

Das Apollonische Berührproblem

Sammlung von Lösungen eines jahrtausende alten Problems, zusammengetragen und erläutert

von Johannes Röttgen-Burtscheidt

Köln, den 1. 10. 2007

Das Apollonische Berührproblem

Taf. III.

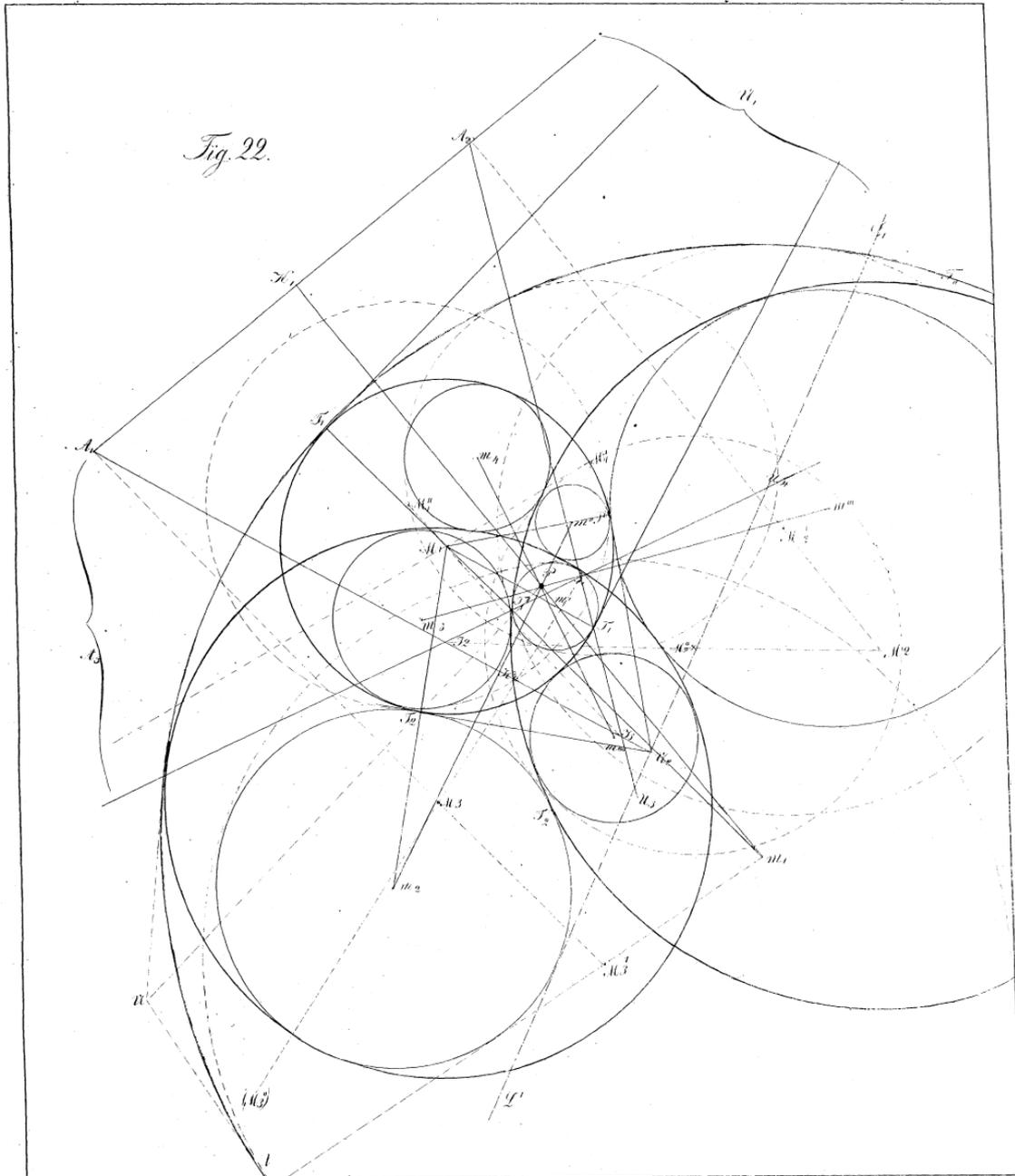


Abb. aus:
Hellwig, C.: Das Problem des Apollonius, Halle, 1865

Das Apollonische Berührproblem

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1. Lage und Existenz	4
2. Elementargeometrische Lösungen	9
2.1. Grundlegende Sätze.....	10
2.2. Konstruktionen der einzelnen Fälle.....	25
3. Die Inversion am Kreis	52
3.1. Grundlegende Eigenschaften.....	52
3.2. Konstruktionen.....	60
4. Analytische Methoden	78
5. Die Kegelschnitte	91
5.1. Die Kegelschnitte als Ortslinien.....	91
5.2. Konstruktive Lösungen.....	98
5.3. Analytische Lösungen.....	102
5.4. Der Kreis des Apollonius.....	104
6. Geschichte – Ideengeschichte	106
6.1. Descartes.....	107
6.2. Euler.....	111
6.3. Gauß.....	119
7. Schlussbemerkung und Ausblick	122
Literaturliste	124

Einleitung

Das Apollonische Berührproblem geht auf den griechischen Mathematiker Apollonios von Perge (ca. 260 – 190 v. Chr.) zurück. Dabei besteht die Aufgabe zunächst darin, in der Ebene einen Kreis zu finden, der drei gegebene Kreise zugleich berührt. Das erscheint auf den ersten Blick eher unspektakulär und recht leicht lösbar zu sein. Genau darin liegt aber auch der Reiz dieses Problems, mit dem sich die Mathematiker seit vielen Jahrhunderten immer wieder beschäftigt haben. Die Aufgabe ist leicht zu verstehen, die Aufgabenstellung ist unmittelbar klar, aber eine Lösung ist nicht einfach zu finden. Außerdem lässt sich diese Aufgabe durch vier Aspekte zu einer sehr komplexen und umfangreichen Aufgabensammlung erweitern. Zunächst lässt man als vorgegebene Elemente, zu denen der Berührkreis gefunden werden soll, auch entartete Kreise zu, also solche, deren Radius unendlich groß, sprich Geraden, und solche, deren Radius unendlich klein ist, sprich Punkte. Daraus ergeben sich zehn verschiedene Kombinationen aus Kreis (C), Gerade (L) und Punkt (P): PPP, LLL, PPL, PLL, PCL, CPP, CCP, CLL, CCL, CCC. (Diese Abkürzungen sind dem Buch „Geometry. Euclid and beyond“ von R. Hartshorne entnommen und haben sich als sehr praktisch erwiesen. Sie werden daher als Arbeitstitel für die zehn Fälle des Berührproblems in der gesamten vorliegenden Arbeit verwendet.) Dadurch hat sich also das ursprüngliche Problem zu zehn Einzelproblemen erweitert. Gesucht ist nunmehr ein Kreis, der die gegebenen Kreise oder Geraden tangential berührt oder durch die vorhandenen Punkte verläuft.

Ein zweiter Aspekt ist die Tatsache, dass außer im Fall PPP zu jeder dieser Kombinationen mehrere Kreise existieren, die die Bedingung, drei gegebenen Elemente zugleich zu berühren, erfüllen. In den Fällen CLL, CCL und dem Hauptfall CCC gibt es sogar acht solcher Kreise. Diese Kreise erfordern unterschiedliche Konstruktionen bzw. unterschiedliche Berechnungen, so dass sich der einzelne Fall wiederum in weitere Unterfälle verästeln kann. Dazu ist es ebenso notwendig, die unterschiedlichen Möglichkeiten der Lage der gegebenen Elemente zueinander und die Bedingungen, unter denen überhaupt die Konstruktionen der Berührkreise möglich sind, zu untersuchen.

Der dritte Aspekt ist, dass sich in allen Fällen die gesuchten Kreise auf verschiedene Arten finden bzw. konstruieren lassen. In der vorliegenden Arbeit werden die Teilprobleme elementargeometrisch, durch die Inversion am Kreis und mit Hilfe der Kegelschnitte als Ortslinien gelöst. Ebenso werden die einzelnen Fälle analytisch betrachtet, wobei auch in der analytischen Methode verschiedene Möglichkeiten der Lösung bestehen. Dadurch erweitert sich das Berührproblem wiederum um ein Vielfaches an Betätigungsfeldern.

Dann sei letztlich noch die historische Dimension des Berührproblems erwähnt:

Apollonios v. Perge, ein großer Geometer der Antike, befasste sich in seinem Werk „Konika“ mit Kegelschnitten und führte die Bezeichnungen „Ellipse“, „Parabel“ und „Hyperbel“ ein. Seine eigene Lösung des Berührproblems ist leider nicht mehr überliefert. Daher befassten sich im Laufe der Geschichte viele Mathematiker, darunter Descartes und Euler, mit dem apollonischen Berührproblem, nicht zuletzt, um die Tragfähigkeit der von ihnen entwickelten Methoden zu überprüfen. Diese historischen Lösungen nachzuvollziehen und geschichtlich einzuordnen stellt wiederum eine eigene, umfangreiche Auseinandersetzung mit dem Berührproblem dar.

Die vorliegende Arbeit versteht sich als Grundstock einer systematischen Sammlung von Aufgaben des Apollonischen Berührproblems und deren unterschiedlichen Lösungen im Sinne der vorgenannten Aspekte. Es kann und soll hier nicht der Anspruch auf Vollständigkeit dieser Sammlung erhoben werden, um keine Fragestellungen zu den einzelnen Fällen zu unterdrücken, deren Untersuchung zweifelsohne weitere „Sammlerstücke“ hervorbringt.

1. Lage und Existenz

Bevor die einzelnen Fälle des Berührproblems auf irgend eine Art gelöst werden können, müssen einerseits die Bedingungen untersucht werden, unter denen überhaupt eine Lösung möglich ist. Dazu ist die Lage der gegebenen Objekte, bzw. deren Konstellation zueinander zu betrachten. Die jeweiligen Konstellationen, die zu keiner Lösung führen, seien dann für alle weiteren möglichen Lösungsmethoden, die noch im weiteren vorgestellt werden, ausgeschlossen.

Andererseits gilt es zu untersuchen, wie viele Kreise in den jeweiligen Fällen existieren, die alle die Bedingung erfüllen, die gegebenen Objekte zu berühren. Denn es ist möglich, dass ein gegebener Kreis sowohl von außen als auch einschließend berührt wird, was zu mehreren Lösungen führt.

Zunächst seien aber alle „trivialen“ Lagen der gegebenen Elemente ausgeschlossen, nämlich die, wo Punkte mit Punkte, Geraden mit Geraden und Kreise mit Kreisen zusammen fallen. Es ist schnell klar, dass im Fall PPP unendlich viele Berührungskreise existieren, wenn die drei gegebenen Punkte zu einem Punkt zusammen fallen. Ebenso in den Fällen LLL und CCC, wenn dort die Geraden oder die Kreise zusammen fallen. Auch in den Fällen, wo zwei Punkte, zwei Geraden oder zwei Kreise gegeben sind, existieren unendlich viele Lösungen, wenn diese Objekte zusammenfallen.

Liegen in den Fällen PPL und CPP die Punkte auf der Geraden oder auf dem Kreis, so ist die Gerade bzw. der Kreis selbst die (triviale) Lösung.

Keine Berührungskreise existieren in den Fällen PPL, CCL und PLC, wenn die Punkte und Kreise ganz in verschiedenen Halbebenen liegen, die durch die Geraden gebildet werden und im Fall LLL, wenn sich alle drei Geraden in einem Punkt schneiden.

Ebenso gibt es keine Lösung im Fall CCP, wenn ein Kreis ganz im anderen liegt und der Punkt entweder außerhalb des äußeren oder innerhalb des inneren Kreises liegt. Es gibt keine Lösung im Fall CCL, wenn ein Kreis ganz im anderen liegt und keiner der Kreise die Gerade schneidet, und im Fall CCC, wenn nur ein Kreis ganz im Inneren eines anderen Kreises liegt und der dritte Kreis keinen der beiden anderen schneidet.

Es können durch Schneiden, Berühren oder gleiche Radien gegebener Elemente Sonderfälle auftreten, die im weiteren aber keine Beachtung finden sollen, da dies den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würde. Erwähnenswert sind jedoch hier die Fälle CLL und CCC.

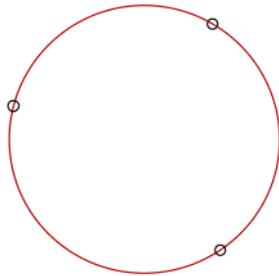
Schneiden die beiden Geraden im Fall CLL den Kreis, so existieren statt vier insgesamt acht Berührungskreise. Berühren sich die drei gegebenen Kreise im Fall CCC außen, so existieren nur zwei Lösungskreise.

Weitere Sonderfälle entstehen durch Parallelität oder Orthogonalität von gegebenen Geraden oder von Verbindungsgeraden gegebener Punkte. Diese werden aber in den jeweiligen Fällen gesondert erwähnt werden, wenn sie von besonderem Interesse sind.

Sind nun die Konstellationen ausgeschlossen, die zu keiner Lösung führen, kann man sich verdeutlichen, wie viele mögliche Berührungskreise im jeweiligen Fall maximal existieren.

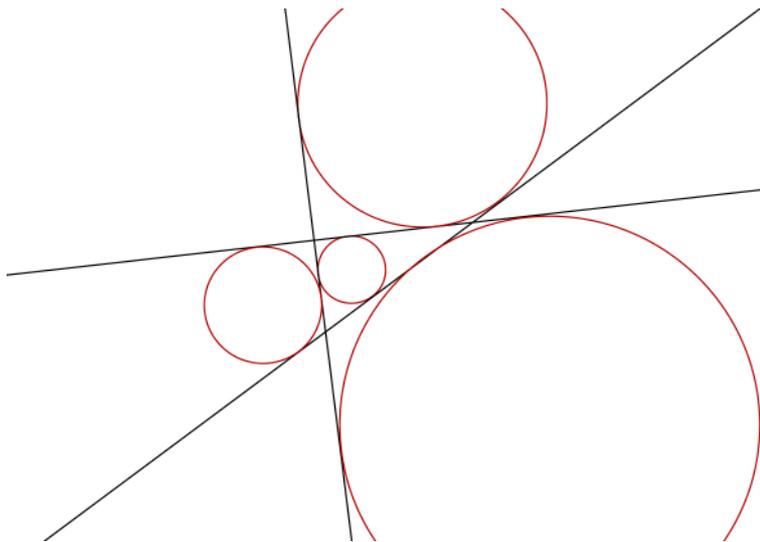
PPP: (eine Lösung)

Sind drei Punkte gegeben, so legen diese einen Kreis eindeutig fest. Dieser Kreis ist der Umkreis des Dreiecks, das durch die Punkte bestimmt ist.

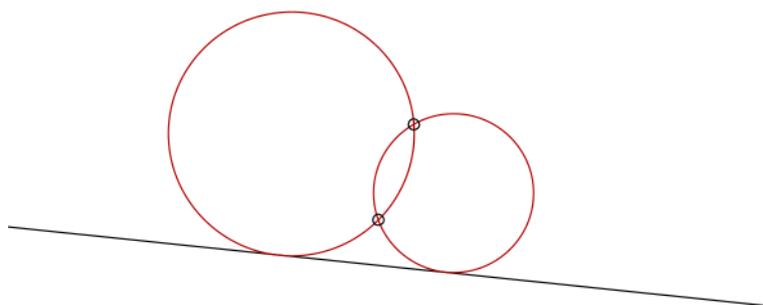


LLL: (vier Lösungen)

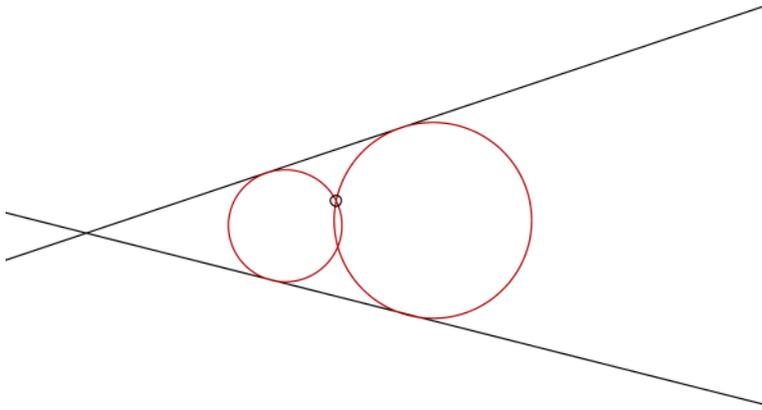
Zu drei gegebenen Geraden lassen sich ein Dreiecksinkreis und drei Ankreise konstruieren.



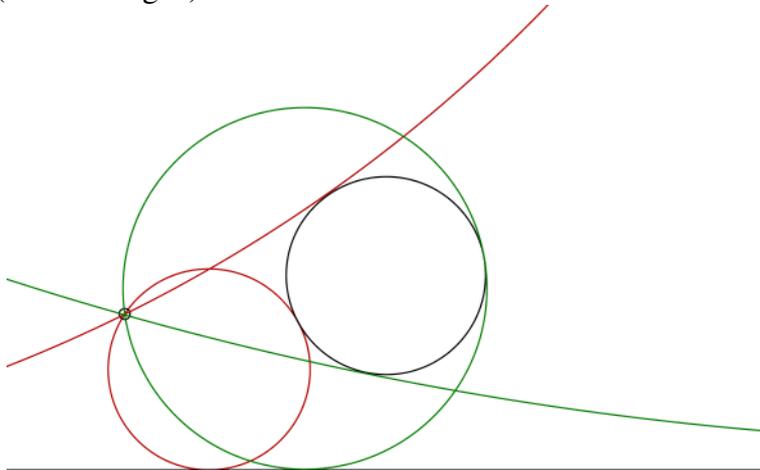
PPL: (zwei Lösungen)



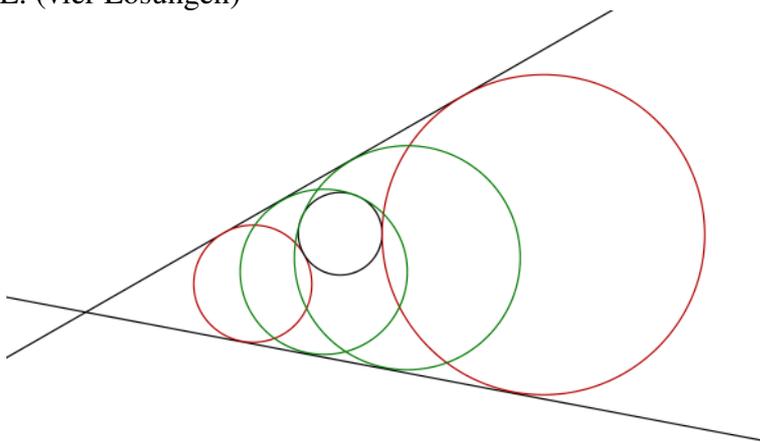
PLL: (zwei Lösungen)



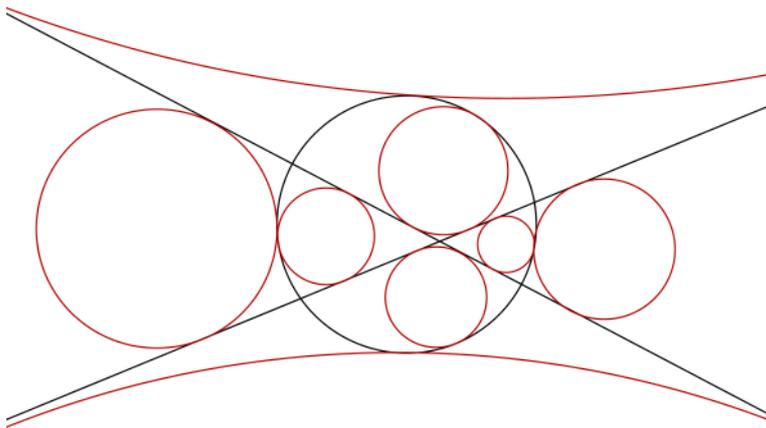
PCL: (vier Lösungen)



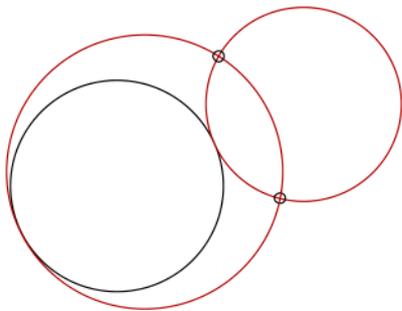
CLL: (vier Lösungen)



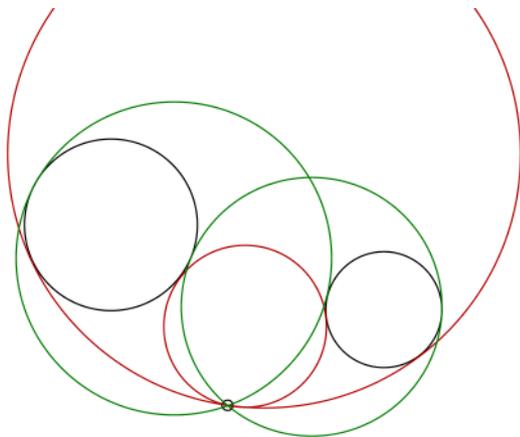
Der Sonderfall, dass beide Geraden den Kreis schneiden, weist acht Lösungskreise auf:



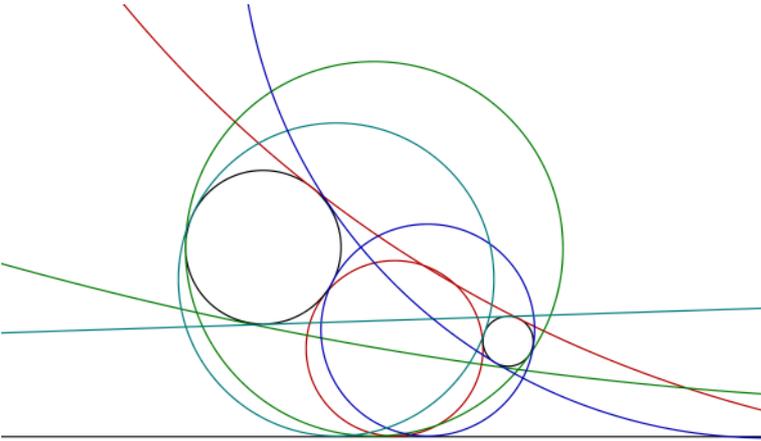
CPP: (zwei Lösungen)



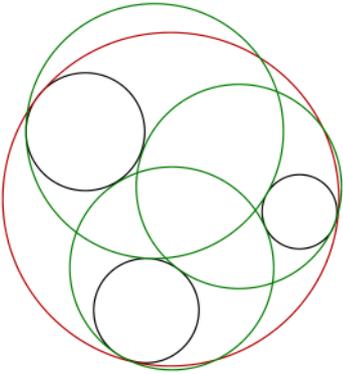
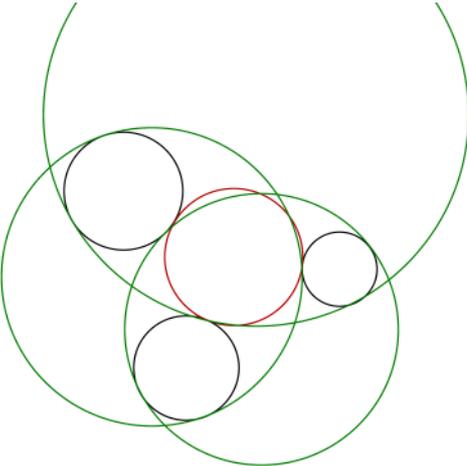
CCP: (vier Lösungen)



CCL: (acht Lösungen)



CCC: (acht Lösungen)



2. Elementargeometrische Lösungen

Die nun folgenden elementargeometrischen Lösungen sind im wesentlichen dem Buch „Geometrie“ von Georg Ulrich, 1941, entnommen. Unklar bleibt jedoch, im Hinblick auf Kapitel 6, an welcher historischen Lösung sich Ulrich dabei orientiert.

Den einzelnen Konstruktionen liegen viele Sätze der Elementargeometrie zu Grunde, die zunächst in 2.1. in einer Art Werkzeugkasten zusammengestellt und bewiesen werden sollen. Dabei werden elementarste Konstruktionen und Eigenschaften, wie die der Mittelsenkrechten, der Winkelhalbierenden, der Lote, der Senkrechten und der Parallelen als bekannt vorausgesetzt und nicht mehr bewiesen.

Ebenso werden Sätze aus der Ähnlichkeitsgeometrie, die auf den Strahlensätzen beruhen, nicht mehr eigens bewiesen. In den einzelnen Konstruktionen wird dann zur Begründung der jeweiligen Schritte lediglich auf die entsprechenden Sätze hingewiesen.

Ein wichtiges Prinzip der Lösung ist es, einen Fall, wenn möglich, auf einen bereits gelösten Fall zurück zu führen. Dabei erhält der Sekanten-Tangenten-Satz eine zentrale Rolle.

Einen etwas anderen Ansatz zur konstruktiven Lösung aller Fälle des Berührproblems findet man bei C. Hellwig in „Das Problem des Apollonius nebst den Theorien der Potenzörter, Potenzpunkte, Ähnlichkeitspunkte, Ähnlichkeitsgeraden, Potenzkreise, Pole und Polaren [...] für alle Lagen der gegebenen Kreise leicht fasslich dargestellt“¹. Diese Arbeit ist dem Titel entsprechend sehr ausführlich gestaltet und dringt mittels vieler Lehrsätze und deren Beweise tief in die genannten Theorien ein.

Hellwigs Untersuchung stellt in Umfang und Inhalt ein in sich geschlossenes Werk dar, dass als Ganzes zitiert werden müsste, um den darin verborgenen Gedankengang nachvollziehen zu können. Daher wird sie in dieser Arbeit nur am Rande Erwähnung finden. In den Fällen PPL und CCC wird aber die Lösung Hellwigs zum Vergleich ebenfalls vorgestellt.

¹ ebd.

