-Axiom widerspricht.
 - **Echte Klasse:** Eine echte Klasse ist eine Klasse, die keine Menge ist, das heißt, die bestimmte Axiome nicht erfüllt. (Beispiele: Allklasse: $\{x \mid x = x\}$ dies ist die Klasse aller Mengen; Russellsche Klasse: $\{x \mid x \notin x\}$)
- Jede Menge ist eine Klasse, aber nicht jede Klasse ist eine Menge (Russell-Paradoxon)

Somit umgeht man zwar die Probleme, löst diese aber nicht konkret. Ein Beispiel hierfür ist das oben gezeigte Barbier-Paradoxon. Man darf also bestimmte Fragen in der Realität nicht stellen bzw. sind manche Fragen in der Realität nicht zu beantworten.

Quellenverzeichnis:

- http://de.wikipedia.org/wiki/Bertrand_Russell#Auszeichnungen
- http://de.wikipedia.org/wiki/Mengenlehre#20._Jahrhundert
- O. Deiser: Einführung in die Mengenlehre, Berlin 2002, S. 114-117, 267-282