2.1. Grundlegende Sätze

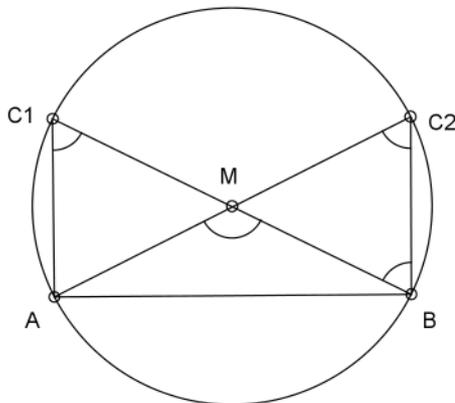
I. Der Umfangswinkelsatz²

Dieser Satz ist grundlegend für weitere Beweisführungen und Begründungen, die mit dem Berührproblem zusammenhängen.

Satz: Jeder Umfangswinkel über einer Sehne im Kreis ist halb so groß wie der entsprechende Mittelpunktswinkel. Daraus folgt sofort, dass die Umfangswinkel auf einer Seite der Sehne alle gleich sind.

Der Beweis wird in drei Teilen geführt:

1. Fall: ein Schenkel des Umfangswinkels liegt auf dem Durchmesser AC_2 oder BC_1 des Kreises und somit auf einem Schenkel des Mittelpunktswinkels



Es gilt:

Das Dreieck BMC_2 ist gleichschenkelig ($BM = C_2M = r$).

$\Rightarrow \angle MBC_2 = \angle MC_2B$.

Da $\angle AMB$ Außenwinkel des Dreiecks BMC_2 ist, gilt nach dem starken Außenwinkelsatz:

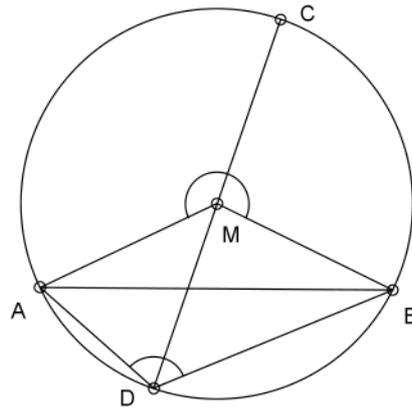
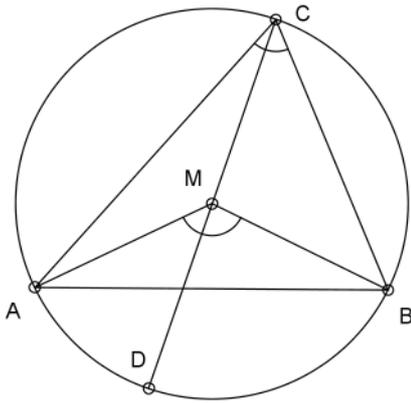
$\angle AMB = \angle MBC_2 + \angle MC_2B$

$\Leftrightarrow \angle AMB = 2(\angle MC_2B)$

Analog für das Dreieck AMC_1

2. Fall: Die Schenkel des Umfangswinkels schneiden die Schenkel des Mittelpunktswinkels nur in A und B.

² vgl. Ulrich, S. 78



Verbinde C mit M und verlängere CM zum Durchmesser CD, dann gilt:
 Die Dreiecke AMC und BMC sind gleichschenkelig ($AM = BM = CM = r$).
 Nach dem Außenwinkelsatz gilt für diese Dreiecke:

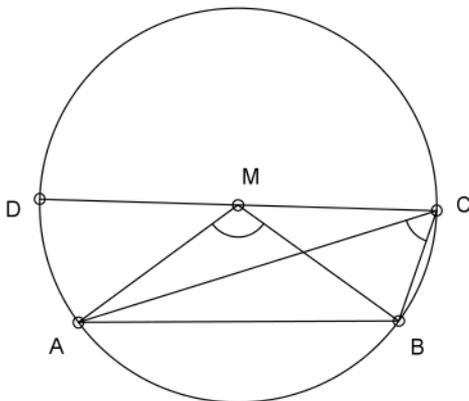
$$\angle DMA = 2(\angle MCA) \text{ und } \angle DMB = 2(\angle MCB)$$

$$\Rightarrow \angle AMB = \angle DMA + \angle DMB = 2(\angle MCA + \angle MCB) = 2(\angle ACB).$$

Analog zeigt man im Fall, dass der Umfangswinkel $> 90^\circ$ und der Mittelpunktswinkel überstreckt ist, mit den gleichschenkligen Dreiecken ADM und DBM, dass gilt:

$$\angle BMA = 2(\angle BDA)$$

3. Fall: ein Schenkel des Umfangswinkels schneidet einen Schenkel des Mittelpunktswinkels.



Verbinde C mit M und verlängere CM zum Durchmesser CD, dann gilt:
 Die Dreiecke AMC und BMC ist gleichschenkelig ($AM = BM = CM = r$).
 Nach dem Außenwinkelsatz gilt:

$$\angle DMB = 2(\angle DCB) \text{ und } \angle DMA = 2(\angle DCA)$$

Weiterhin gilt:

$$\angle AMB = \angle DMB - \angle DMA \text{ und } \angle ACB = \angle DCB - \angle DCA$$

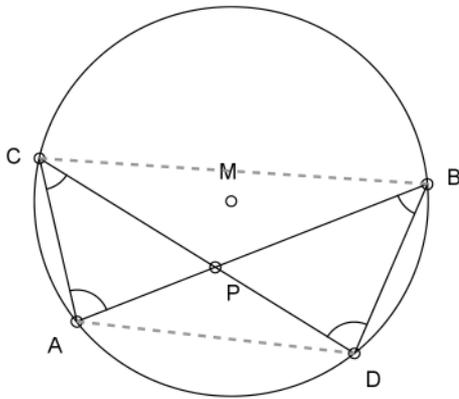
$$\Rightarrow \angle AMB = 2(\angle DCB - \angle DCA) = 2(\angle ACB)$$

qed

II.a. Der Sehnen-Satz³

Satz: Schneiden sich zwei Sehnen AB und CD in einem Punkt P im Inneren eines Kreise, so ist das Produkt der Sehnenabschnitte gleich.

Behauptung: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



Beweis:

$\angle CAB = \angle CDB$ (Umfangswinkel über CB)

$\angle ACD = \angle ABD$ (Umfangswinkel über AD)

\Rightarrow die Dreiecke APC und BPD sind ähnlich.

$\Rightarrow PB : PC = PD : PA$

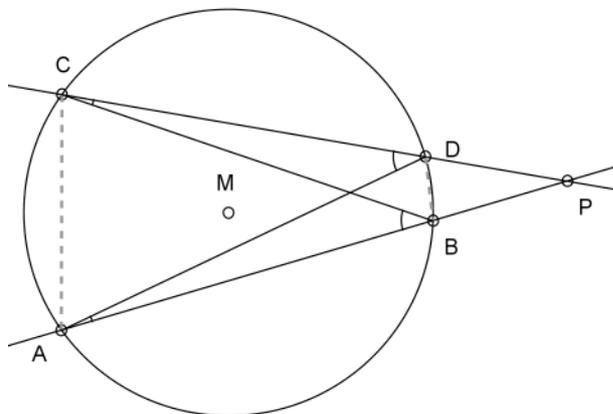
$\Leftrightarrow PA \cdot PB = PD \cdot PC$

qed

II.b. Der Sekanten-Satz⁴

Satz: Schneiden sich zwei Sekanten AB und CD außerhalb eines Kreises in P, so ist das Produkt der Sekantenabschnitte gleich.

Behauptung: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



³ vgl. Scheid/Schwarz, S. 40ff

⁴ vgl. Scheid/Schwarz, S. 40ff

Beweis:

$\angle BAD = \angle BCD$ (Umfangswinkel über BD)

$\angle BPD$ ist gemeinsamer Winkel

\Rightarrow die Dreiecke PAD und PBC sind ähnlich,
daher gilt: $PD : PB = PA : PC$

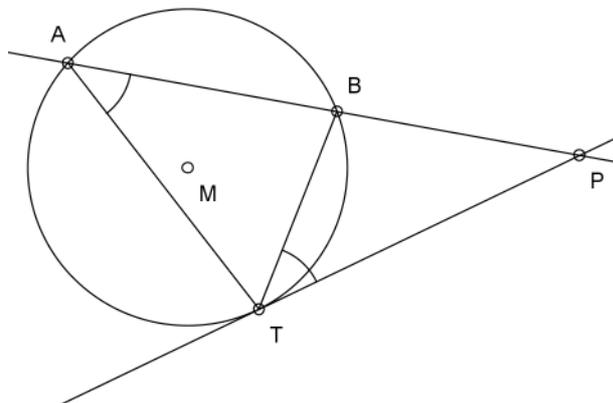
$\Leftrightarrow PA \cdot PB = PD \cdot PC$

qed

II.c. Der Sekanten-Tangenten-Satz⁵

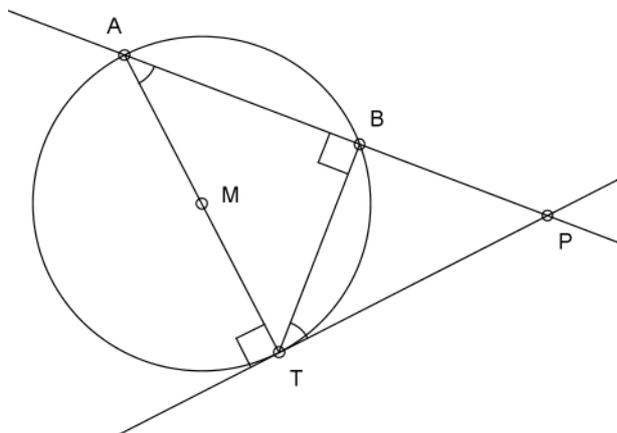
Dieser Satz ist grundlegend für das gesamte Apollonische Berührproblem, da er sowohl in den elementargeometrischen Lösungen eine wichtige Rolle spielt, als auch die Inversion am Kreis maßgeblich begründet.

Satz: Schneiden sich eine Sekante AB und eine Tangente in einem Punkt P, dann ist das Produkt der Sekantenabschnitte gleich dem Quadrat des Tangentenabschnitts.



Behauptung: $PA \cdot PB = PT^2$

Das lässt sich zunächst in dem Sonderfall $M \in AT$, also AT ist Durchmesser, leicht zeigen:



⁵ vgl. Scheid/Schwarz, S. 40ff

Beweis:

$\angle TBA = 90^\circ$ (Thaleskreis über AT)

$\angle ATP = 90^\circ$ (Tangente orthogonal zum Radius)

$\Rightarrow \angle BAT = \angle BTP$ (Winkelsumme im Dreieck = 180°)

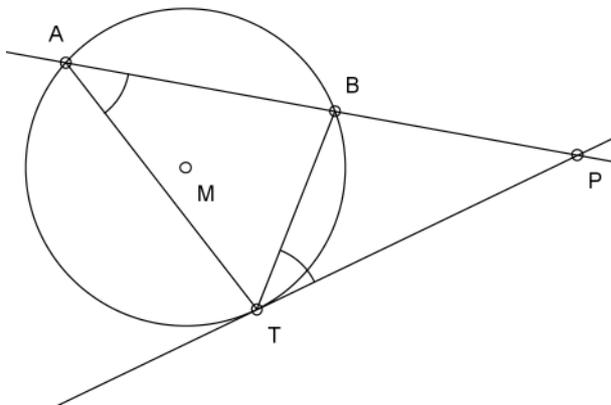
\Rightarrow die Dreiecke ATP und BTP sind ähnlich (denn $\angle BPT$ ist gemeinsamer Winkel)

daher gilt: $PT : PB = PA : PT$

$\Leftrightarrow PT^2 = PA \cdot PB$

Im allgemeinen Fall, wenn AT nicht Durchmesser des Kreises ist, gilt:

Seien B und T auf dem Umfang des Kreises festgelegt, dann ist $\angle BTP$ an BT durch die Tangente in T festgelegt (Tangente orthogonal zum Radius) und somit unabhängig von A und P.



$\angle BAT$ ist Umfangswinkel über der Sehne BT und nach dem Umfangswinkelsatz für alle Lagen von A konstant.

Also gilt, für jede Sekante AB, die die Tangente in P schneidet, und die somit Schenkel des Umfangswinkels über BT ist: $\angle BAT = \angle BTP$. (Damit ist auch gezeigt, dass der Sehnen-Tangenten-Winkel BTP gleich dem Umfangswinkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt ist.)

\Rightarrow die Dreiecke ATP und BTP sind ähnlich.

qed

III. Der Kathetensatz

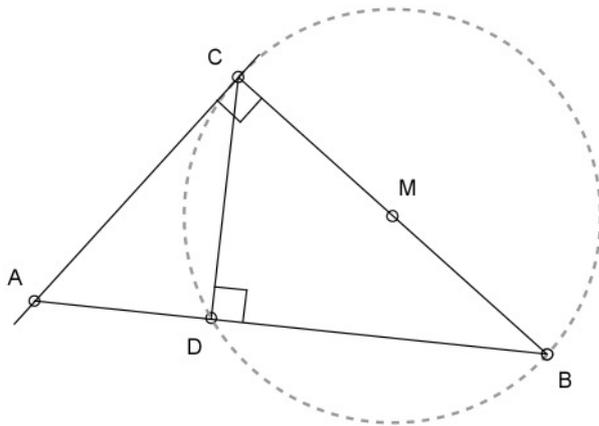
Satz: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Produkt aus Hypotenuse AB und Hypotenusenabschnitt AD gleich dem Quadrat über der dem Hypotenusenabschnitt anliegenden Kathete AC.

Interessant im Zusammenhang mit den Sätzen der Kreisgeometrie ist der Beweis des Kathetensatzes als Folgerung aus dem Sekanten-Tangenten-Satz.⁶

Voraussetzung: ein rechtwinkliges Dreieck ABC, Thaleskreis über BC, die Höhe CD auf AB

Behauptung: $AC^2 = AD \cdot AB$

⁶ s. Scheid/Schwarz, S. 43



Die Behauptung folgt aus dem Sekanten-Tangen-Satz

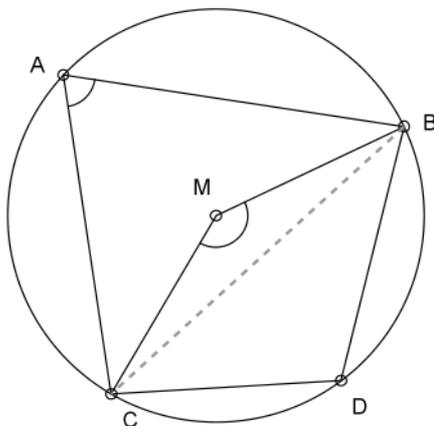
qed

IV. Der Satz vom Sehnenviereck⁷

Satz 1: In einem Sehnenviereck ABCD addieren sich gegenüberliegende Winkel zu 180° . Ebenso gilt die Umkehrung:

Satz 2: Addieren sich in einem Viereck ABCD gegenüberliegende Winkel zu 180° , dann existiert zu diesem Viereck ein Umkreis.

Zu 1.:

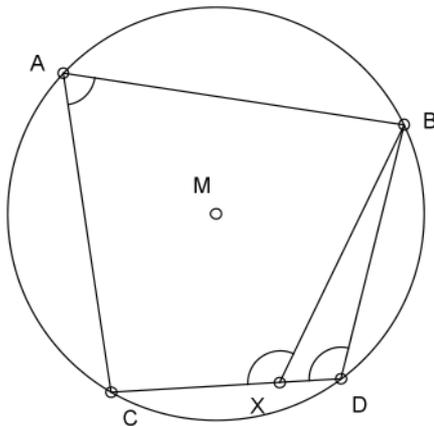


Die beiden Mittelpunktswinkel bei M ergeben zusammen 360° , also ergeben über der Sehne BC die beiden Umfangswinkel $\angle CAB$ und $\angle BDC$ nach dem Umfangswinkelsatz zusammen 180° . Das sind aber genau die gegenüberliegenden Winkel im Viereck ABCD. Nach dem Winkelsummensatz im Viereck ergeben die beiden anderen Winkel ebenfalls 180° .

qed

⁷ vgl. Ulrich, S. 79

Zu 2.:



In einem Viereck ABCD gilt: $\angle BDC + \angle CAB = 180^\circ$.

Durch A, B und C ist ein Kreis festgelegt.

Annahme: der Kreis geht nicht durch D, sondern schneidet CD oder die Verlängerung von CD in X. Dann wäre nach 1. $\angle BXC + \angle CAB = 180^\circ$,

also nach Voraussetzung $\angle BXC = \angle BDC$.

Das ist ein Widerspruch zum Außenwinkelsatz.

qed

V. Ähnlichkeitspunkte⁸

Im Fall CCP gelingt die Konstruktion des gesuchten Berührkreises mit Hilfe des äußeren Ähnlichkeitspunktes der beiden gegebenen Kreise.

Zur Klärung der Begriffe „äußerer“ und „innerer Ähnlichkeitspunkt“ ist neben ihrer Definition auch die Konstruktion dieser Punkte notwendig. Definiert sind diese Punkte als die Schnittpunkte der gemeinsamen äußeren bzw. inneren Tangenten zweier gegebener Kreise. Hier sollten die Kreise unterschiedliche Radien besitzen, da sich sonst die äußeren Tangenten nicht schneiden.

Bei der Konstruktion dieser Tangenten wird ein Verfahren deutlich, das auch später häufig genutzt wird, um ein Problem auf einen bereits gelösten Fall zu übertragen. Dieses Verfahren soll im weiteren „Veränderung von Kreisen durch Radiusreduktion bzw. Radiuserweiterung“ genannt werden. In der Literatur findet man in diesem Zusammenhang auch die sehr bildhaften Begriffe des „An- und Abschwellessens“ eines Kreises⁹.

Konstruktion:

Gegeben: Zwei Kreise a (A, r) und b (B, s), die sich nicht schneiden. Sei $r > s$ und b liegt nicht in a

Zunächst zur Konstruktion der äußeren Tangenten:

1. verbinde A und B über B hinaus
2. führe eine Veränderung des Kreises a durch Radiusreduktion aus, dazu:
3. Kreis a' um A mit $r' = r - s$

⁸ vgl. Ulrich, S. 84ff

⁹ vgl. Weinacht, S. 50

Wendet man diese Radiusreduktion ebenfalls auf b an, so „schrumpft“ b auf einen Kreis um B mit $s' = s - s$, also auf den Mittelpunkt B selbst zusammen. Damit hat man aber nun die Situation der Tangentenkonstruktion an zwei Kreise auf einen einfachen Fall gebracht, nämlich die Konstruktion der Tangenten von einem Punkt an einen Kreis.

Also konstruiere die beiden Tangenten von B an a' :

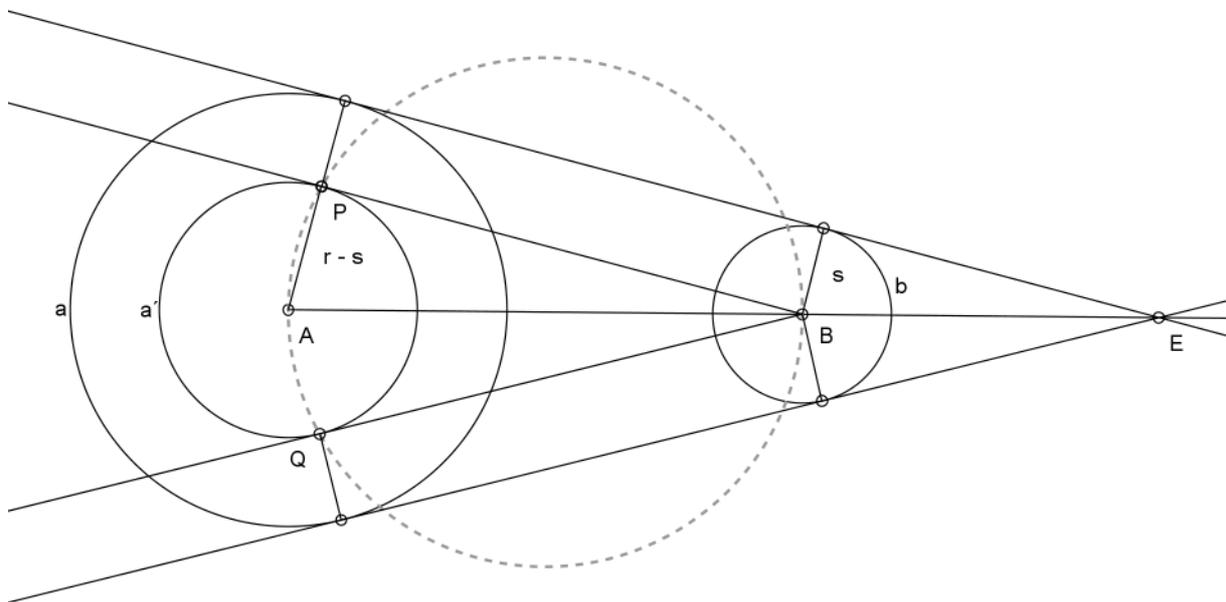
4. der Thaleskreis über der Strecke AB schneidet a' in P und Q

5. also sind BP und BQ Tangenten an a' durch B

Da beide ursprünglichen Kreise a und b um den gleichen Radius s reduziert wurden, gilt

6. die Parallelen zu BP und BQ , die im Abstand s a und b berühren, sind die gesuchten Tangenten

7. die Tangenten schneiden sich im äußeren Ähnlichkeitspunkt E auf der Geraden AB



Zur Konstruktion der inneren Tangenten:

1. Verbinde A und B

2. führe eine Veränderung des Kreises a durch Radiusvergrößerung aus, dazu:

3. Kreis a' um A mit $r' = r + s$

Auch hier wird die Situation der Tangentenkonstruktion an zwei Kreise auf den Fall der Tangentenkonstruktion von einem Punkt an einen Kreis gebracht.

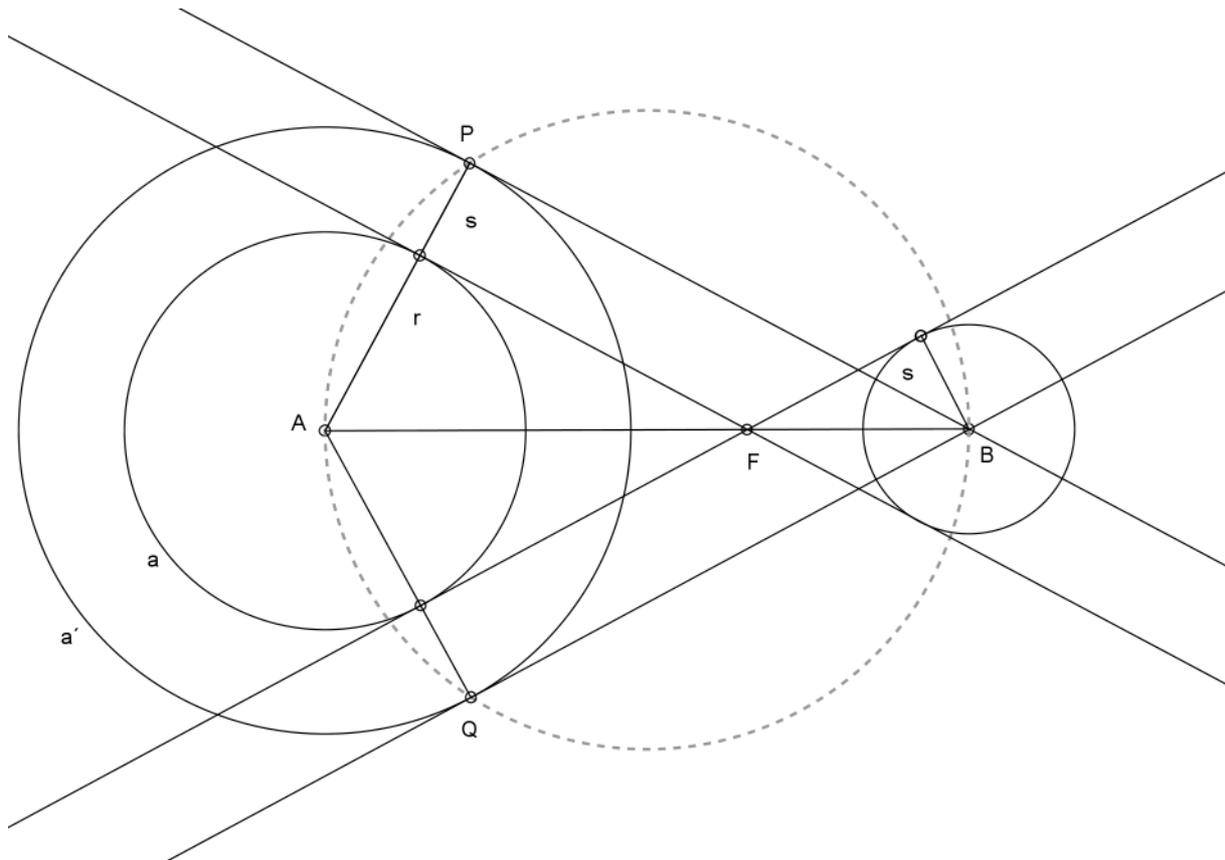
Also konstruiere die beiden Tangenten von B an a' :

4. der Thaleskreis über AB schneidet a' in P und Q

5. also sind BP und BQ Tangenten an a' durch B

6. die Parallelen zu BP und BQ , die im Abstand s a und b berühren, sind die gesuchten Tangenten

7. die Tangenten schneiden sich im inneren Ähnlichkeitspunkt F auf der Trägergeraden von AB



Man erkennt in beiden Konstruktionszeichnungen die Strahlensatzfiguren, die zeigen, dass die Punkte E und F die Zentren der Streckungen sind, aus denen a und b hervorgehen. Somit sind die Kreise bezüglich E und F ähnlich, und diese Tatsache verleiht eben diesen Punkten ihre Namen. Damit gelten auch alle Beziehungen und Verhältnisse der Strahlensätze für die entsprechenden Tangenten- und Sekantenabschnitte der Kreise a und b.

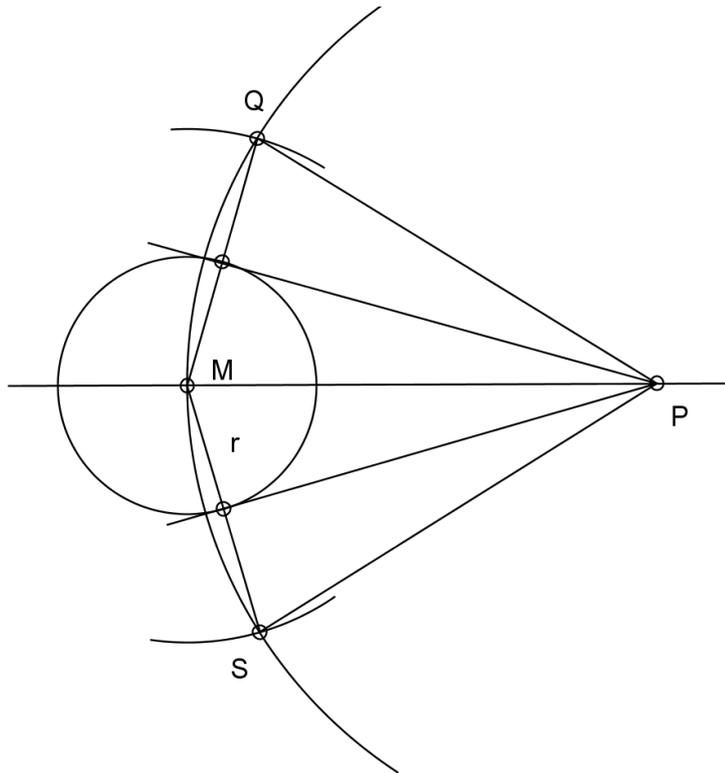
Bemerkung: Eine alternative, ebenfalls interessante Konstruktion der Tangenten von einem Punkt an einen Kreis findet sich bei Holtmann¹⁰. Dabei werden die Eigenschaften des gleichschenkligen Dreieck ausgenutzt:

Gegeben: ein Kreis k (M, r), ein Punkt P außerhalb des Kreises.

1. verbinde M und P
2. Kreis um P mit Radius PM
3. Kreis um M mit $2r$
4. diese Kreise schneiden sich in den Punkten Q und S
5. die Mittelsenkrechten auf MQ und MS , also auf den Basen der gleichschenkligen Dreiecke MPQ und MPS , sind die gesuchten Tangenten von P an k

Diese Konstruktion nutzt die Tatsache aus, dass im gleichschenkligen Dreieck die Mittelsenkrechte der Basis durch den gegenüberliegenden Punkt verläuft.

¹⁰ vgl. Holtmann, S. 65



VI. Die Potenzgerade, auch Chordale genannt

Bei der Betrachtung der Beziehung, die zwei Kreise miteinander haben können, ist im Zusammenhang mit dem Berührproblem die sog. Potenzgerade zu nennen und zu untersuchen. Insbesondere deswegen, weil C. Hellwig 1856 eine umfassende Lösung aller Teilprobleme in verschiedenen Lagen ausschließlich auf die Theorie der Ähnlichkeitspunkte und der Potenzörter, womit die Potenzgeraden gemeint sind, aufbaut und „leicht fasslich“ darstellt¹¹. Hellwig arbeitet jedoch diese Theorie so umfangreich aus, so dass diese in Gänze nachzuvollziehen den Rahmen der vorliegenden Arbeit, die die Vielfalt der Lösungsansätze darstellen und nicht nur auf einen Ansatz fokussieren möchte, sprengen würde. Aber in den folgenden Elementarkonstruktionen finden sich im Zusammenhang mit dem Tangenten-Sekanten-Satz und dem Sekantensatz immer wieder Hinweise auf die Eigenschaften der Potenzgeraden.

Definition:

Die Potenzgerade ist der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus die Tangentenabschnitte an zwei gegebene Kreise gleich lang sind.

Diese Definition folgt aus dem Beweis des Satzes:

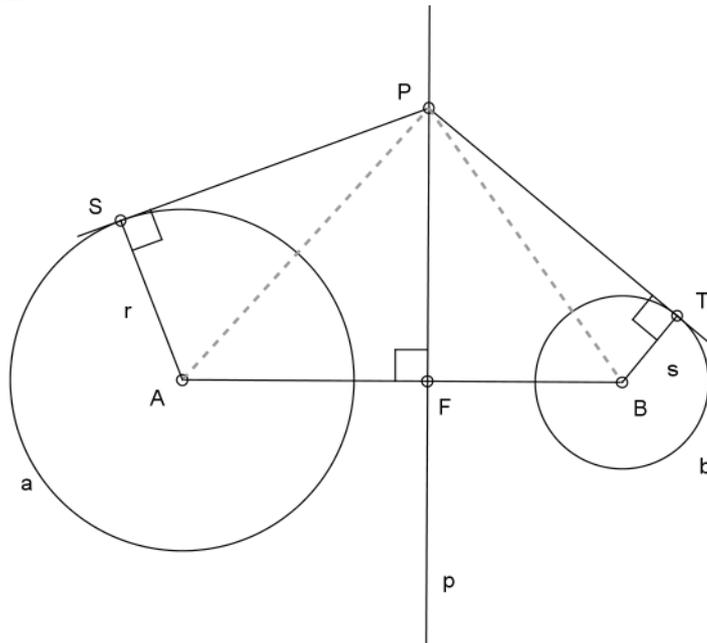
Die Menge aller Punkte, von denen aus die Tangentenabschnitte an zwei gegebene Kreise gleich lang sind, liegen auf einer Geraden¹².

An dieser Stelle ist es sinnvoll, parallel zur Beweisführung, alle möglichen Lagen zu betrachten, die zwei Kreise zueinander einnehmen können. Es ist zu zeigen, dass die Eigenschaften der Potenzgeraden unabhängig von den jeweiligen Lagen der Kreise sind. Dazu werden im folgenden sechs Fälle unterschieden.

¹¹ ebd.

¹²vgl. Scheid/Schwarz, S. 48 ff

1. Fall:



Seien zwei Kreise a (A, r) und b (B, s) gegeben, die weder ineinander liegen, noch sich berühren oder schneiden, und ein weiterer Punkt P , von dem aus die Tangentenabschnitte an die beiden Kreise gleich lang sind. Berührungspunkte dieser Tangenten sind S und T (also $PS = PT$). Weiterhin sei F der Fußpunkt des Lotes von P auf die Zentrale AB der beiden Kreise, Trägergerade des Lotes sei p .

Mit den Hilfslinien $AP, AS (= r), BT (= s)$ und BP lassen sich vier rechtwinklige Dreiecke erkennen, nämlich APS, AFP, BTP und BPF .

Mit dem Satz des Pythagoras gelten folgende Beziehungen:

$$r^2 + SP^2 = AP^2 = AF^2 + FP^2 \quad \text{und} \quad s^2 + TP^2 = BP^2 = BF^2 + FP^2$$

Daraus erhält man

$$AF^2 = r^2 + SP^2 - FP^2 \quad \text{und} \quad BF^2 = s^2 + TP^2 - FP^2$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen folgt

$$AF^2 - BF^2 = r^2 - s^2, \quad \text{da nach Voraussetzung die Tangentenabschnitte gleich sind.}$$

Mit den beiden Gleichungen $(AF + BF)(AF - BF) = r^2 - s^2$ und $AF + BF = AB$ lassen sich die beiden Abschnitte AF und BF auf der Zentralen unabhängig von P eindeutig bestimmen. Also ist F immer Lotfußpunkt der Lote, die von allen Punkten P , von denen aus die Tangentenabschnitte an die gegebenen Kreise gleich lang sind, auf AB gefällt werden. Diese Punkte liegen somit auf der Lotgeraden bzw. Senkrechten p zu AB in F .

Diese Gerade heißt Potenzgerade.

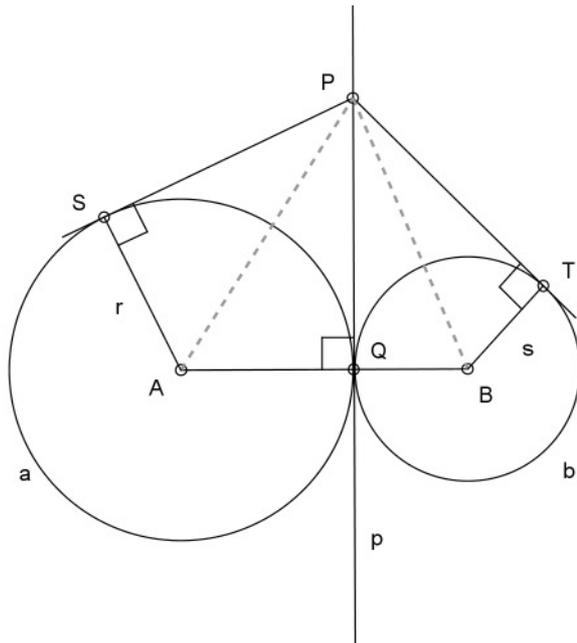
Es gilt die Beziehung $SP^2 = AP^2 - r^2$ (Pythagoras).

Bei Ulrich¹³ findet sich die Definition der Potenzlinie als die Menge aller Punkte P , für die diese Beziehung gilt. Er nennt sie die Punkte P , die dieselbe Potenz haben.

Interessant ist hier der Zusammenhang zum Tangenten-Sekanten-Satz, der bei Umformung der Gleichung in $SP^2 = (AP + r)(AP - r)$, (3. binomische Formel) sichtbar wird.

¹³vgl. Ulrich, S. 260

2. Fall:

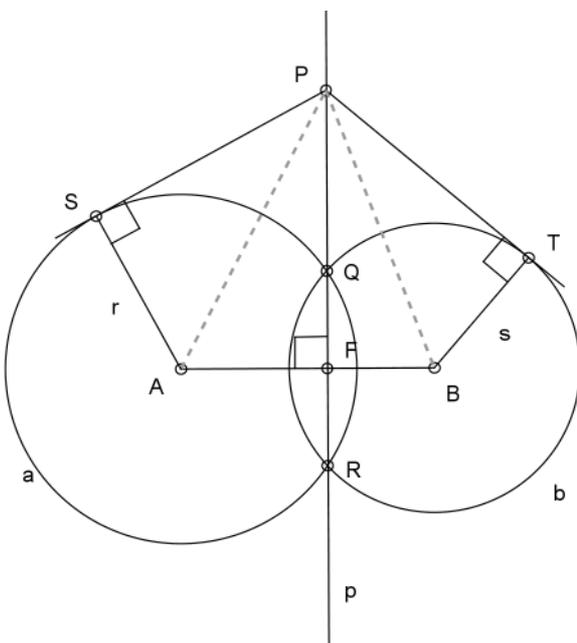


Seien zwei Kreise a (A, r) und b (B, s) gegeben, die sich in einem Punkt Q berühren und ein weiterer Punkt P wie oben.

Dann liegt P auch auf der gemeinsamen Tangente p der beiden Kreise, da die beiden Tangenten von einem Punkt an einen Kreis gleichlang sind (s. Konstruktion). Da sich die beiden Kreise in einem Punkt Q berühren, fallen die inneren Tangenten von P an die Kreise immer mit p zusammen.

Somit ist p die Menge aller Punkte, die dieselbe Potenz haben und daher ist p Potenzgerade zu den beiden Kreisen a und b .

3. Fall:



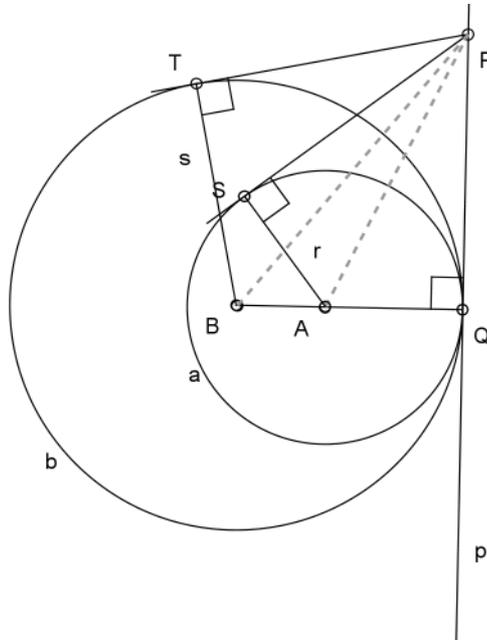
Seien zwei Kreise a (A, r) und b (B, s) gegeben, die sich in den Punkten Q und R schneiden, und ein weiterer Punkt P wie oben.

In diesem Fall verläuft die Argumentation völlig analog zum 1. Fall. Für die Punkte Q und R , die ebenfalls auf der Potenzgeraden liegen, wie sich durch den Tangenten-Sekanten-Satz

leicht zeigen lässt, gilt speziell $P = Q$ und $P = R$ mit der Länge der entsprechenden Tangentenabschnitte gleich 0.

Die Tatsache, dass die Potenzgerade zweier sich schneidender Kreise die Trägergerade der gemeinschaftlichen Sehne ist, vereinfacht ihre Konstruktion erheblich, wie später zu sehen sein wird.

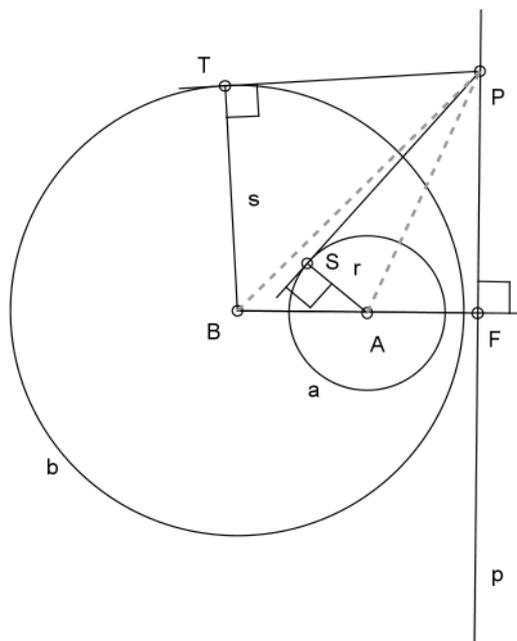
4. Fall:



Seien zwei Kreise $a(A, r)$ und $b(B, s)$ gegeben mit $s > r$, wobei a im Inneren von b liegt und b in einem Punkt Q berührt und ein weiterer Punkt P wie oben.

Dann lässt sich durch Spiegelung an p die Situation aus Fall 2 herstellen und der Beweis verläuft analog.

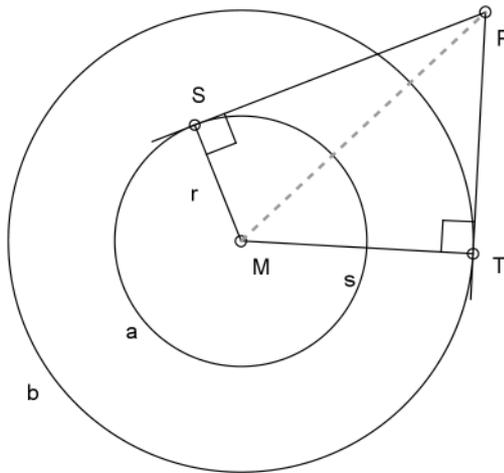
5. Fall:



Seien zwei Kreise $a(A, r)$ und $b(B, s)$ gegeben mit $s > r$, wobei a im Inneren von b liegt und b nicht berührt und weiterer Punkt P wie oben.

Hier lässt sich durch Spiegelung an p die Situation aus Fall 1 herstellen (Beweis analog).

6. Fall:



Seien zwei konzentrische Kreise $a(M, r)$ und $b(M, s)$ gegeben mit $s > r$, so existiert kein Punkt P mit den genannten Eigenschaften.

Denn angenommen es existiert ein Punkt P mit gleich langen Tangentenabschnitten $PS = PT$ an die gegebenen Kreise, so muss gelten: $PS^2 + r^2 = MP^2$ und zugleich $PT^2 + s^2 = MP^2$ woraus (mit $PS = PT$) $r = s$ folgt, was der Voraussetzung widerspricht.

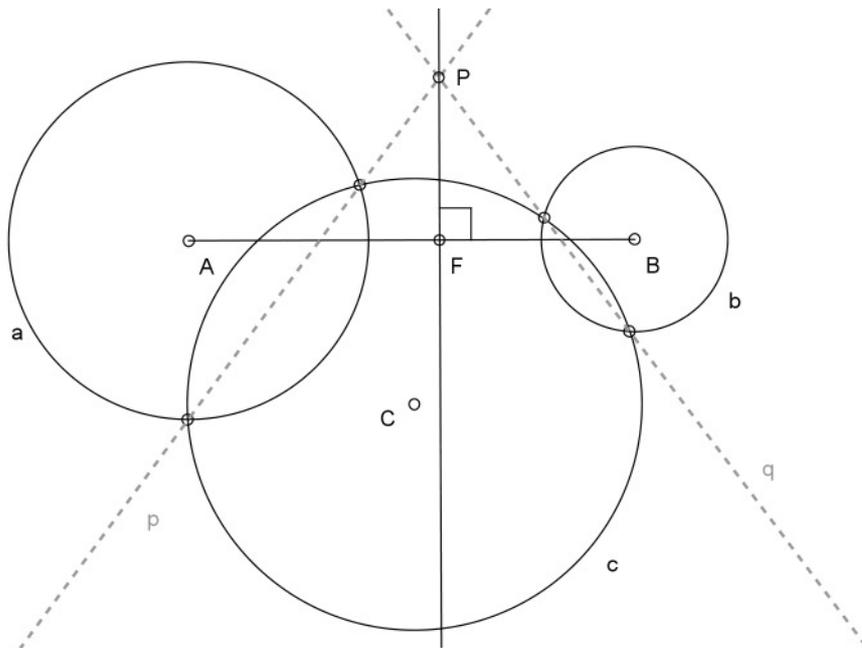
Also existiert zu konzentrischen Kreisen keine Potenzgerade.

Konstruktion:

Zur Konstruktion der Potenzlinie zweier sich nicht schneidender Kreise stützt man sich im wesentlichen auf die im Fall 3 gewonnene Erkenntnis.

Zunächst betrachtet man die beiden Potenzgeraden p und q von je zwei aus drei sich paarweise schneidenden Kreisen a, b, c , deren Mittelpunkte A, B, C nicht kollinear sind. p und q schneiden sich in P . Somit haben die Tangentenabschnitte von P an die Kreise a und b die gleiche Länge wie die von P an die Kreise b und c , woraus folgt, dass die Tangentenabschnitte von P an die Kreise a und c ebenfalls gleich lang sind. P heißt Potenzpunkt der Kreise a, b und c .

Seien nun die beiden Kreise $a(A, r)$ und $b(B, s)$ gegeben, so konstruiere den Hilfskreis $c(C, t)$ so, dass C nicht auf der Zentralen AB liegt, aber a und b von c geschnitten werden. Damit lassen sich die Potenzgeraden p und q mit ihrem Schnittpunkt P wie oben konstruieren. Die Lotgerade durch P auf AB ist die Potenzgerade zu a und b .



Damit stehen ausreichend Sätze zur Verfügung, um sämtliche Teilprobleme des Apollonischen Berührproblems begründet elementargeometrisch zu lösen.

2.2. Konstruktionen der einzelnen Fälle

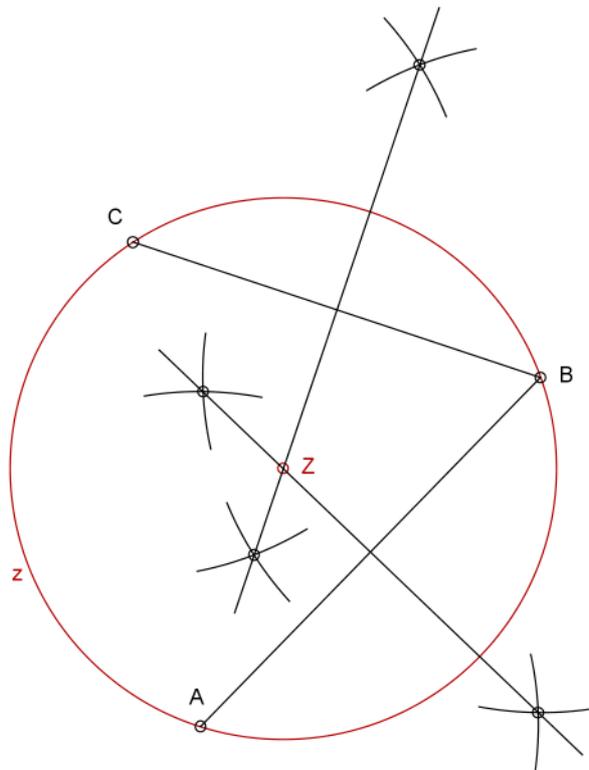
PPP

Hier liegt der Fall des Umkreises des Dreiecks vor, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf den Dreiecksseiten ist. Der gefundene Kreis ist die einzige Lösung dieses Falls.

Konstruktion:

Gegeben: drei nicht kollineare Punkte A, B, C

1. zeichne AB und BC.
2. errichte die Mittelsenkrechten auf den einzelnen Strecken.
3. deren Schnittpunkt ist der Mittelpunkt Z des gesuchten Berührkreises z



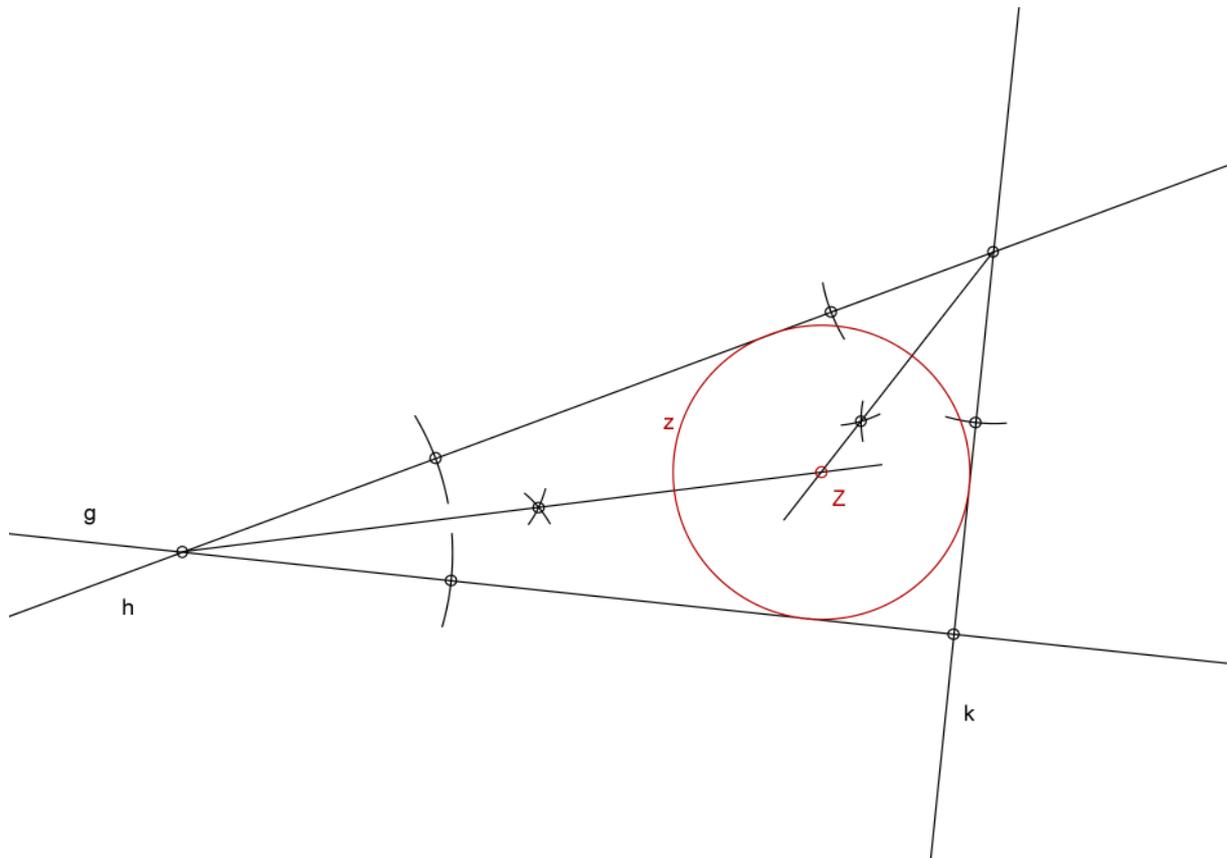
LLL

Hier liegt zunächst der Fall des Inkreises im Dreiecks vor, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist.

Konstruktion:

Gegeben: drei Geraden g , h und k , die sich nicht in einem Punkt schneiden und keine zwei parallel sind. Also bilden die Geraden ein Dreieck.

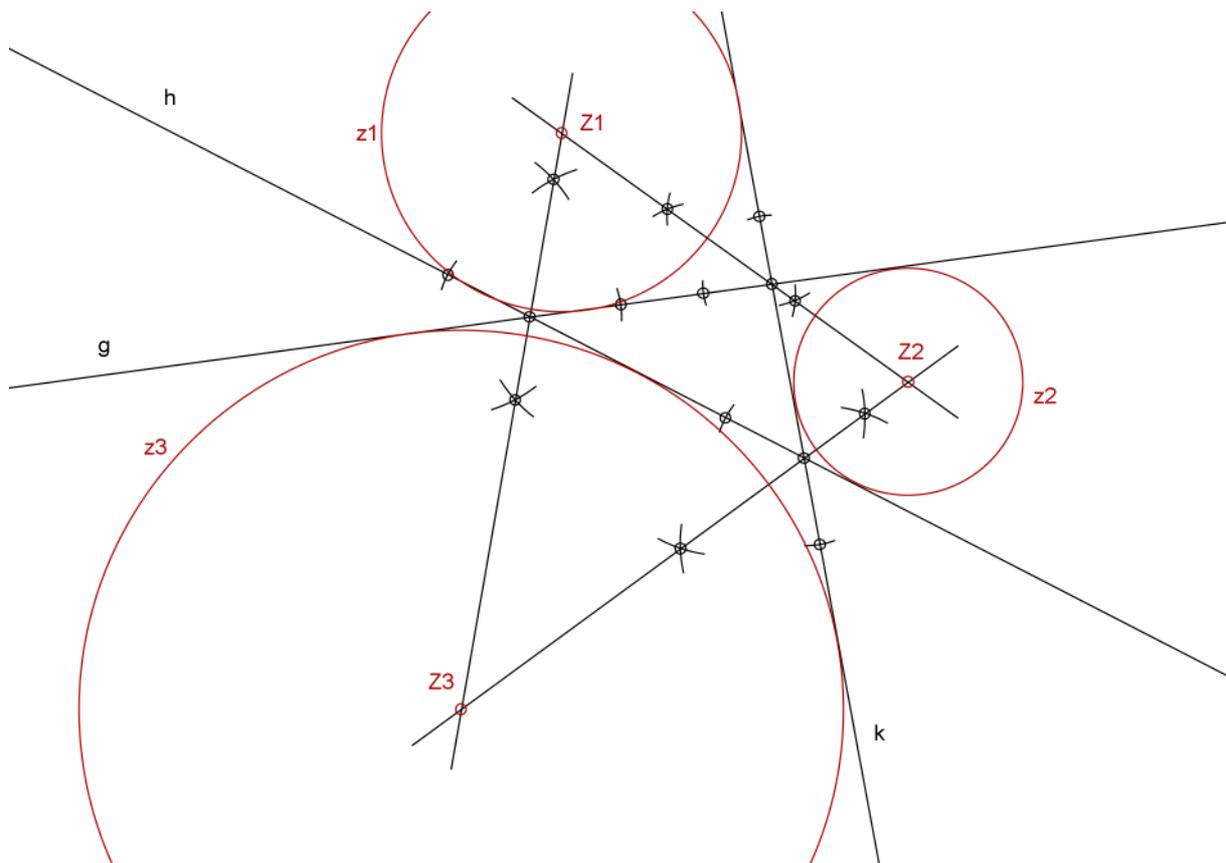
1. konstruiere die Winkelhalbierenden der Innenwinkel
2. deren Schnittpunkt ist der Mittelpunkt Z des gesuchten Berührkreises z



Darüber hinaus existieren weitere drei Kreise außerhalb des Dreiecks, die sog. Ankreise

Konstruktion:

1. konstruiere die Winkelhalbierenden der Außenwinkel
2. deren Schnittpunkte sind die Mittelpunkte der gesuchten Kreise



Bemerkung: Schneiden sich die Geraden in einem Punkt oder sind alle drei parallel, so existiert keine Lösung. Sind zwei Geraden parallel und die dritte schneidet diese, so existieren zwei Lösungen.

PPL¹⁴

Dieser Fall wird wegen seiner Einfachheit, aber auch wegen der Vielfalt seiner Aspekte an dieser Stelle ausführlich behandelt.

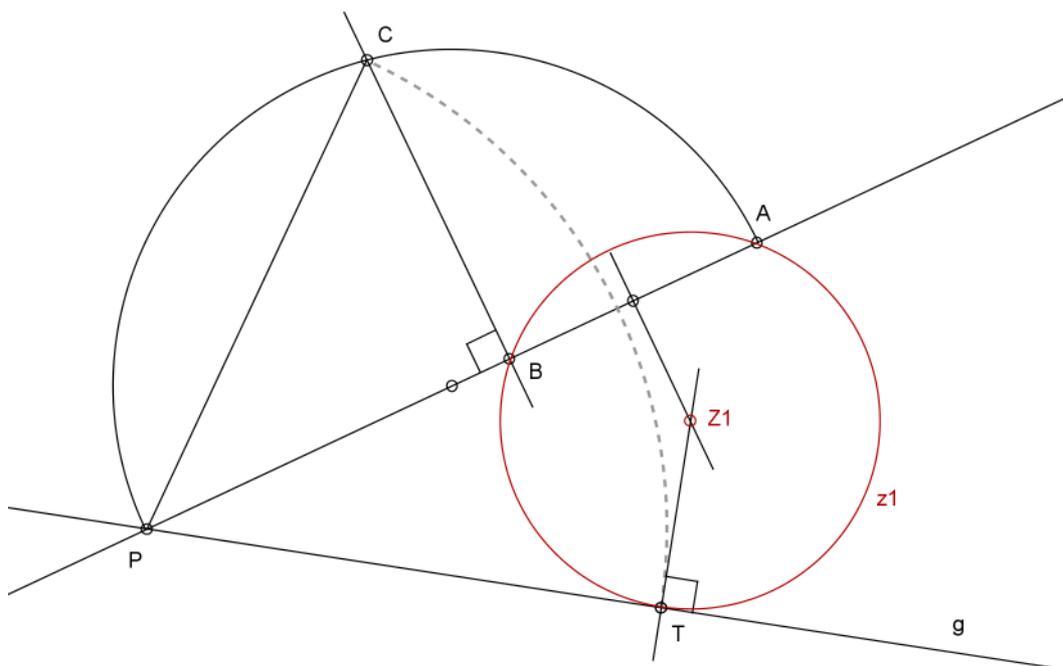
Zunächst liegt hier genau die Situation des Sekanten-Tangenten-Satzes vor. Man erkennt die Wichtigkeit dieses Satzes daran, dass die Lösungen vieler weiterer Fälle auf genau diesen Fall zurück geführt werden können.

Konstruktion:

Gegeben: eine Gerade g , zwei Punkte A und B , die nicht auf dieser Geraden liegen.

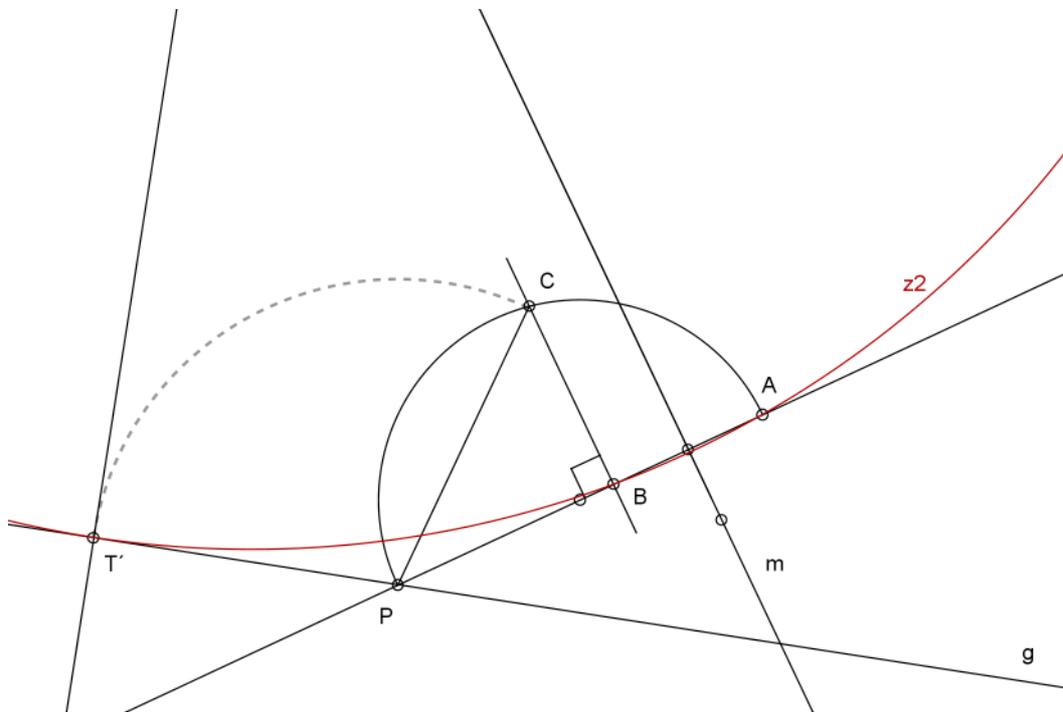
Die Verbindungsgerade der Punkte A und B sei nicht parallel zu g . Die Punkte A und B liegen in der selben Halbebene.

1. verbinde A und B , so dass die Verbindungsgerade g in P schneidet
2. erste Ortslinie für den Mittelpunkt Z_1 des gesuchten Kreises ist die Mittelsenkrechte der Strecke AB
3. nach dem Sekanten-Tangenten-Satz gilt für den Berührungspunkt T von g und dem gesuchten Kreis: $PA \cdot PB = PT^2$
4. finde PT durch den Kathetensatz im rechtwinkligen Dreieck. Dazu:
5. der Thaleskreis über PA und die Senkrechte in B schneiden sich in C .
Es gilt: $PA \cdot PB = PC^2 \Rightarrow PC$ hat die Länge PT
6. Kreis um P mit Radius PC schneidet g in T
7. die Senkrechte in T auf g schneidet die Mittelsenkrechte von AB , da AB nicht parallel zu g ist
8. dieser Schnittpunkt ist der Mittelpunkt Z_1 des gesuchten Berührungskreises z_1



¹⁴ vgl. Ulrich, S. 242

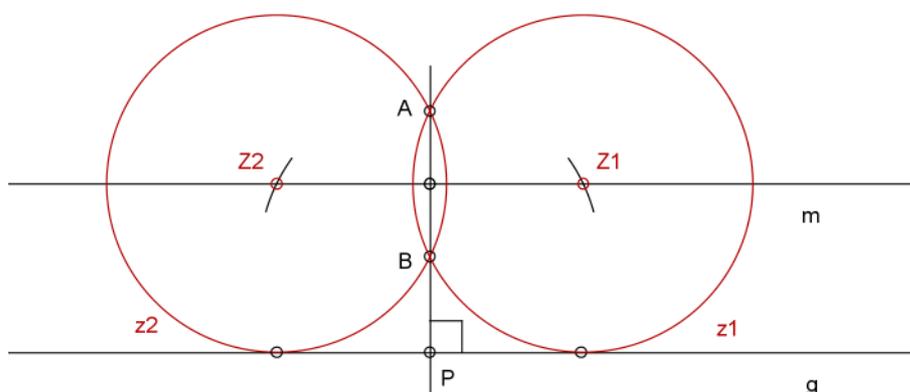
Trägt man die Strecke PC zur anderen Seite von P auf g ab, so erhält man den zweiten Berührkreis z2, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Senkrechten in T' mit der Mittelsenkrechten m von AB ist.



Weiterhin ist hier die Betrachtung von zwei Sonderfällen von Interesse, da sich diese recht einfach lösen lassen:

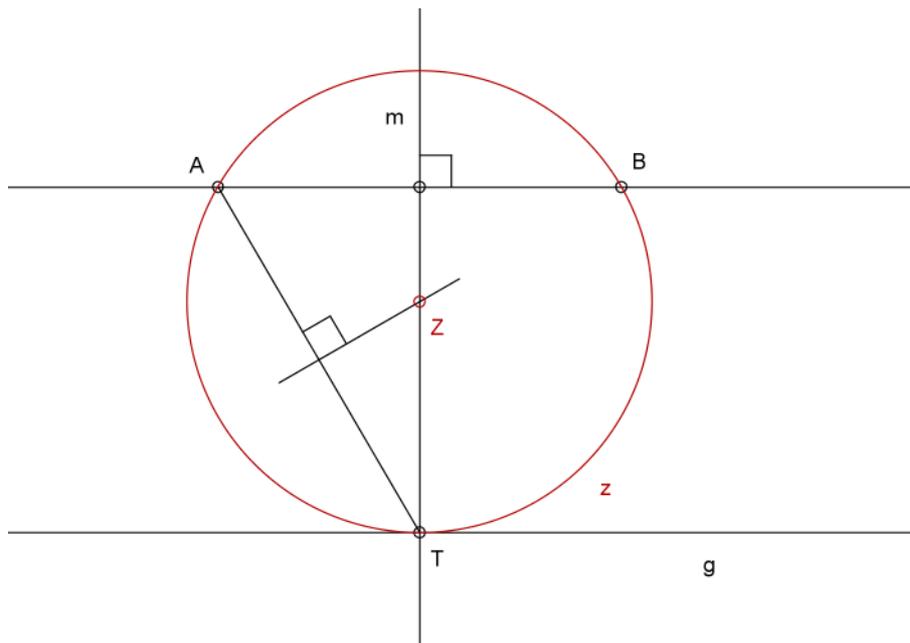
Zunächst der Fall, dass die Verbindungsgerade von AB orthogonal zur Geraden g steht.

1. verbinde A und B, so dass die Verbindungsgerade g in P schneidet
2. errichte die Mittelsenkrechte m auf AB
3. der Radius der gesuchten Kreise z (Z, r) ist der Abstand r dieser Mittelsenkrechten m zu g
4. ein Kreis um A oder B mit Radius r schneidet m in zwei Punkten, den Mittelpunkten Z_1 und Z_2 der gesuchten Berührkreise



Der zweite Sonderfall liegt vor, wenn die Verbindungsgerade von AB parallel zu g ist. In diesem Fall existiert jedoch nur eine Lösung. Auch führt hier der Sekanten-Tangenten-Satz nicht weiter, da der Punkt P nicht existiert.

1. zeichne die Verbindungsgerade von AB
2. errichte auf AB die Mittelsenkrechte m, die g in T schneidet (an dieser Stelle liegt die Situation PPP vor)
3. verbinde T mit A (oder B)
4. die Mittelsenkrechte auf AT schneidet m in dem Punkt Z
5. der Kreis z um Z mit Radius ZT ist der gesuchte Berührkreis

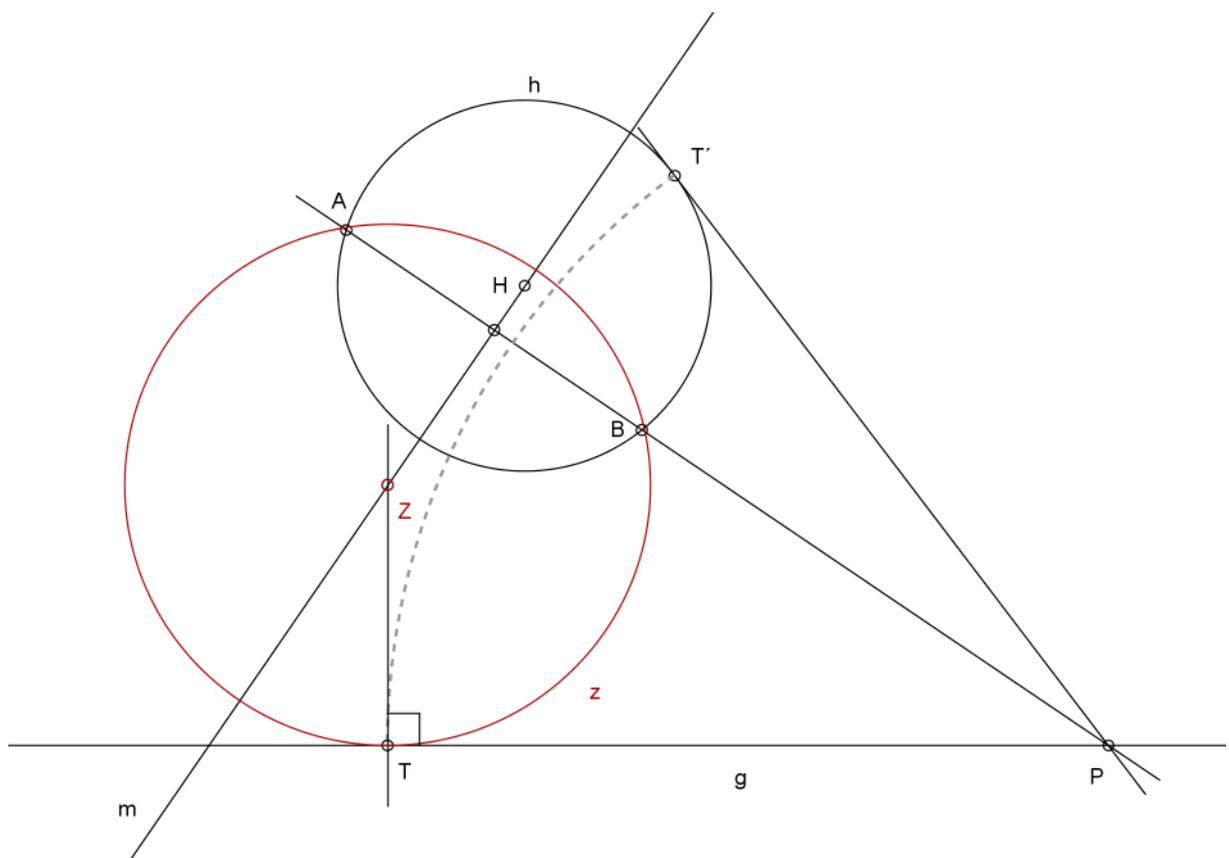


Eine andere Lösung des allgemeinen Falls findet sich bei Hellwig¹⁵, der die Verbindungsgerade von A und B als die Potenzgerade eines Hilfskreises und des gesuchten Kreises interpretiert.

Konstruktion:

Gegeben: eine Gerade g , zwei Punkte A und B, die nicht auf dieser Geraden liegen.
Die Verbindungsgerade der Punkte A und B sei nicht parallel zu g . Die Punkte A und B liegen in der selben Halbebene.

1. verbinde A und B, so dass die Verbindungsgerade g in P schneidet
2. erste Ortslinie für den Mittelpunkt Z des gesuchten Kreises ist die Mittelsenkrechte m der Strecke AB
3. zeichne einen Hilfskreis h mit Mittelpunkt H auf m , der durch A und B geht
4. zeichne eine Tangente von P an h , Berührungspunkt sei T'
5. ist die Gerade AB Potenzgerade zu h und dem gesuchten Kreis z , so sind die Tangentenabschnitte PT' und PT gleich lang (T ist der Berührungspunkt an der Tangente von P an z)
6. der Kreis um P durch T' schneidet g in T
7. die Senkrechte zu g in T schneidet m im Mittelpunkt Z von z



Trägt man PT' zur anderen Seite von P ab, findet man den zweiten Berührungskreis.

¹⁵ vgl. Hellwig, S. 39

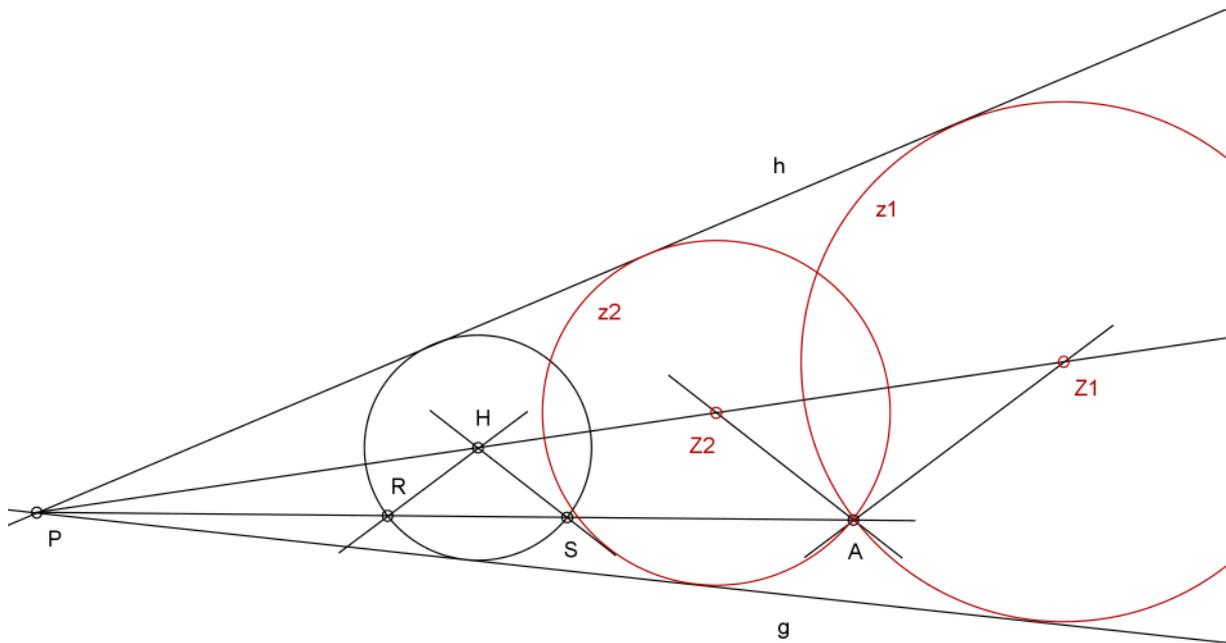
PLL¹⁶

In diesem Fall werden die Eigenschaften der zentrischen Streckung ausgenutzt.

Konstruktion:

Gegeben: zwei Geraden g und h , die sich in P schneiden und ein Punkt A , der weder mit g noch mit h inzidiert

1. erste Ortslinie für den Mittelpunkt Z des gesuchten Kreises z ist die Winkelhalbierende zwischen den Halbgeraden von g und h , in deren Winkelfeld der Punkt A liegt
2. konstruiere einen Hilfskreis mit Mittelpunkt H auf der Winkelhalbierenden, der die beiden Geraden berührt
3. verbinde P und A
4. die Gerade PA schneidet den Hilfskreis in R und S
5. zeichne die Strecken RH und SH
6. die Parallele zu RH durch A schneidet die Winkelhalbierende im Mittelpunkt Z_1 des gesuchten Berührkreises z_1 (Z_1, Z_1A), die Parallele zu SH durch A schneidet die Winkelhalbierende im Mittelpunkt Z_2 des zweiten Berührkreises z_2 (Z_2, Z_2A)

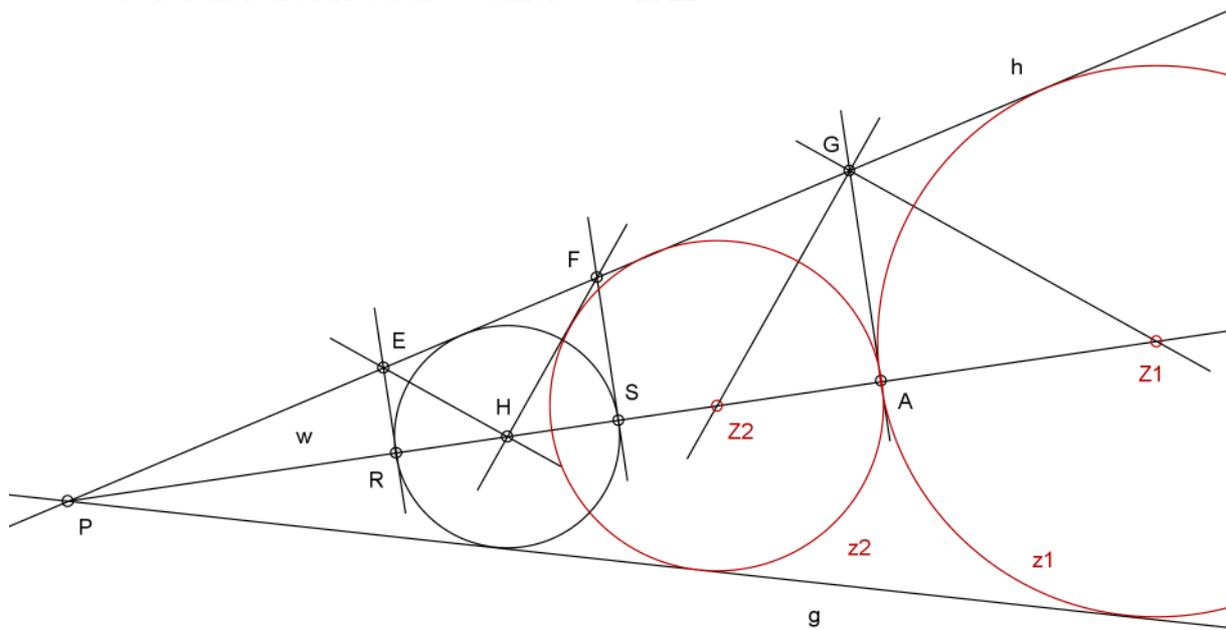


Bemerkung: Liegt der Punkt A auf einer der beiden gegebenen Geraden, so ist der Mittelpunkt Z des (in diesem Fall einzigen) Berührkreises z der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der Senkrechten in A .

¹⁶ vgl. Ulrich, S. 163

Liegt A auf der Winkelhalbierenden w, so ist etwas anders zu verfahren:

1. nach Konstruktion der Winkelhalbierenden w ist ersichtlich, dass A auf w liegt
2. konstruiere einen Hilfskreis mit Mittelpunkt H auf w, der die beiden Geraden berührt
3. der Hilfskreis schneidet w in R und S
4. errichte die Senkrechten zu w in R und S, die h in E und F schneiden
5. errichte die Senkrechte zu w in A, die h in G schneidet
6. die Parallele zu EH durch G schneidet w in Z₁
7. die Parallele zu FH durch G schneidet w in Z₂



CLL

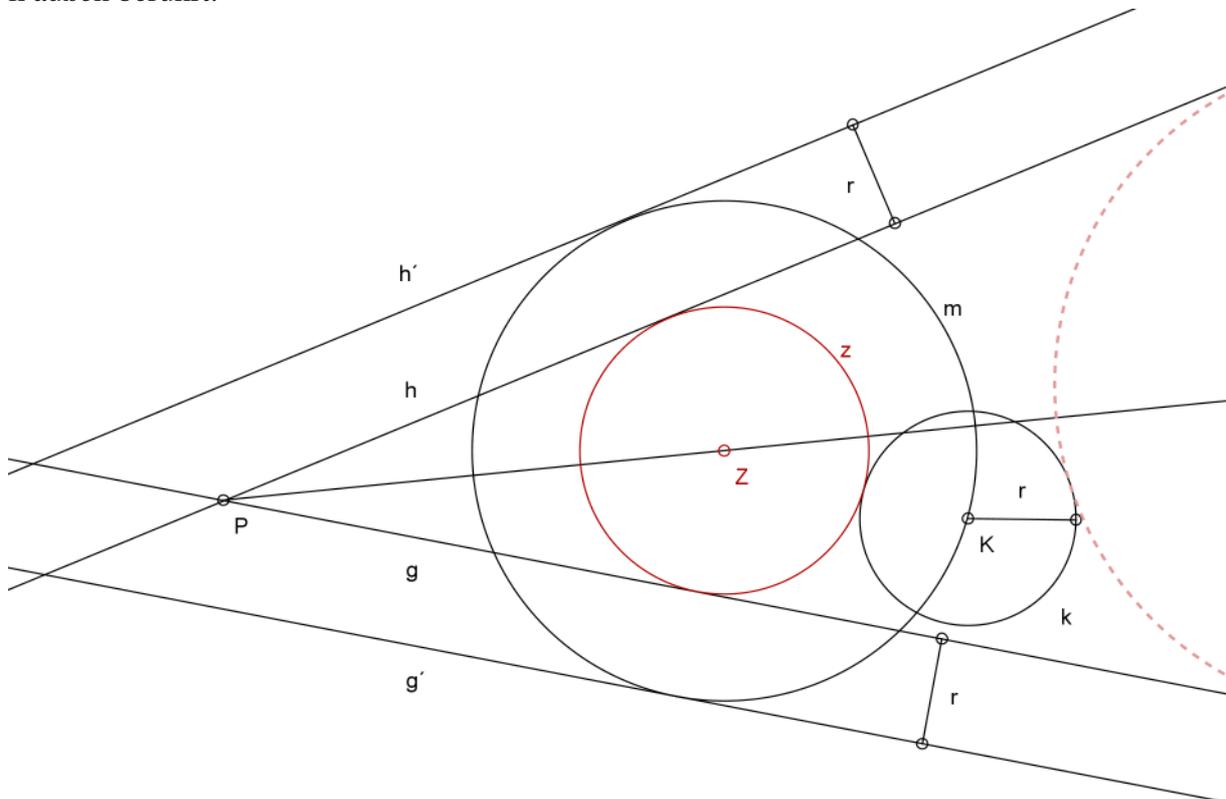
Dieser Fall lässt sich durch Radiusreduktion, bzw. Radiuserweiterung auf den Fall PLL zurückführen.

Konstruktion:

Gegeben: zwei nicht parallele Geraden g und h , ein Kreis k (K, r), der keine der Geraden schneidet.

1. zeichne im Abstand r die Parallele g' zu g in der Halbebene, die k nicht enthält und die Parallele h' zu h in der Halbebene, die k nicht enthält
2. verfähre nun mit g' , h' und K wie im Fall PLL und finde den Kreis m (Z, ZK)
3. reduziere den Radius ZK des gefundenen Kreises um r
4. der Kreis z ($Z, ZK - r$) ist der gesuchte Kreis, der den gegebenen von außen berührt

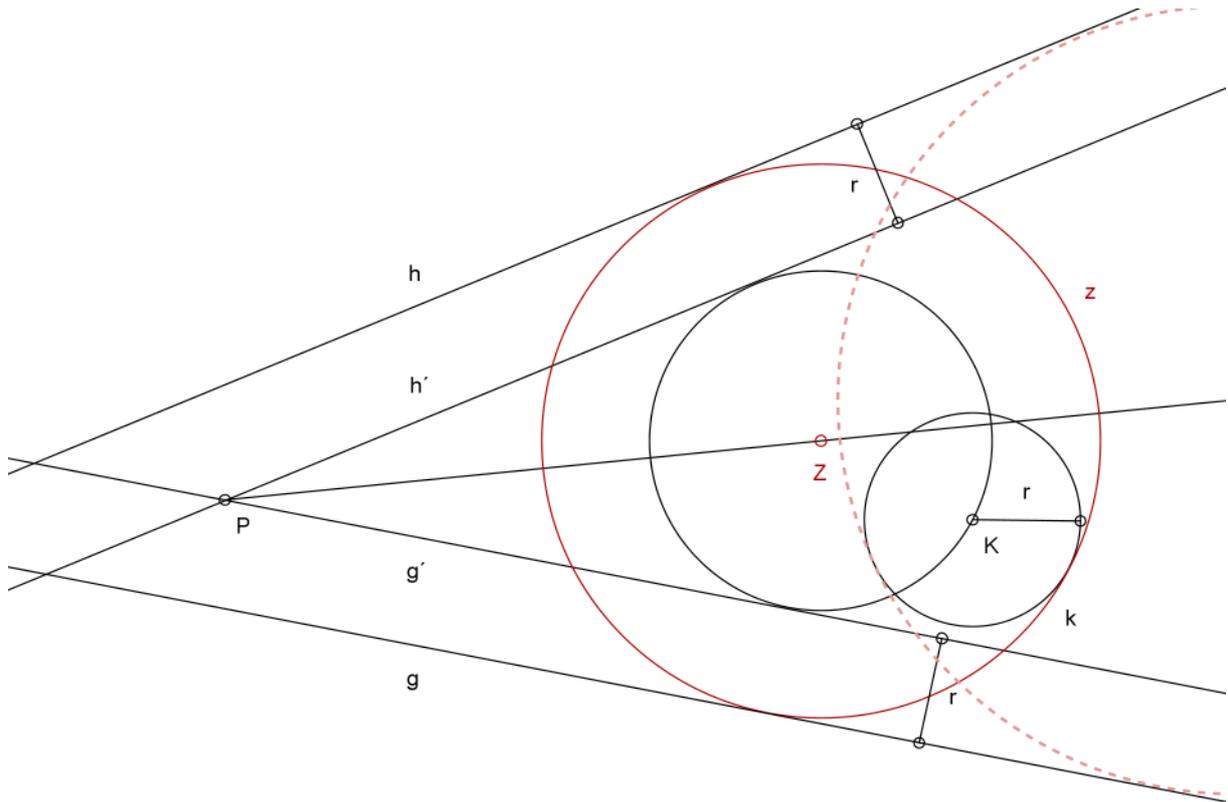
Da der Fall PLL zwei Lösungen hat, findet man wie beschrieben auch den anderen Kreis, der k außen berührt.



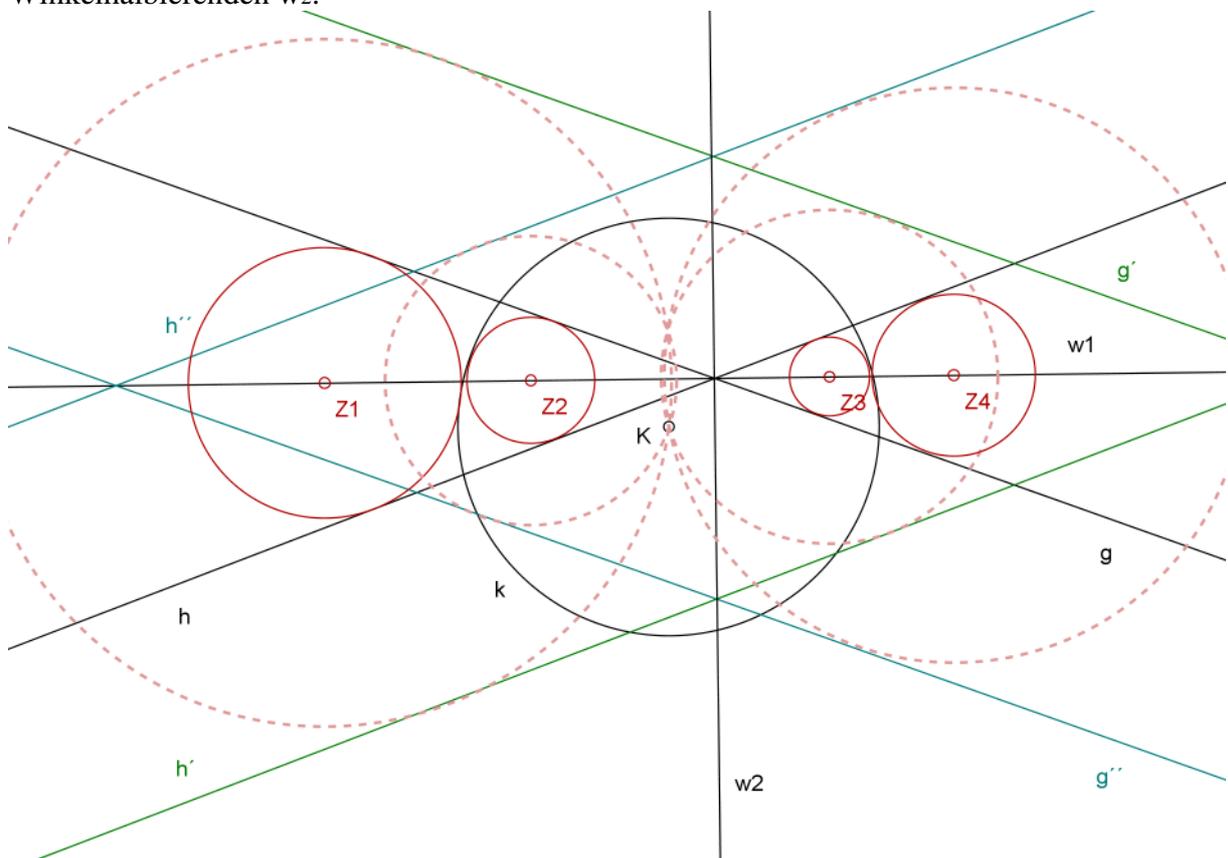
Den Kreis, der den gegebenen von innen berührt, findet man fast analog, indem die Parallelen zu g und h im Abstand r in die jeweils andere Halbebene gelegt werden:

1. zeichne im Abstand r die Parallele g' zu g in der Halbebene, die k enthält und die Parallele h' zu h in der Halbebene, die k enthält
2. verfähre nun mit g' , h' und K wie im Fall PLL und finde den Kreis m (Z, ZK)
3. erweitere den Radius ZK des gefundenen Kreises um r
4. der Kreis z ($Z, ZK + r$) ist der gesuchte Kreis, der den gegebenen von innen berührt

Mit der zweiten Lösung von PLL findet man den anderen Kreis, der k einschließend berührt.



Im Fall, dass die beiden Geraden den gegebenen Kreis schneiden, liegt ein Sonderfall vor, der acht Lösungen hat. Diese acht Kreise lassen sich jedoch im wesentlichen ebenfalls nach dem hier gezeigten Prinzip der Parallelverschiebung um den gegebenen Radius r konstruieren. Die Mittelpunkte Z_5 bis Z_8 der anderen vier Kreise liegen dann entsprechend auf der Winkelhalbierenden w_2 .

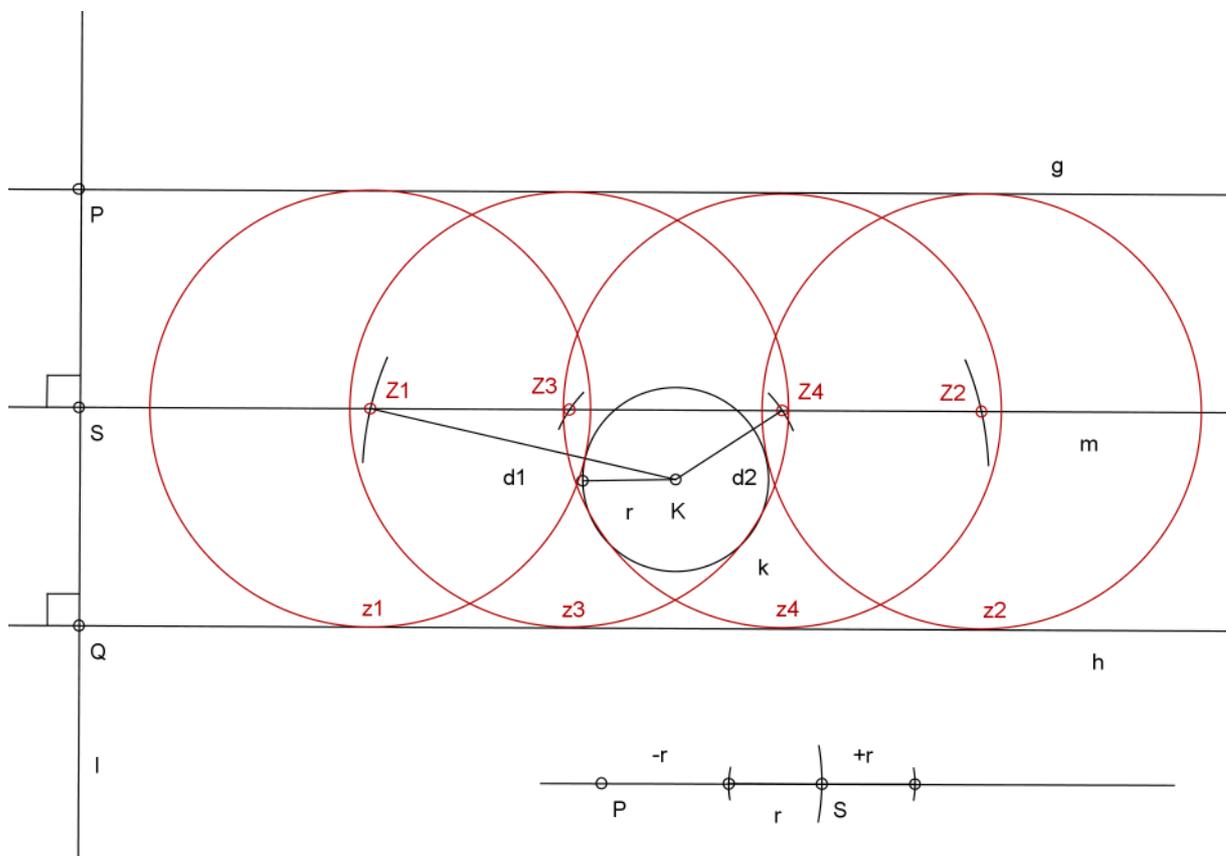


Sind die beiden gegebenen Geraden g und h parallel, so liegt ein Sonderfall vor, der **CLLp** genannt werden soll, da dieser im Zusammenhang mit der Inversion am Kreis immer wieder zur Lösung herangezogen wird. Denn mit Hilfe der Inversion am Kreis lassen sich die Fälle CCC, CCL, CCP, CPP und PCL auf genau diesen Sonderfall bringen, der dann folgendermaßen gelöst wird:

Konstruktion:

Gegeben: zwei parallele Geraden g und h , ein Kreis k (K, r), k schneidet keine der Geraden und liegt zwischen g und h

1. konstruiere die Mittelparallele m zu g und h
2. dazu: fälle das Lot l von g in einem beliebigen Punkt P auf h , Q ist Lotfußpunkt
3. die Mittelsenkrechte zu PQ in S ist die Mittelparallele
4. trage die Strecke PS auf einer Hilfsgeraden ab, addiere den Radius r dazu, bezeichne $d_1 = PS + r$
5. trage die Strecke PS auf einer Hilfsgeraden ab, subtrahiere den Radius r von PS , bezeichne $d_2 = PS - r$
6. der Kreis um K mit dem Radius d_1 schneidet m in Z_1 und Z_2 , welche die Mittelpunkte der Berührungskreise sind, die k nicht umschließen (Berührung von außen)
7. der Kreis um K mit dem Radius d_2 schneidet m in Z_3 und Z_4 , welche die Mittelpunkte der Berührungskreise sind, die k umschließen (Berührung von innen)



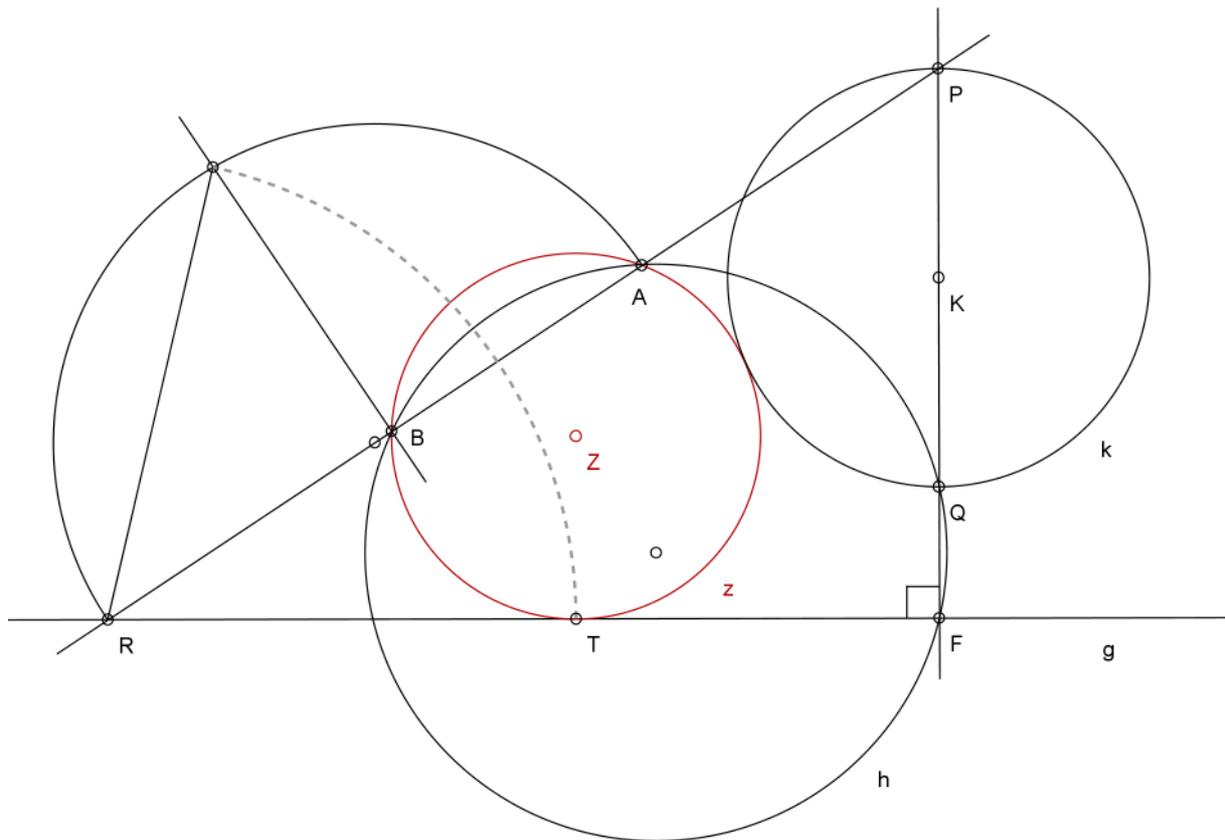
PCL¹⁷

Dieser Fall lässt sich auf den Fall PPL zurückführen, jedoch ist die Begründung dafür etwas aufwändig.

Konstruktion:

Gegeben: ein Kreis k (K, r), eine Gerade g und ein Punkt A

1. konstruiere eine Senkrechte auf g durch K , die den Kreis in P und Q schneidet
2. Schnittpunkt mit g sei F
3. verbinde P und A und verlängere diese Strecke in Richtung g
4. der Schnittpunkt dieser Halbgeraden mit g sei R
5. zeichne einen Hilfskreis h , der durch F, Q und A geht (vgl. PPP)
6. dieser Kreis schneidet die Trägergerade von PA in A und einem weiteren Punkt B
7. ab jetzt konstruiere den Fall PPL mit den Punkten A und B und der Geraden g



Im Fall, dass der Hilfskreis h die Gerade PA nur in A berührt, wird die Strecke RA auf g abgetragen und so der Punkt T bestimmt. Man errichtet jetzt die Senkrechte zu g in T und die Senkrechte zu PR in A . Der Schnittpunkt der beiden Senkrechten ist der Mittelpunkt des gesuchten Berührkreises z .

Den zweiten Kreis, der den gegebenen Kreis von außen berührt, findet man analog zum Fall PPL, indem die Strecke RT zur anderen Seite von R auf g abgetragen wird.

Im Fall, dass die Gerade PA parallel zu g ist und der Punkt R nicht gefunden wird, liegt nach Finden von B durch den Hilfskreis h der Sonderfall von PPL vor, bei dem die Verbindungsgerade der gegebenen Punkte parallel zur Geraden ist (Konstruktion analog).

¹⁷ vgl. Ulrich, S. 242 ff

Zur Begründung wird die Konstruktion um einige Hilfslinien ergänzt, die die Zusammenhänge verdeutlichen, die zum Hilfskreis h durch FQA führen, so dass der Punkt B gefunden wird:

1. bezeichne die Berührungspunkte des gefundenen Kreises z (Z, ZT) mit der Geraden g mit T und mit dem Kreis k mit S
2. zeichne ZT, ZS, SQ, KS, PS und ST

ZT ist parallel zu PF , da $\angle ZTF = \angle PFT = 90^\circ$, denn ZT ist Radius auf der Tangente g und PF ist Lot auf g .

Die Punkte Z, S und K liegen auf einer Geraden, da die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier sich berührender Kreise durch ihren Berührungspunkt verläuft.

Daraus folgt $\angle TZS = \angle SKP$ (Wechselwinkel).

Damit sind auch die Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke TZS und SKP gleich, insbesondere $\angle ZST = \angle PSK$. Diese Winkel sind somit Scheitelwinkel, also liegen auch P, S und T auf einer Geraden.

Da PQ Durchmesser ist, gilt $\angle PSQ = 90^\circ$ (Thaleskreis).

Da S auf der Geraden PT liegt, ist auch $\angle TSQ = 90^\circ$.

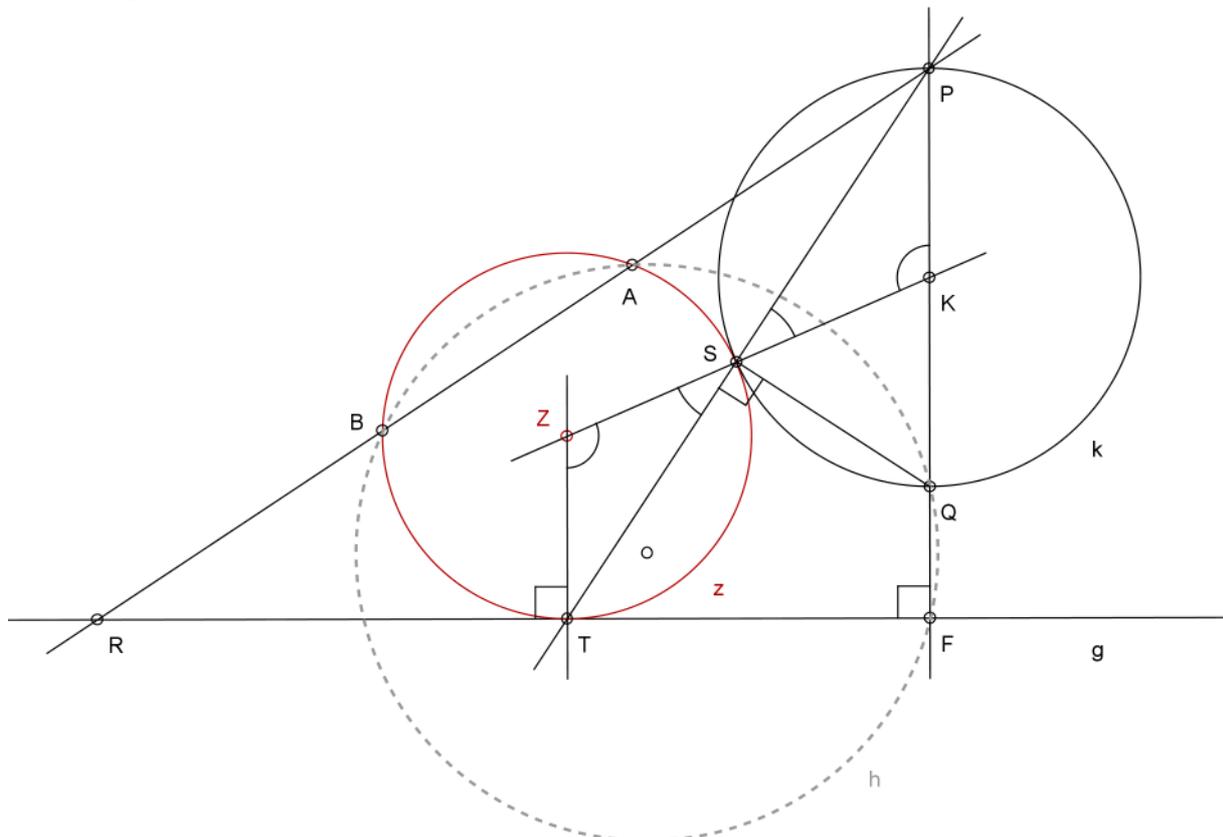
Weil auch $\angle TFQ = 90^\circ$ (Lot auf g), hat das Viereck $TFQS$ einen Umkreis (Satz vom Sehnenviereck) und somit gilt bezüglich P der Sekantensatz: $PS \cdot PT = PQ \cdot PF$.

Im Kreis z gilt: $PS \cdot PT = PA \cdot PB$.

Also muss doch auch gelten: $PQ \cdot PF = PA \cdot PB$.

Und diese Beziehung gilt nur in dem Kreis h , der durch F, Q und A geht und die Gerade PA in B schneidet.

Im Fall, dass PR Tangente an z ist, also der Punkt B nicht gefunden wird, gilt im Kreis z bezüglich P der Sekanten-Tangenten-Satz: $PS \cdot PT = PA^2$, wonach für den Hilfskreis h gelten muss: $PQ \cdot PF = PA^2$.



Diese Begründung zeigt, dass das Viereck TFQS einen Umkreis besitzt, in dem bzgl. des Punktes P nach dem Sekantensatz Beziehungen gelten, die auch für den Lösungskreis gelten müssen, da ST gemeinsame Sehne ist. Das heißt, dass sich mit dem Hilfskreis h die Beziehungen $PQ \cdot PF = PS \cdot PT = PA \cdot PB$ verbinden lassen.

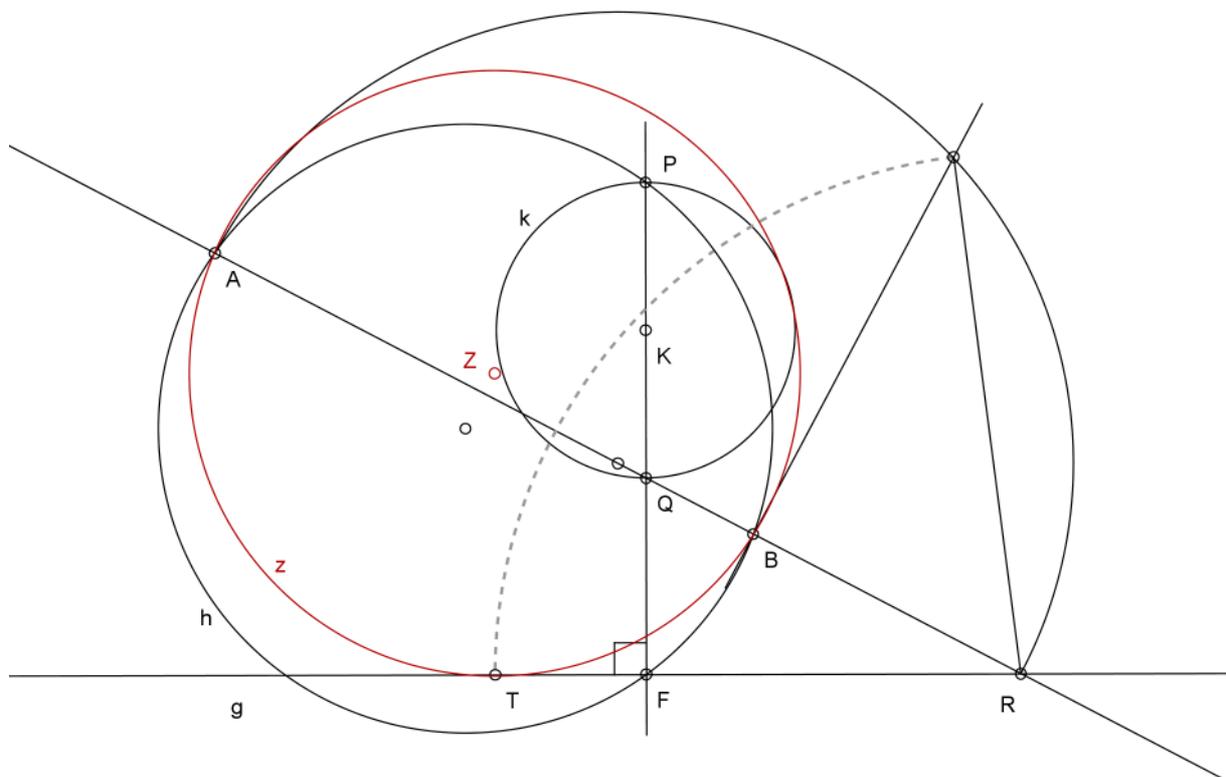
Konstruiert man den Fall PPL mit A, B und g, so ist durch die Argumentation, die zum Umkreis des Vierecks TFQS führte, sichergestellt, dass der Lösungskreis z auch den Kreis k in S berührt.

Auf ähnliche Weise findet man die beiden Kreise, die den gegebenen Kreis k mit ihrer Innenseite berühren. Die Argumentation verläuft dabei fast analog wie oben. Der Unterschied ist, dass der Hilfskreis h hier statt durch Q durch P gelegt wird.

Konstruktion:

Gegeben: ein Kreis k (K, r), eine Gerade g und ein Punkt A

1. konstruiere eine Senkrechte auf g durch K, die den Kreis in P und Q schneidet
2. Schnittpunkt mit g sei F
3. verbinde Q und A und verlängere diese Strecke in Richtung g
4. der Schnittpunkt dieser Halbgeraden mit g sei R
5. zeichne einen Hilfskreis h, der durch F, P und A geht (vgl. PPP)
6. dieser Kreis schneidet die Trägergerade von QA in A und einem weiteren Punkt B
7. ab jetzt konstruiere den Fall PPL mit A, B, g

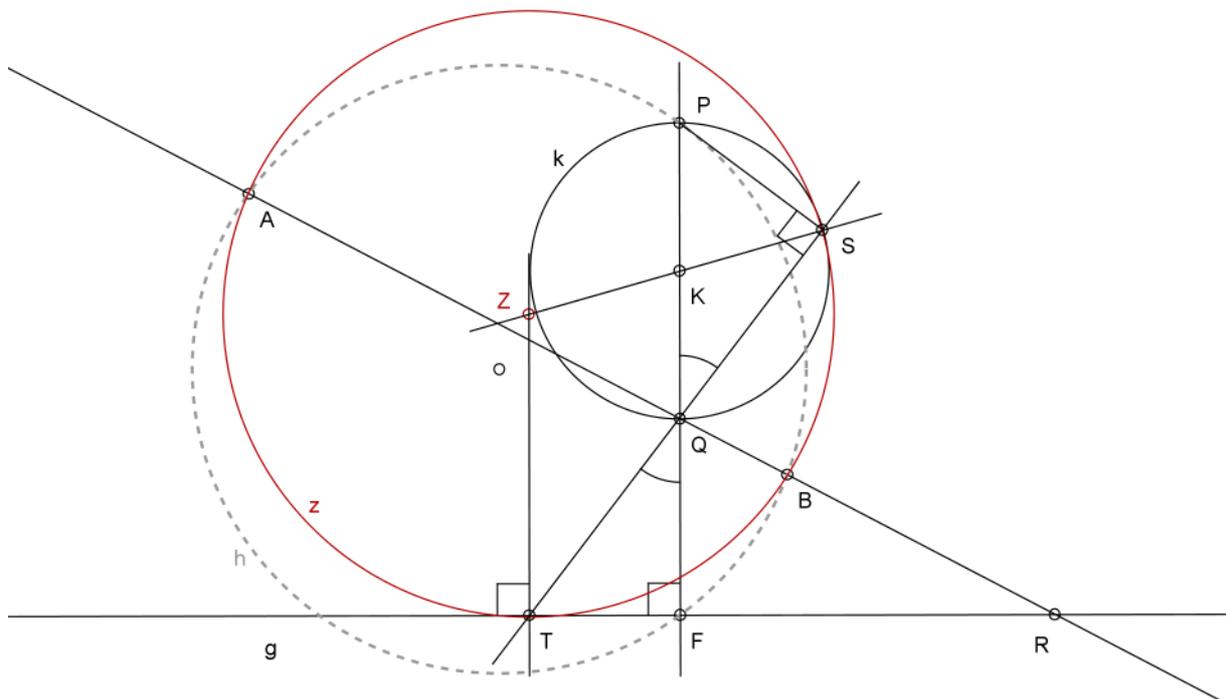


Abtragen von RT zur anderen Seite von R auf g liefert den anderen der beiden Kreise.

Zur Begründung des Hilfskreises h wird auch hier die Konstruktion um Hilfslinien ergänzt :

1. bezeichne die Berührungspunkte des gefundenen Kreises z (Z, ZT) mit der Geraden g mit T und mit dem Kreis k mit S
2. zeichne ZT, ZS, PS und ST

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke PQS und TQF folgt die Beziehung $QS \cdot QT = QF \cdot QP$. Ebenso gilt $QS \cdot QT = QA \cdot QB$ (nach dem Sehensatz). Folglich ist $QA \cdot QB = QF \cdot QP$, und diese Beziehung gilt nur im Kreis durch A, P und F, durch den der Punkt B auf AR bestimmt wird.

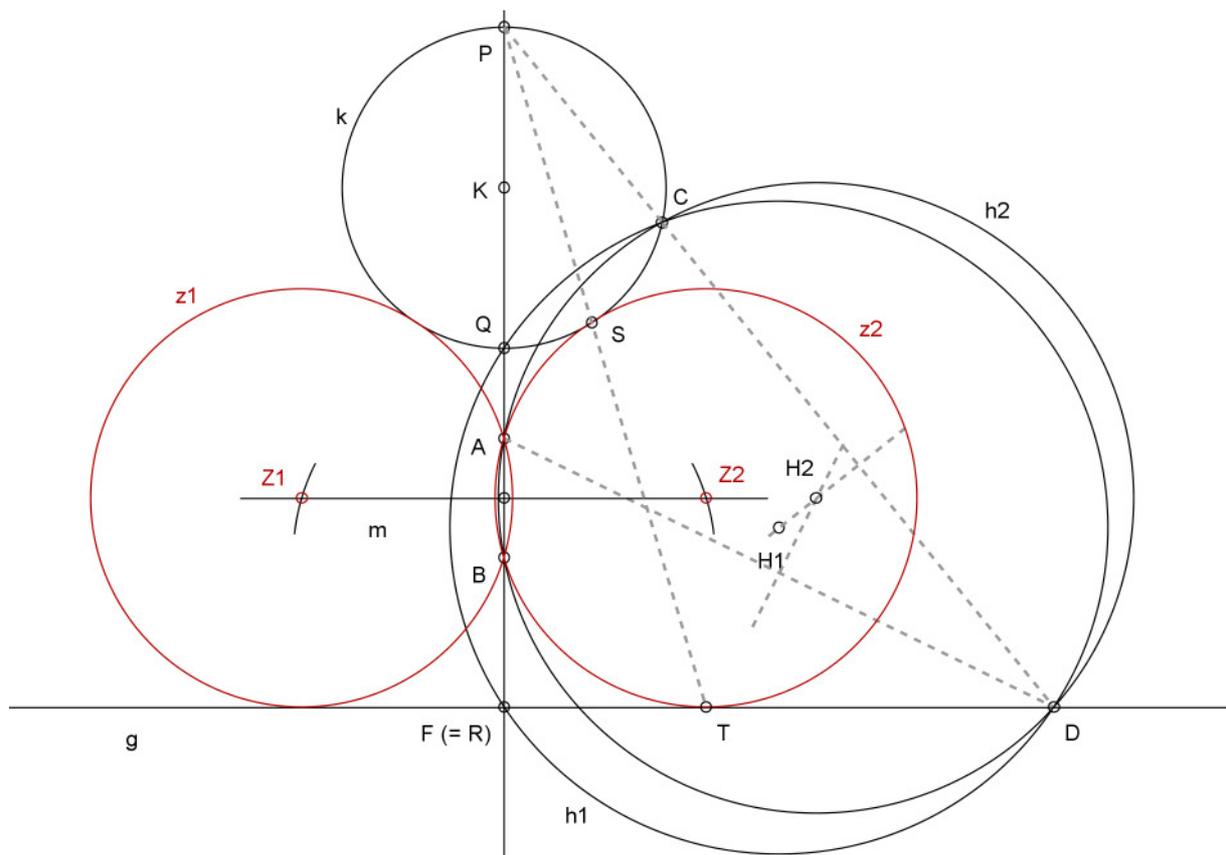


Der Vollständigkeit halber sei hier noch die Situation betrachtet, dass der Punkt A genau auf der Lotgeraden PF liegt (hier: A zwischen k und g). Dann fällt der Punkt R mit dem Punkt F zusammen und der Hilfskreis durch Q, F und A entartet zu einer Geraden. Diese Situation kann man aber auf den Sonderfall in PPL bringen, bei dem die Verbindungsgerade der gegebenen Punkte senkrecht auf der Geraden g steht.

Konstruktion:

1. konstruiere einen Hilfskreis h_1 durch F und Q , der den gegebenen Kreis k in einem weiteren Punkt C und die Gerade g in einem weiteren Punkt D schneidet
2. konstruiere einen zweiten Hilfskreis h_2 durch C , D und A . Dessen weiterer Schnittpunkt mit der Lotgeraden PF sei B
3. errichte die Mittelsenkrechte m auf AB
4. die Schnittpunkte des Kreises um A (oder B) mit dem Abstand von m zu g als Radius sind die gesuchten Mittelpunkte Z_1 und Z_2

Bemerkung: Falls PF Tangente an h_2 ist und B nicht existiert, errichtet man in A die Senkrechte m zu PF und verfährt analog



Nach dem Sekanten-Satz gelten hier bzgl. P die Beziehungen

$$PQ \cdot PF = PC \cdot PD = PA \cdot PB = PS \cdot PT$$

CCL¹⁸

Es gibt vier Möglichkeiten, diesen Fall auf den Fall PCL zu bringen: der Kreis $a(A, r)$ wird auf den Punkt A reduziert und A ist immer der gegebene Punkt, b wird mal erweitert oder reduziert ($s - r$ oder $s + r$), g wird mal nach g' in die eine, mal in die andere Halbebene verschoben. Um auf die insgesamt acht möglichen Lösungen des Falles CCL zu kommen, muss man zu jeder Radiusveränderung die beiden gleichartig berührenden Kreise des Falles PCL konstruieren.

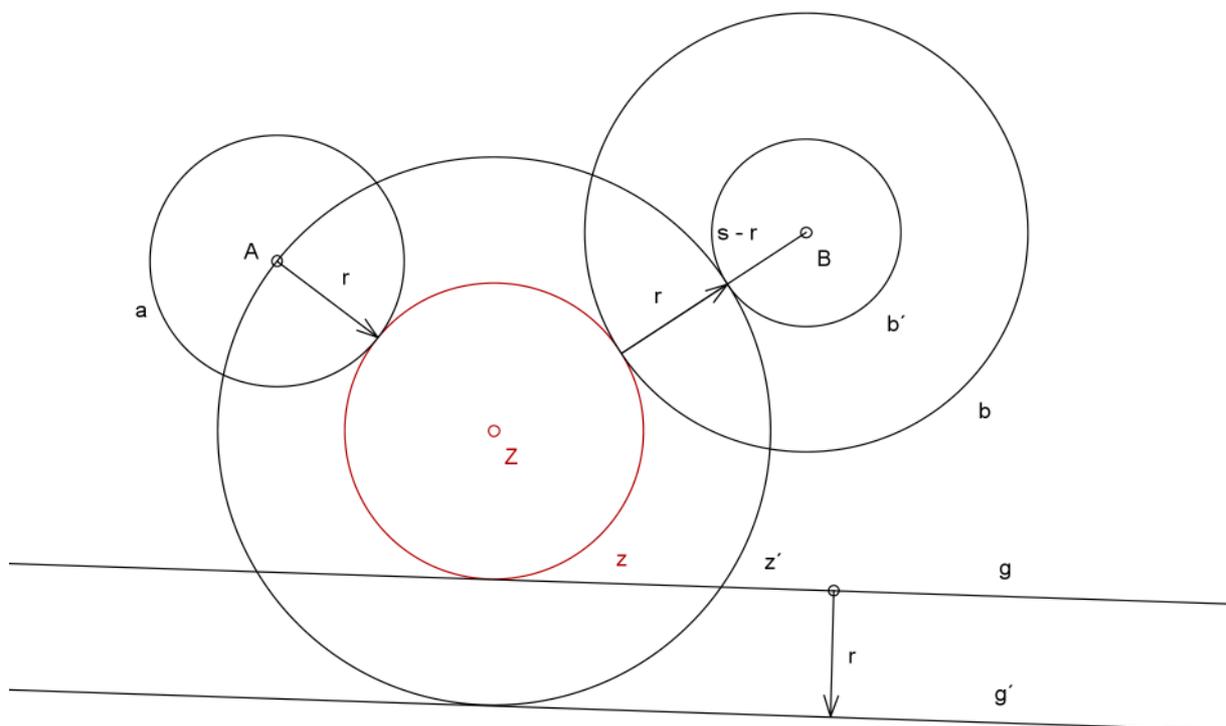
Bei Ulrich findet sich jedoch nur folgende

Konstruktion:

Gegeben: Zwei Kreise $a(A, r)$ und $b(B, s)$ und eine Gerade g . Ohne Einschränkung sei $r < s$

Möglichkeit 1 (z schließt a und b aus):

1. reduziere b um r zu $b'(B, s-r)$
2. zeichne die Parallele g' zu g im Abstand r in der den Kreisen abgewandten Halbebene
3. verfähre mit dem Punkt A , dem Kreis b' und der Geraden g' weiter wie im Fall PLC und reduziere den gefundenen Kreis $z'(Z, ZA)$ um r
4. der Kreis $z(Z, ZA - r)$ ist der gesuchte Berührkreis

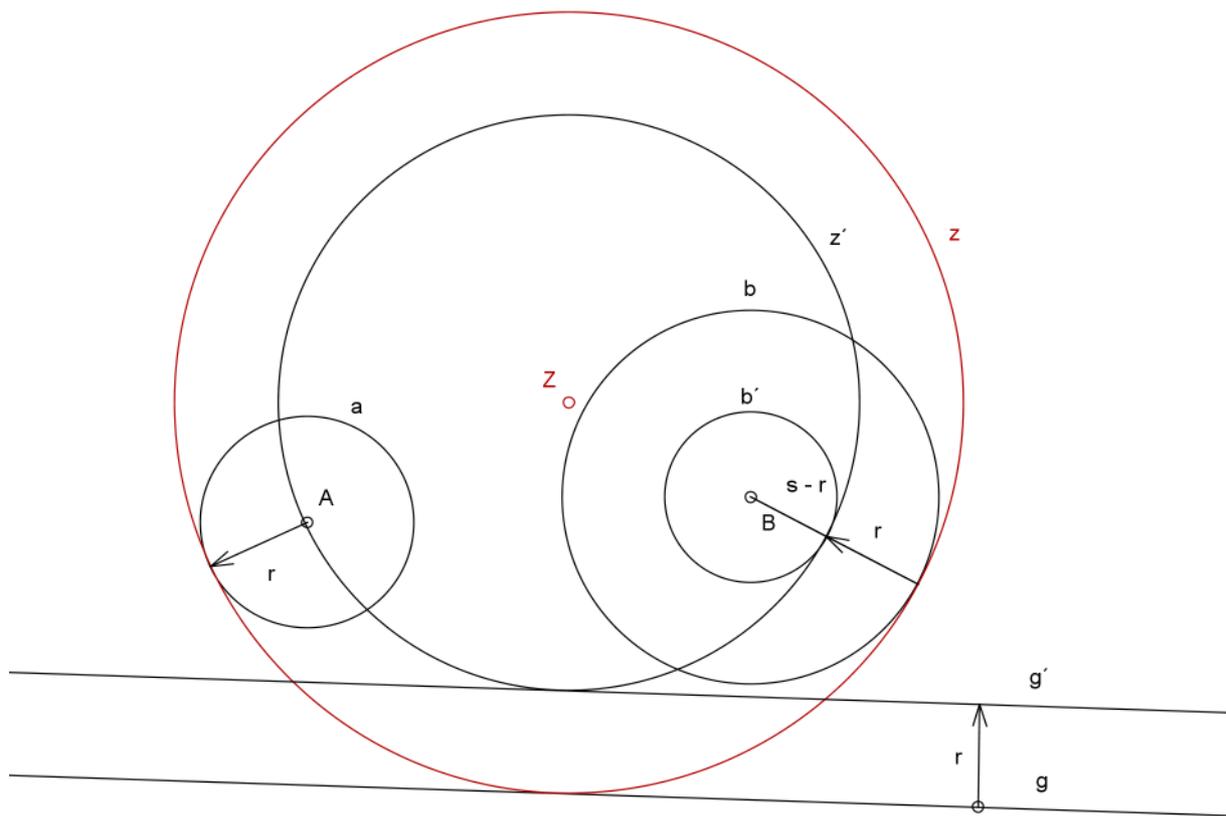


Bemerkung: Ist $r = s$, so führt man durch diese Konstruktion den Fall CCL auf den Fall PPL zurück.

¹⁸ vgl. Ulrich, S. 244

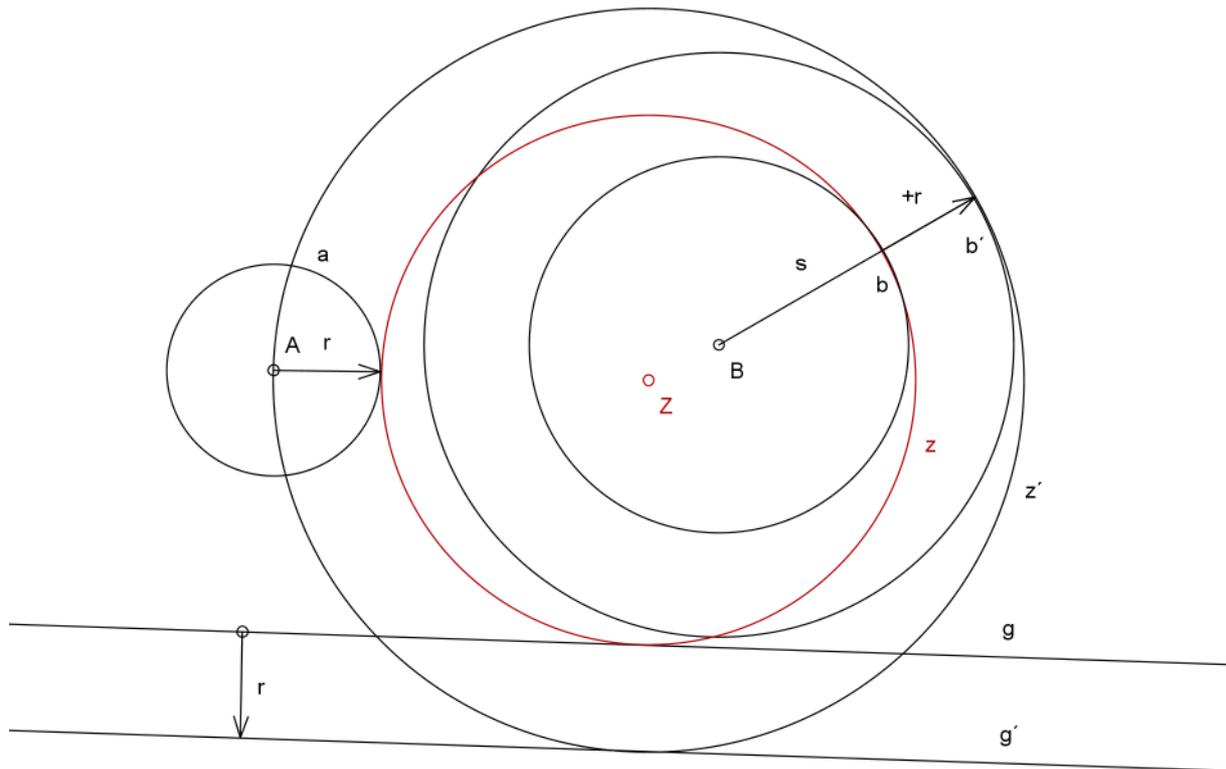
Möglichkeit 2 (z schließt a und b ein):

1. reduziere b um r zu b' (B, $s - r$)
2. zeichne die Parallele g' zu g im Abstand r in der den Kreisen zugewandten Halbebene
3. verfähre mit dem Punkt A, dem Kreis b' und der Geraden g' weiter wie im Fall PLC und erweitere den gefundenen Kreis z' (Z, ZA) um r
4. der Kreis z (Z, ZA + r) ist der gesuchte Berührkreis



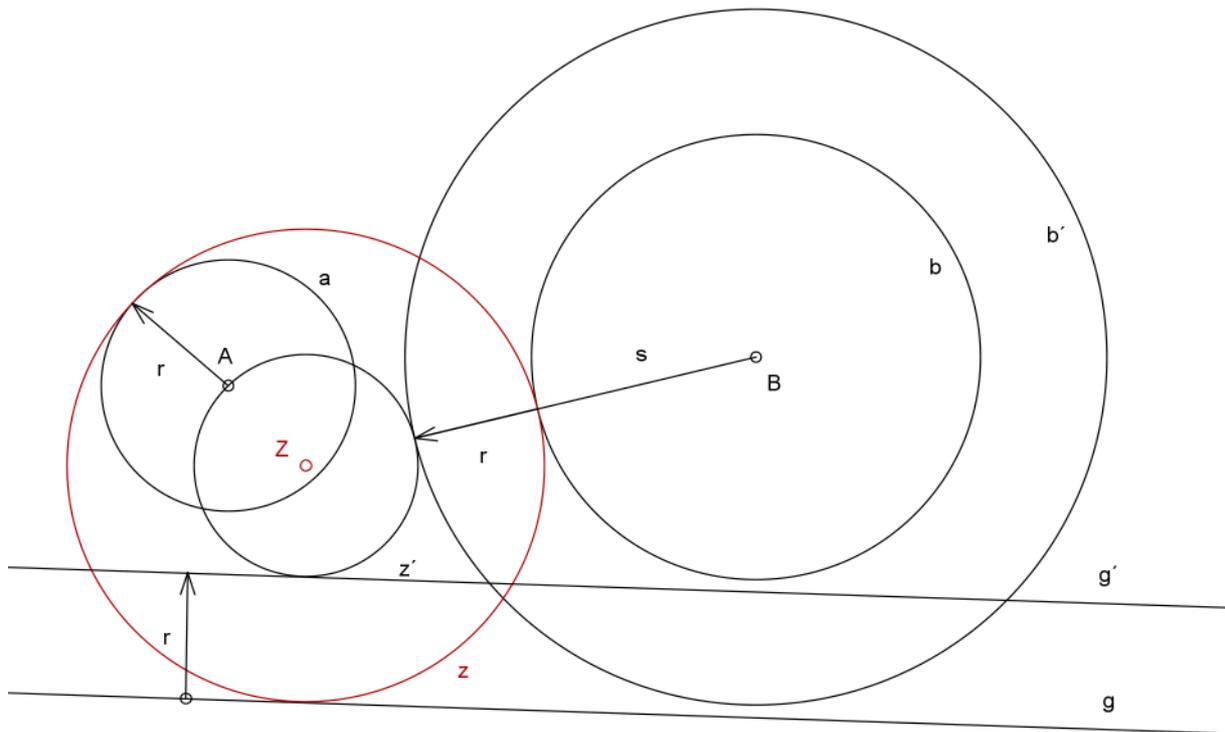
Möglichkeit 3 (z schließt a aus und b ein):

1. erweitere b um r zu $b'(B, s + r)$
2. zeichne die Parallele g' zu g im Abstand r in der den Kreisen abgewandten Halbebene
3. verfähre mit dem Punkt A, dem Kreis b' und der Geraden g' weiter wie im Fall PLC und reduziere den gefundenen Kreis $z'(Z, ZA)$ um r
4. der Kreis $z(Z, ZA - r)$ ist der gesuchte Berührkreis



Möglichkeit 4 (z schließt a ein und b aus):

1. erweitere b um r zu $b'(B, s + r)$
2. zeichne die Parallele g' zu g im Abstand r in der den Kreisen zugewandten Halbebene
3. verfähre mit dem Punkt A, dem Kreis b' und der Geraden g' weiter wie im Fall PLC und erweitere den gefundenen Kreis $z'(Z, ZA)$ um r
4. der Kreis $z(Z, ZA + r)$ ist der gesuchte Berührkreis



Bemerkung: Da es im Fall PCL zwei gleichartige Berührkreise gibt, erhält man so insgesamt acht Lösungen.

CPP¹⁹

Konstruktion:

Gegeben: zwei Punkte A und B auf ihrer Trägergeraden und ein Kreis k (K, r), der bzgl. dieser Geraden ganz in einer Halbebene liegt.

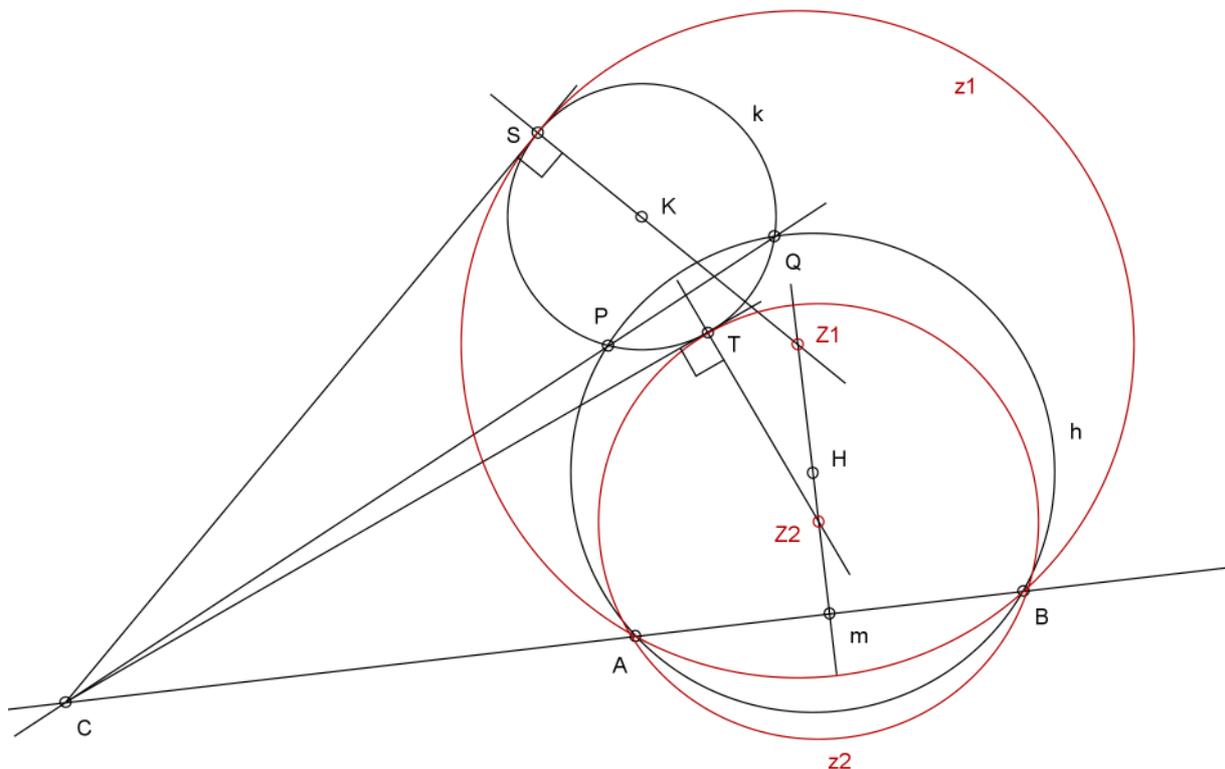
1. konstruiere die Mittelsenkrechte m auf AB
2. konstruiere einen Hilfskreis h mit Mittelpunkt H auf m , der durch die Punkte A und B geht und den Kreis k in P und Q schneidet
3. die Verlängerung von PQ schneidet die Trägergerade AB in C . Es gilt bezüglich h und C der Sekanten-Satz: $CP \cdot CQ = CA \cdot CB$
4. konstruiere von C die beiden Tangenten an k , die k in S und T berühren. Es gilt bezüglich k und C der Sekanten-Tangenten-Satz: $CS^2 = CP \cdot CQ$ und $CT^2 = CP \cdot CQ$

Also gilt auch für den gesuchten Kreis z_1 , der k umschließt: $CS^2 = CA \cdot CB$, das heißt A, B und S liegen auf diesem Kreis.

5. die Senkrechte auf CS in S schneidet m in dessen Mittelpunkt Z_1

Analog gilt für den gesuchten Kreis z_2 , der k außen berührt: $CT^2 = CA \cdot CB$, das heißt A, B und T liegen auf diesem Kreis.

6. die Senkrechte auf CT in T schneidet m in dessen Mittelpunkt Z_2



Bemerkung: Liegt K auf der Mittelsenkrechten m , also PQ ist parallel zu AB und der Punkt C wird nicht gefunden, so konstruiere die Kreise, die durch A, B und die jeweiligen Schnittpunkte der Mittelsenkrechten m mit k gehen.

¹⁹ vgl. Ulrich, S. 262

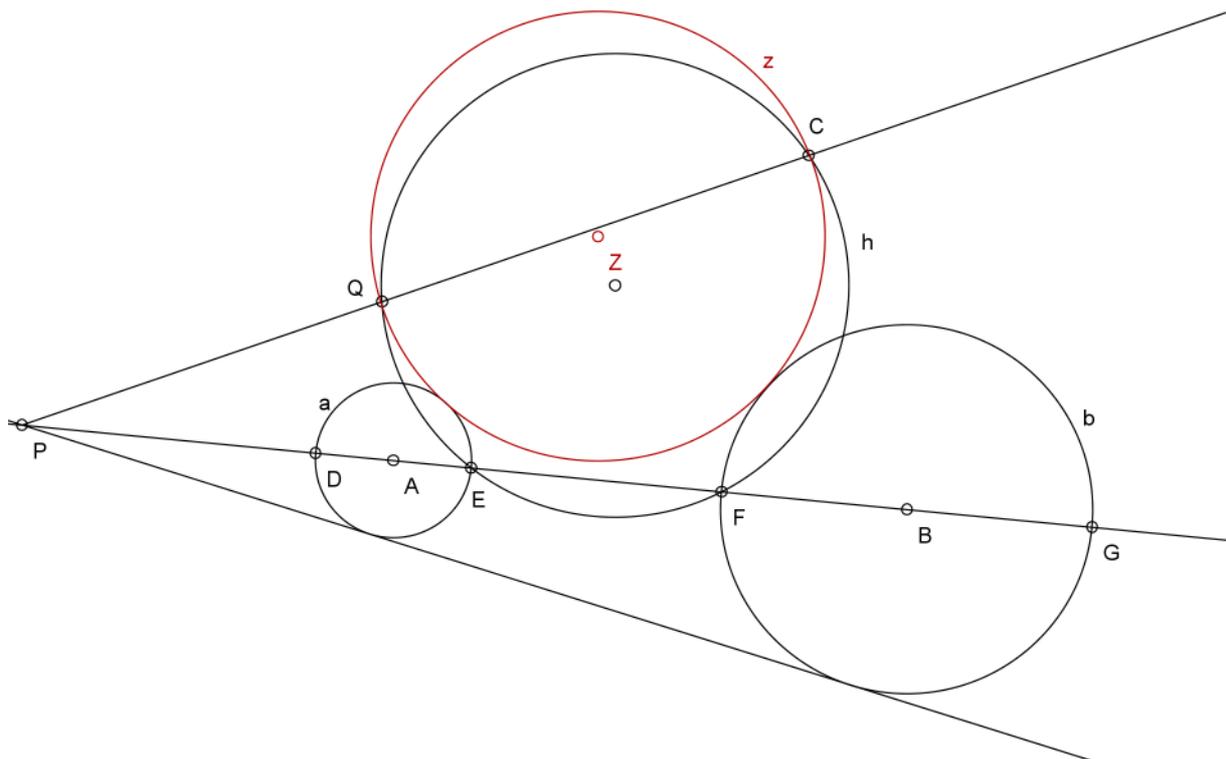
CCP²⁰

Dieser Fall lässt sich mit Hilfe des Ähnlichkeitspunktes auf den Fall CPP zurückführen.

Konstruktion:

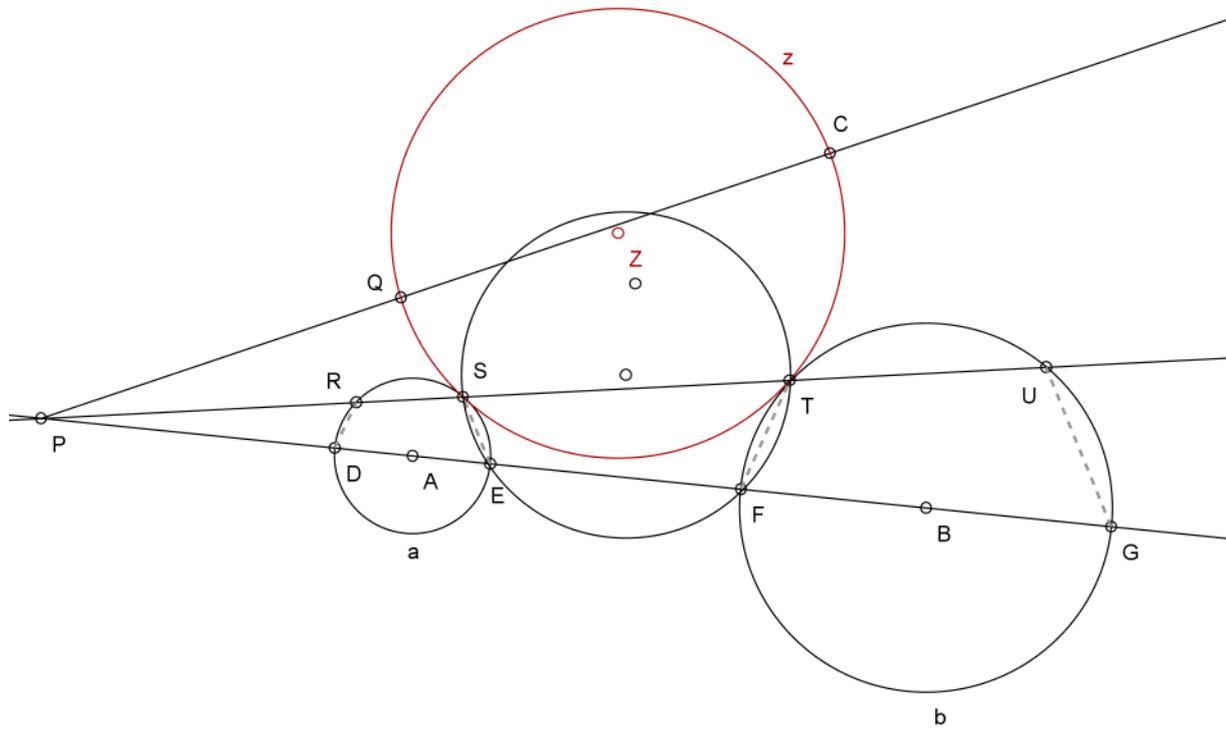
Gegeben: zwei Kreise a (A, r) und b (B, s) und ein Punkt C . A, B und C sind nicht kollinear

1. zeichne die Trägergerade AB
2. diese schneidet a und b in D, E, F und G
3. konstruiere den äußeren Ähnlichkeitspunkt zu den Kreisen a und b . Dazu:
4. konstruiere eine äußere gemeinsame Tangente zu a und b
5. der Schnittpunkt mit der Geraden AB ist der Ähnlichkeitspunkt P
6. verbinde P und C
7. konstruiere den Hilfskreis h , der durch die Punkte E, F und C geht und PC in Q schneidet
8. verfähre mit C, Q und einem der Kreise weiter wie im Fall CPP (Da der Fall CPP zwei Lösungen hat, erhält man so insgesamt vier Berührkreise)



²⁰ vgl. Ulrich, S. 270

Zur Begründung, warum der gesuchte Kreis durch den gefundenen Punkt Q geht, wird die Zeichnung durch die Gerade, die durch P und die Berührungspunkte S und T geht, ergänzt.



Da P Ähnlichkeitspunkt zu a und b ist, gilt: RD ist parallel zu TF und SE ist parallel zu UG, woraus folgt, dass für die Winkel in den Vierecken DESR und EFST gilt: $\angle DRS = \angle SEF$, $\angle RSE = \angle EFT$, $\angle SED = \angle STF$ und $\angle EDR = \angle TSE$ (dieser Gleichheit liegt zugrunde, dass einerseits im Sehnenviereck gegenüberliegende Winkel 180° ergeben, andererseits sich auch Nebenwinkel zu 180° ergänzen). Also hat das Viereck EFST einen Umkreis, in dem nach dem Sekantensatz gilt: $PE \cdot PF = PS \cdot PT$.
 Ebenso muss für den gesuchten Kreis z gelten: $PQ \cdot PC = PS \cdot PT$ und damit auch: $PQ \cdot PC = PE \cdot PF$, was den Punkt Q begründet.

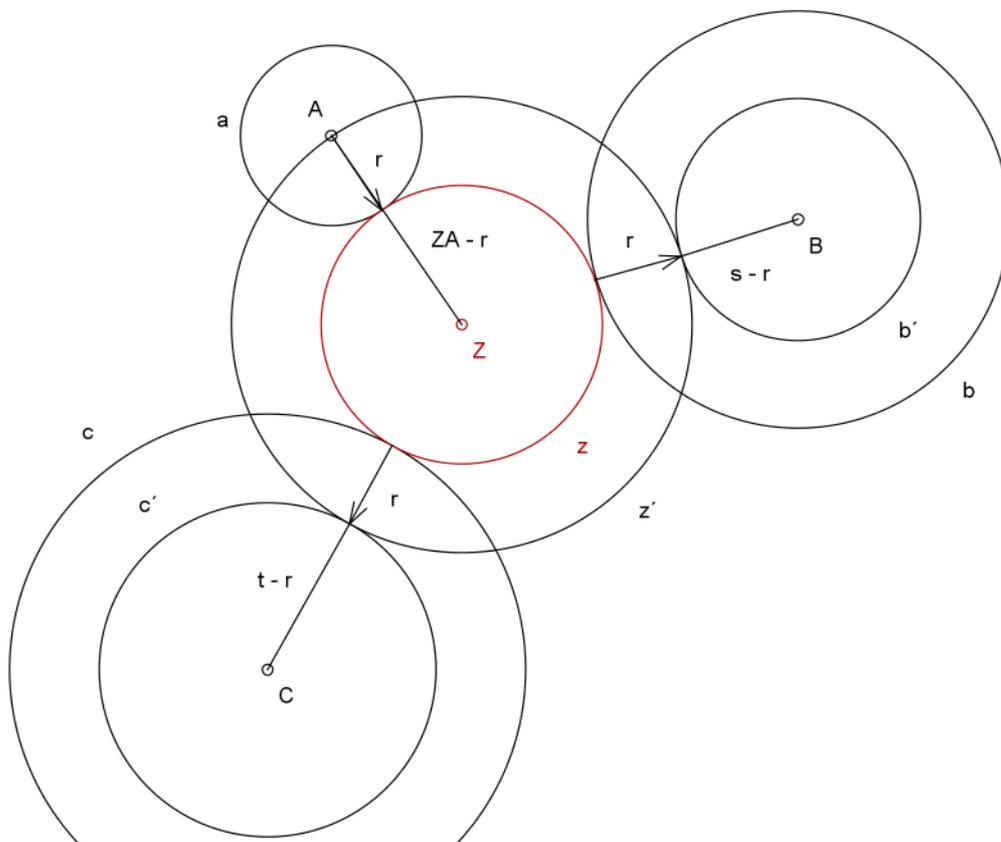
CCC²¹

Der Fall wird durch Radiusreduktion bzw. -erweiterung auf den Fall CCP zurückgeführt.

Konstruktion:

Gegeben: drei Kreise a (A, r), b (B, s) und c (C, t), die Mittelpunkte sind nicht kollinear, es sei $r < s < t$.

1. reduziere b um r zu b' ($B, s - r$)
2. reduziere c um r zu c' ($C, t - r$)
3. konstruiere nach CCP den Kreis z' (Z, ZA), der b' und c' berührt und durch A geht
4. reduziere den gefundenen Kreis z' um r
5. der Kreis z ($Z, ZA - r$) ist der gesuchte Berührkreis



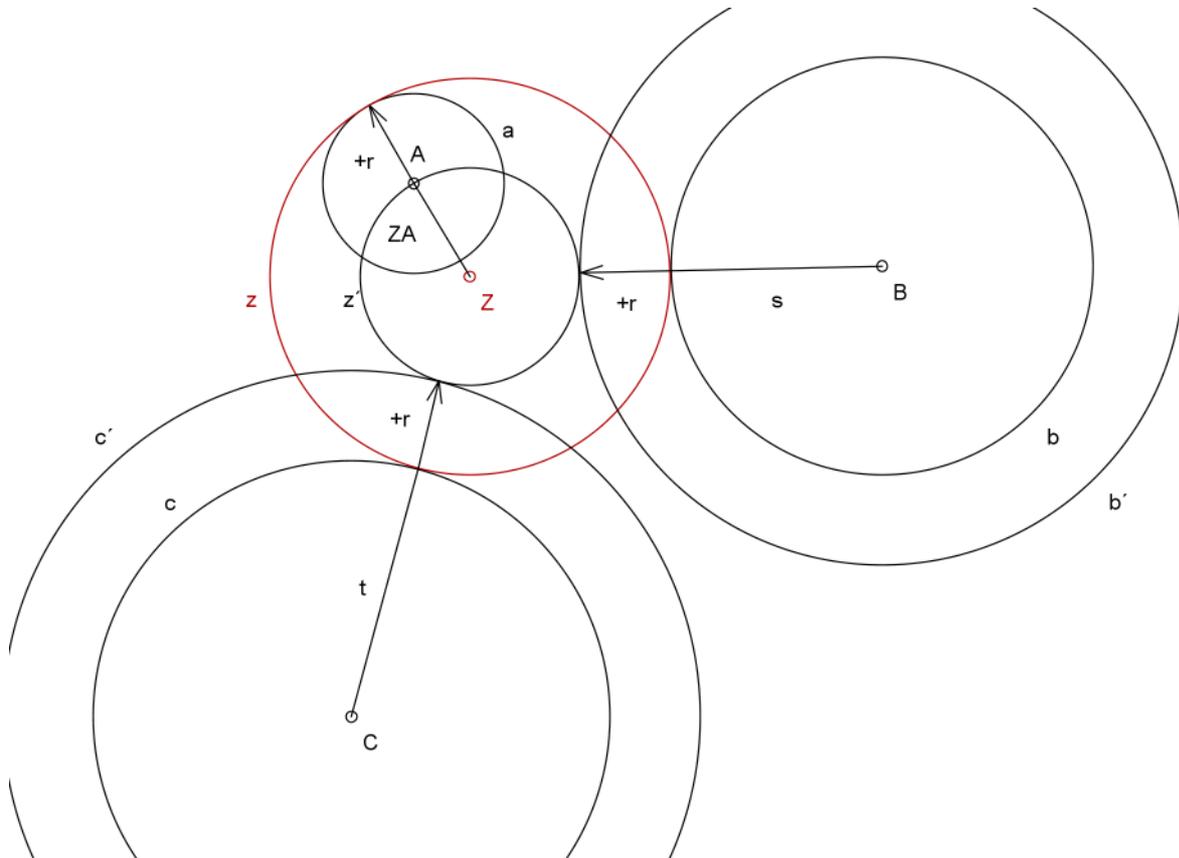
Bei Ulrich findet sich nur diese Konstruktion, ohne Hinweis auf die anderen sieben Lösungen dieses Falls.

Man gelangt durch diese Art der Radiusreduzierung von b und c zu insgesamt vier Lösungskreisen (vgl. CCP), nämlich denjenigen, die a ausschließen. Führt man bei b und c eine Radiusenerweiterung um r durch, so findet man die anderen vier Berührkreise, die a einschließen.

²¹ vgl. Ulrich, S. 271

Konstruktion:

1. erweitere b um r zu $b'(B, s + r)$
2. erweitere c um r zu $c'(C, t + r)$
3. konstruiere nach CCP den Kreis $z'(Z, ZA)$, der b' und c' berührt und durch A geht
4. erweitere den gefundenen Kreis z' um r
5. der Kreis $z(Z, ZA + r)$ ist der gesuchte Berührkreis



Da es bei Ulrich nur Lösungen durch Rückführung auf bereits gelöste Fälle und keine direkte Lösung des Hauptfalls CCC gibt, sei hier noch die Lösung vorgestellt, die sich bei Hellwig findet²², der aufgrund seiner umfangreichen Untersuchungen zu Potenz- und Ähnlichkeitspunkten und -geraden zu einer verblüffenden Lösung gelangt. Verblüffend deshalb, da ad hoc die Zusammenhänge nicht klar werden, die zu den gesuchten Berührkreisen führen.

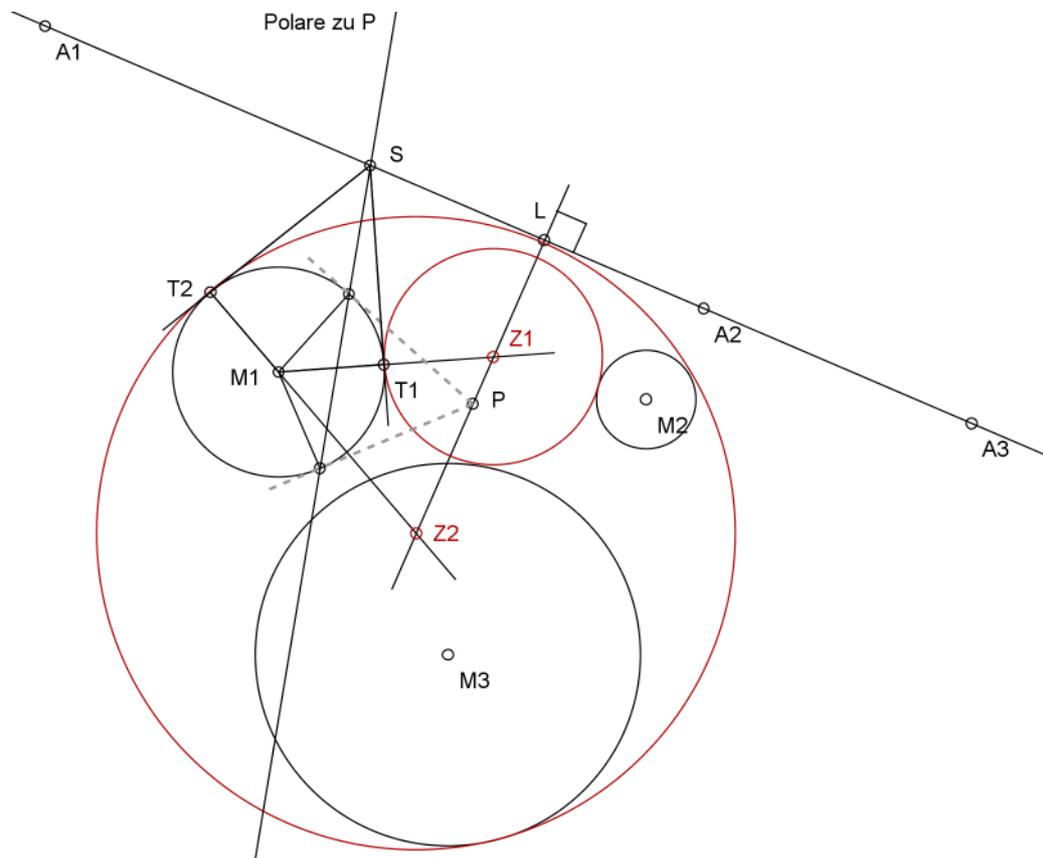
Diese in Gänze nachzuvollziehen ist jedoch nur durch entsprechend umfangreiche Beweisführung möglich, worauf hier mit dem Hinweis auf den Originaltext verzichtet wird. Ausgeführt seien hier die beiden Berührkreise, die die drei gegebenen Kreise nur von außen und nur einschließend berühren.

²² vgl. Hellwig, S. 24

Konstruktion:

Sind drei Kreise um M_1 , M_2 und M_3 gegeben

1. bestimme den Potenzpunkt P dieser Kreise und die Ähnlichkeitsgerade, die durch deren äußere Ähnlichkeitspunkte A_1 , A_2 und A_3 verläuft
2. fälle das Lot PL auf die Ähnlichkeitsgerade
3. konstruiere zu P die Polare in Bezug zu M_1
4. die Polare schneidet die Ähnlichkeitsgerade in S
5. die Tangenten von S an den Kreis um M_1 berühren diesen in T_1 und T_2
6. die Verlängerung der Strecke M_1T_1 schneidet das Lot PL in Z_1 , dem Zentrum des Kreises mit dem Radius Z_1T_1 , der die gegebenen Kreise von außen berührt
7. die Verlängerung der Strecke M_1T_2 schneidet das Lot PL in Z_2 , dem Zentrum des Kreises mit dem Radius Z_2T_2 , der die gegebenen Kreise einschließend berührt



Die übrigen sechs Kreise finden sich fast analog mit Hilfe der drei anderen Ähnlichkeitsgeraden, die auch durch die inneren Ähnlichkeitspunkte verlaufen.

3. Die Inversion am Kreis

Ein sehr wichtiges Hilfsmittel im Zusammenhang mit dem Apollonischen Berührproblem ist die Inversion am Kreis. Diese Abbildung, auch „Spiegelung am Kreis“ genannt, besitzt mehrere Eigenschaften, durch die sich die Fälle CCC, CCP, CPP, CCL und PCL auf den in 2.3 besonders erwähnten Fall CLLp bringen lassen.

3.1 Grundlegende Eigenschaften

Die Inversion am Kreis ist eine bijektive Abbildung der Ebene (ohne den Inversionskreismittelpunkt J) auf sich, bei der ein Punkt P (Urbild) wie folgt auf den Punkt P' (Bild) abgebildet wird²³:

Gegeben sei ein Inversionskreis $j(J, r)$. Jedem Punkt $P \neq J$ wird der Punkt P' zugeordnet mit:

1. P' liegt auf der Trägergeraden von JP
2. $JP \cdot JP' = r^2$

Konstruktion :

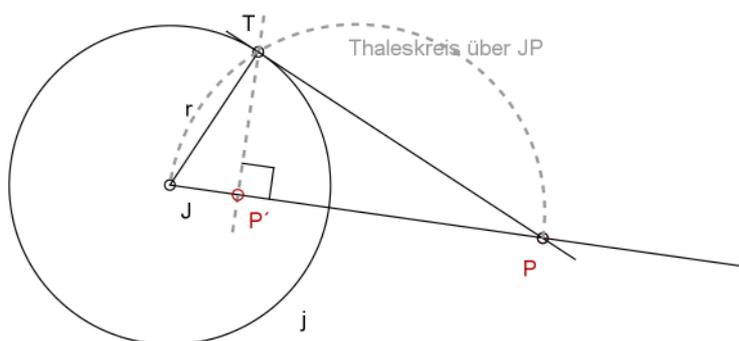
P liegt außerhalb von j :

1. konstruiere eine Tangente von P an j , Berührungspunkt sei T
2. das Lot von T auf JP trifft diese Strecke im Bildpunkt P'

Soll ein Punkt P' , der innerhalb von j liegt, abgebildet werden:

1. errichte die Senkrechte zur Trägergeraden JP' in P'
2. die Senkrechte schneidet j in T
3. die Senkrechte auf r in T trifft die Trägergerade in P

Liegt P auf j, so wird P auf sich abgebildet.



Man erkennt, dass dieser Abbildung der Kathetensatz zugrunde liegt.

Das Bild von P' ist nach der Abbildungsvorschrift wieder P, also ist die Inversion involutorisch. Offensichtlich sind die Punkte der Inversionskreislinie Fixpunkte und die Geraden durch J sind Fixgeraden, jedoch keine Fixpunktgeraden. Der Mittelpunkt J wird auf

²³vgl. Scheid/Schwarz, S. 149 ff

den „unendlich fernen Punkt“ dieser Geraden abgebildet, hat also keinen Bildpunkt und ist auch von keinem Punkt Abbild.

Die für das Apollonische Berührproblem relevanten Eigenschaften der Inversion sind:

1. Das Bild eines Kreises, der durch den Inversionskreismittelpunkt J geht, ist eine Gerade. Umgekehrt gilt: Das Bild einer Geraden (die nicht durch J geht) ist ein Kreis der durch J geht.

Beweis:

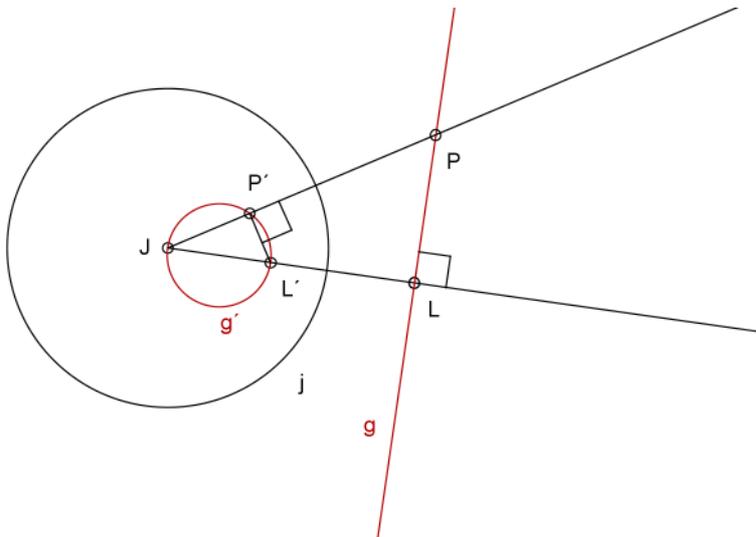
Gegeben sei der Inversionskreis $j(J, r)$ und eine Gerade g .

a) g ist Passante zu j

Fälle das Lot von J auf g , Lotfußpunkt sei L . Sei L' das Bild von L , dann gilt:

$$JL \cdot JL' = r^2.$$

Zu zeigen: der Kreis g' mit dem Durchmesser JL' ist das Bild der Geraden g .



Sei ein Punkt $P \neq L$ auf g beliebig gewählt. PJ schneidet g' in P' .

Dann sind die Dreiecke $JP'L'$ und JPL ähnlich, denn sie stimmen überein in den Winkeln $\angle JP'L'$ und $\angle PLJ$ (rechte Winkel) und dem Winkel $\angle PJJ$ (gemeinsamer Winkel).

Also gilt: $JP : JL = JL' : JP'$

$$\Leftrightarrow JP \cdot JP' = JL \cdot JL' = r^2 \text{ (Vor)}$$

Also ist P' Bildpunkt von P und somit g' Bild der Geraden g .

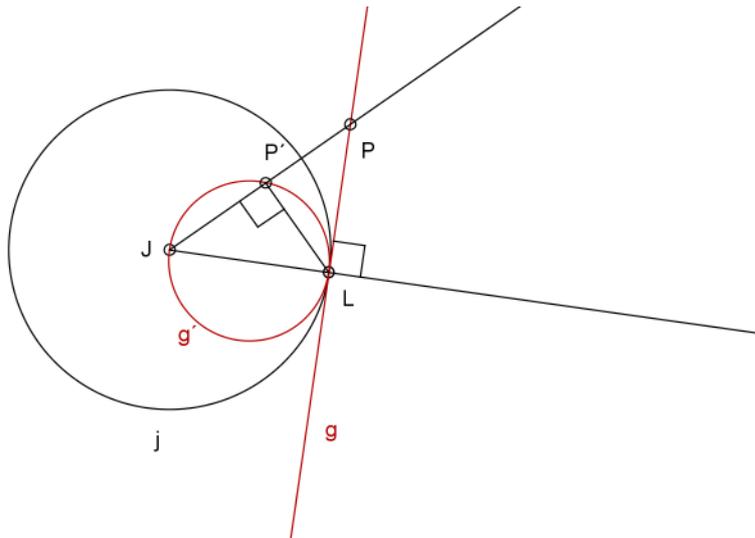
Folgerung:

Zur Konstruktion des Bildkreises g' einer Geraden g , die nicht durch J außerhalb von j verläuft, muss man nur den Lotfußpunkt L invertieren. Der Mittelpunkt von g' ist die Mitte von JL' .

b) g ist Tangente an j

Fälle das Lot von J auf g , L ist Berührungspunkt. Dann ist L Fixpunkt und $JL = r$.

Zu zeigen: der Kreis g' mit dem Durchmesser JL ist das Bild der Geraden g .



Sei ein Punkt $P \neq L$ auf g beliebig gewählt. PJ schneidet g' in P' .
 Dann sind die Dreiecke $JP'L$ und JPL ähnlich, denn sie stimmen überein in den Winkeln $\angle JP'L$ und $\angle PLJ$ (rechte Winkel) und dem Winkel $\angle PJL$ (gemeinsamer Winkel).
 Also gilt: $JP : JL = JL : JP'$
 $\Leftrightarrow JP \cdot JP' = JL^2 = r^2$ (Vor)
 Also ist P' Bildpunkt von P und somit g' Bild der Geraden g .

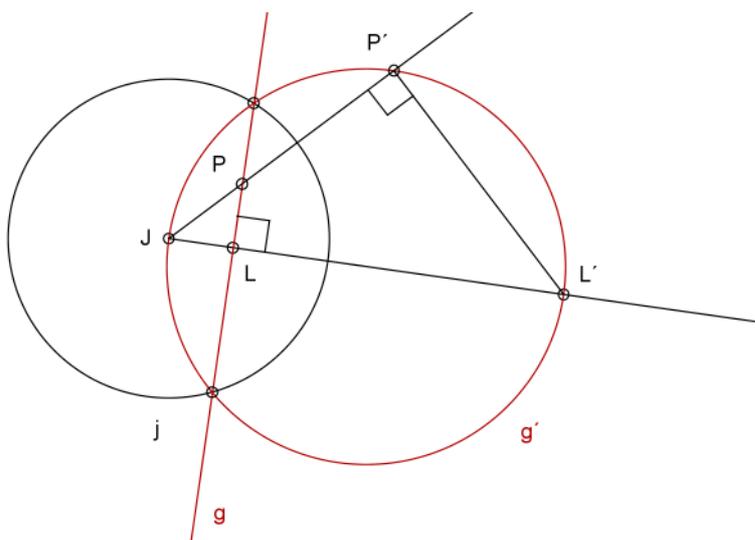
Folgerung:

Zur Konstruktion des Bildkreises g' findet man dessen Mittelpunkt als Mitte von JL .

c) g ist Sekante zu j

Fälle das Lot von J auf g , Lotfußpunkt sei L . Sei L' das Bild von L und es gilt:
 $JL \cdot JL' = r^2$.

Zu zeigen: der Kreis g' mit dem Durchmesser JL' ist das Bild der Geraden g .



Sei ein Punkt $P \neq L$ auf g beliebig gewählt. Die Trägergerade von PJ schneidet g' in P' .
 Dann sind die Dreiecke $JP'L'$ und JPL ähnlich, denn sie stimmen überein in den Winkeln $\angle JP'L'$ und $\angle PLJ$ (rechte Winkel) und dem Winkel $\angle PJL$ (gemeinsamer Winkel).

Also gilt: $JP : JL = JL' : JP'$
 $\Leftrightarrow JP \cdot JP' = JL \cdot JL' = r^2$ (Vor)

Also ist P' Bildpunkt von P und somit g' Bild der Geraden g .

Folgerung:

Der Kreis durch die beiden Schnittpunkte und J ist der Bildkreis g' zu g (drei Punkte legen einen Kreis fest).

Da die Inversion involutorisch ist, also zweimaliges Abbilden zur Identität führt, gilt auch die Umkehrung des Satzes 1.

Es folgt aus den Konstruktionen, dass sich in J berührende Kreise auf parallele Geraden abgebildet werden. Diese Eigenschaft erweist sich im Apollonischen Berührproblem als besonders hilfreich.

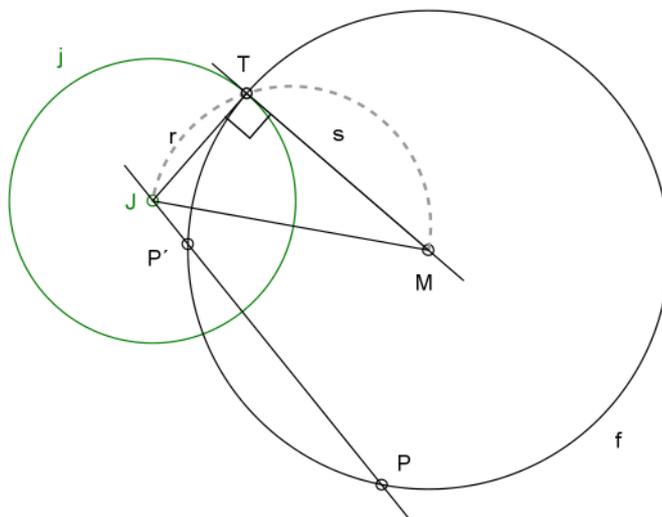
Folgerungen:

Zur Konstruktion der Bildgeraden g des Kreises g' errichtet man im Bildpunkt L von L' die Senkrechte zu JL .

Zur Konstruktion der Bildgeraden g des Kreises g' , der den Inversionskreis schneidet, legt man eine Gerade durch deren Schnittpunkte.

2. Ein Kreis, der den Inversionskreis rechtwinklig schneidet, wird auf sich abgebildet (Fixkreis)

Gegeben sei ein Inversionskreis $j(J, r)$ und ein Kreis $f(M, s)$, der j in T rechtwinklig schneidet



Behauptung: f ist Fixkreis bezüglich der Inversion an j

Beweis:

Wähle einen Punkt $P \neq T$ auf f und verbinde J mit P . JP schneidet f in einem weiteren Punkt P' .

Nach dem Sekanten-Tangenten-Satz gilt bezüglich des Kreises f : $JP \cdot JP' = JT^2$,

da JT als Tangente an f liegt (nach Konstruktion).

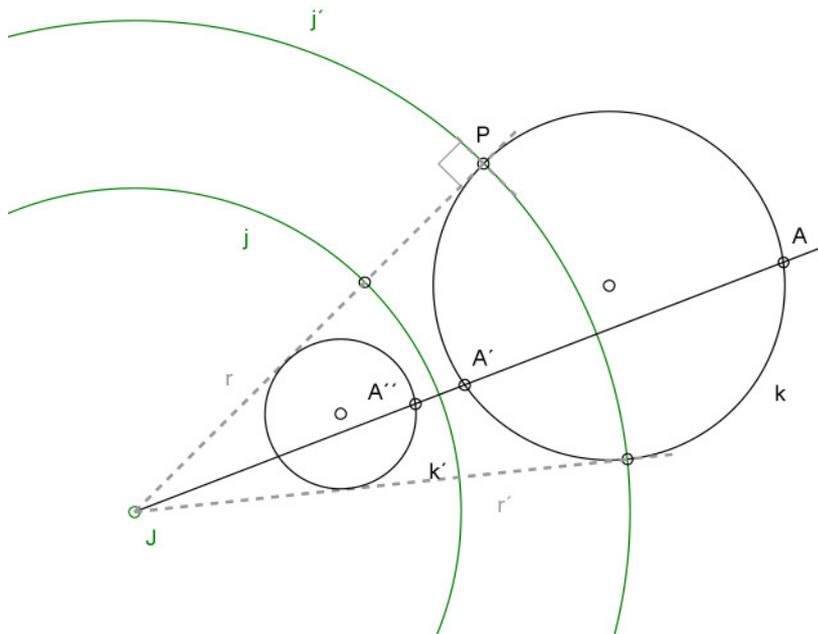
Für alle Punkte P und ihre Bildpunkte P' auf f gilt mit $JT = r$ die Abbildungsvorschrift der Inversion: $JP \cdot JP' = r^2$

$\Rightarrow f$ ist Fixkreis (aber nicht Fixpunktkreis)

3. Kreise, die nicht durch J gehen werden auf ebensolche abgebildet.

Beweis²⁴:

Gegeben sei der Inversionskreis $j(J, r)$ und ein Kreis k der nicht durch J geht ($J \notin k$).



Konstruiere zunächst den Kreis j' , der den Kreis k rechtwinklig schneidet (die Tangente von J an k in P liefert den Radius $r' = JP$). Sei j' ein weiterer Inversionskreis. k ist also bzgl. der Inversion σ' an j' Fixkreis mit $\sigma'(k) = k$.

Mit der Inversion σ an j gilt $\sigma(k) = \sigma(\sigma'(k)) = k'$

Da bei der Inversion an j' die Punkte des Fixkreises gespiegelt werden, also sich von innen nach außen kehren, und umgekehrt, gilt für jeden Punkt $A \in k$:

$\sigma'(A) = A'$, und weiter bei der Inversion an j : $\sigma(A') = A''$. Also gilt $\sigma(\sigma'(A)) = A''$.

Aufgrund der Definition der Inversion gilt $JA \cdot JA' = r'^2$ und $JA' \cdot JA'' = r^2$

Division zeigt: $\frac{JA' \cdot JA''}{JA \cdot JA'} = \frac{r^2}{r'^2} \Leftrightarrow JA'' = \frac{r^2}{r'^2} \cdot JA$

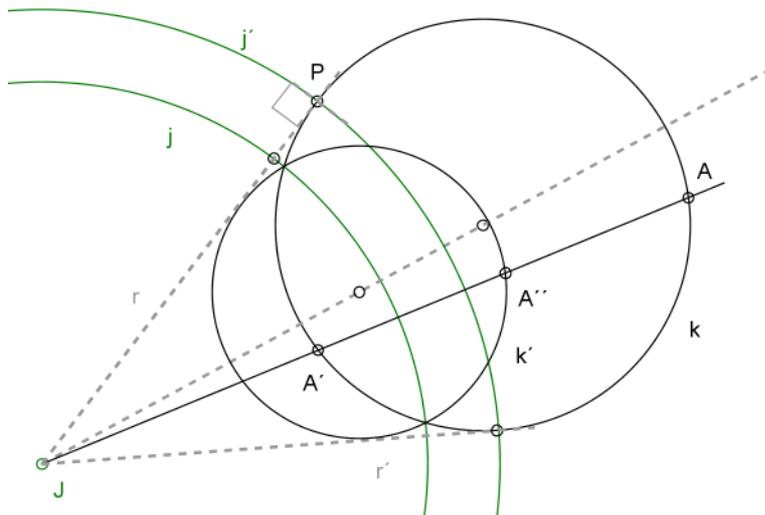
Also gilt $JA'' = s \cdot JA$ mit $s = \frac{r^2}{r'^2}$, was eine Zentrische Streckung darstellt mit Zentrum J und Streckfaktor s .

Da die Zentrische Streckung Kreise auf Kreise abbildet, ist $\sigma(k) = k'$ wieder ein Kreis.

Und da J Zentrum der Streckung ist, kann J auch nicht Bildpunkt (also $J \notin k'$) sein.

²⁴ vgl. Hartshorne, S. 337, 338

Analog führt man den Beweis, wenn k den Inversionskreis schneidet:

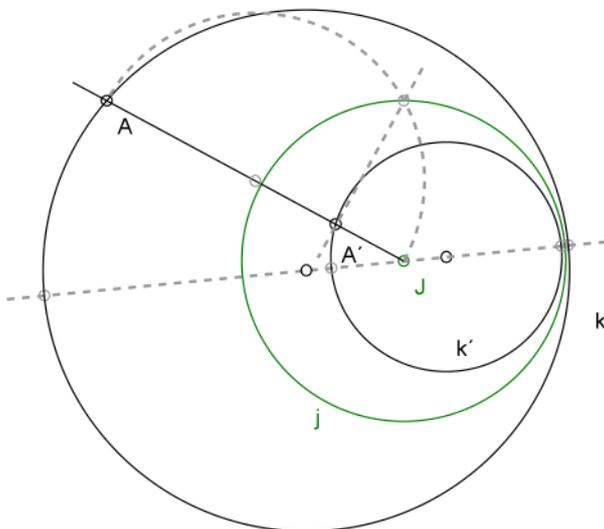


Im Fall, dass k den Inversionskreismittelpunkt einschließt, ist die Zentrische Streckung schon direkt zu erkennen, denn es gilt nach der Inversionsvorschrift:

$$JA \cdot JA' = r^2$$

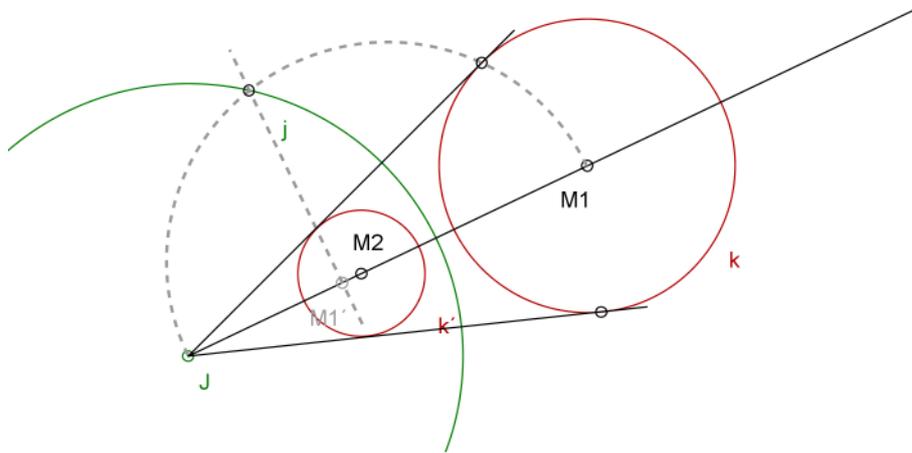
$$\Leftrightarrow JA' = \frac{r^2}{JA} \Leftrightarrow JA' = \frac{r^2}{JA^2} \cdot JA \text{ (Erweitert mit } JA)$$

$$\text{also gilt } JA' = s \cdot JA \text{ mit } s = \frac{r^2}{JA^2},$$

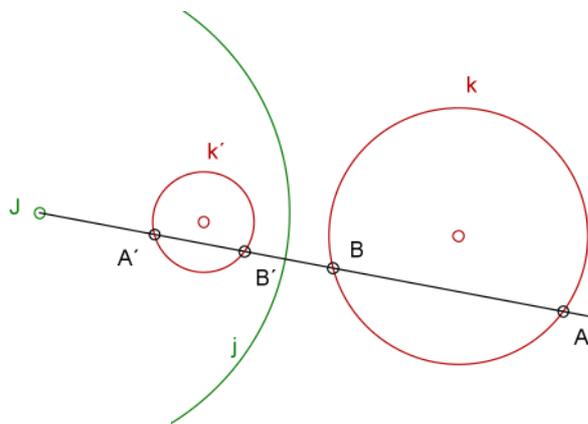


Folgerung: Zur Konstruktion des Bildkreises ist es ausreichend, die Schnittpunkte des Urkreises mit der Transversalen zu invertieren. Die Mitte zwischen den Bildpunkten ist Mittelpunkt des Bildkreises.

Bemerkung: Eine Zentrische Streckung bildet auch die Mittelpunkte der Kreise aufeinander ab, was bei der Inversion nicht der Fall ist. Man erkennt in der Zeichnung deutlich, dass M_1 nicht auf den Mittelpunkt M_2 von k' abgebildet wird.



Motiviert durch die Anmerkung Hartshornes, dass es schwierig sei, einen direkten Beweis des Satzes zu finden²⁵, entstand im Laufe dieser Arbeit in Zusammenarbeit mit Herrn Prof. Dr. H. Struve folgender Beweis, der ohne die zweite Inversion auskommt:



Seien ein Inversionskreis j (J, r) und ein Kreis k außerhalb von j gegeben und seien A und B mit J kollineare Punkte auf k und A' und B' die Bildpunkte nach der Inversion an j .

Dann gilt für alle mit J kollinearen Punkte A und B auf k nach dem Sekantensatz:
 $JA \cdot JB = c$ (Konstante). Und nach der Inversionsvorschrift gilt: $JA \cdot JA' = r^2$.

Der Quotient beider Gleichungen ist $\frac{JA \cdot JB}{JA \cdot JA'} = \frac{c}{r^2}$, folglich ist für alle Punkte B auf k

$\frac{JB}{JA'} = s$, ebenfalls eine Konstante. Das heißt, dass A' durch eine Ähnlichkeitsabbildung mit

Zentrum J und Faktor s aus B hervorgeht (für alle B auf k).

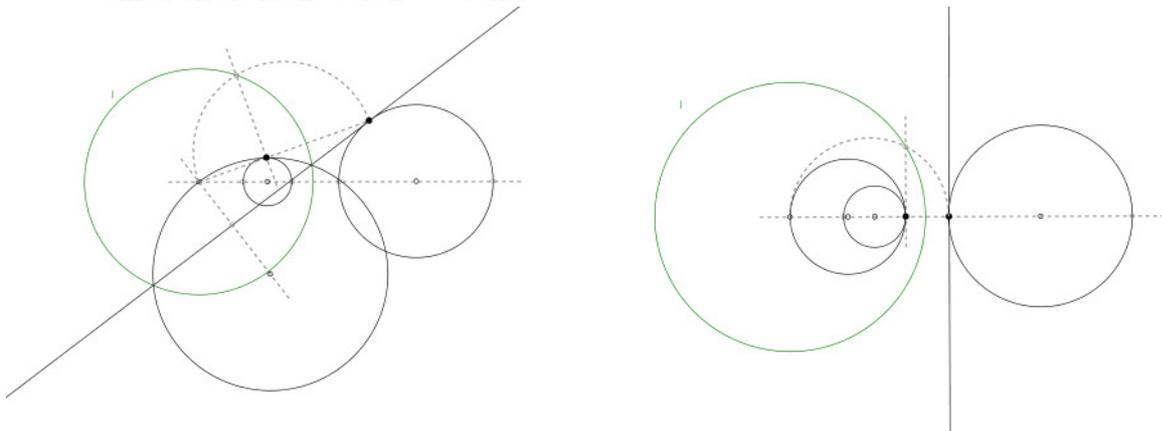
Da das Bild eines Kreises bei einer Ähnlichkeitsabbildung wieder ein Kreis ist, ist das Bild k' von k wieder ein Kreis.

²⁵ s. Hartshorne, S. 337

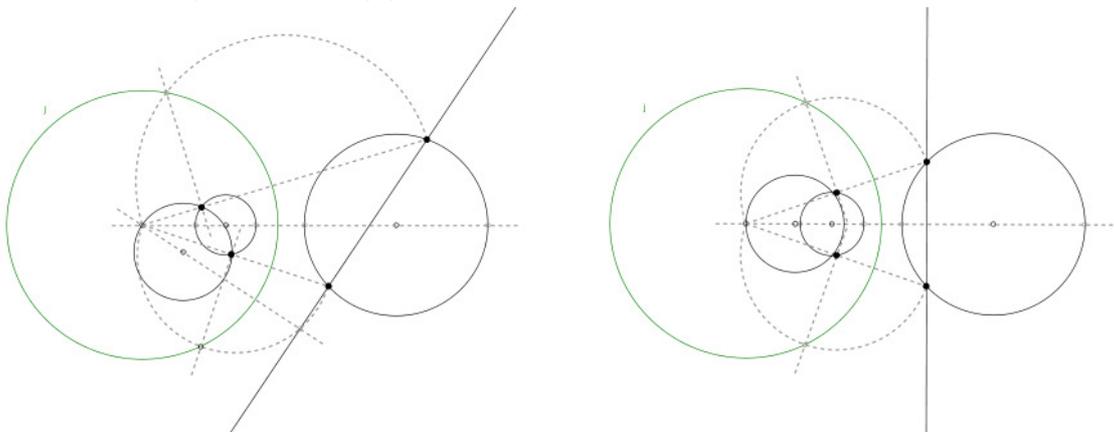
3.1.1. Inversion mehrerer Objekte

Die Inversion verändert bestimmte Eigenschaften von Objekten nicht. So bleiben sich schneidende Objekte nach Inversion sich schneidend unter konstanter Anzahl der Schnittpunkte. Ebenso bleiben berührende Objekte berührend und disjunkte Objekte bleiben disjunkt. Dies sei hier ohne Beweis dargestellt:

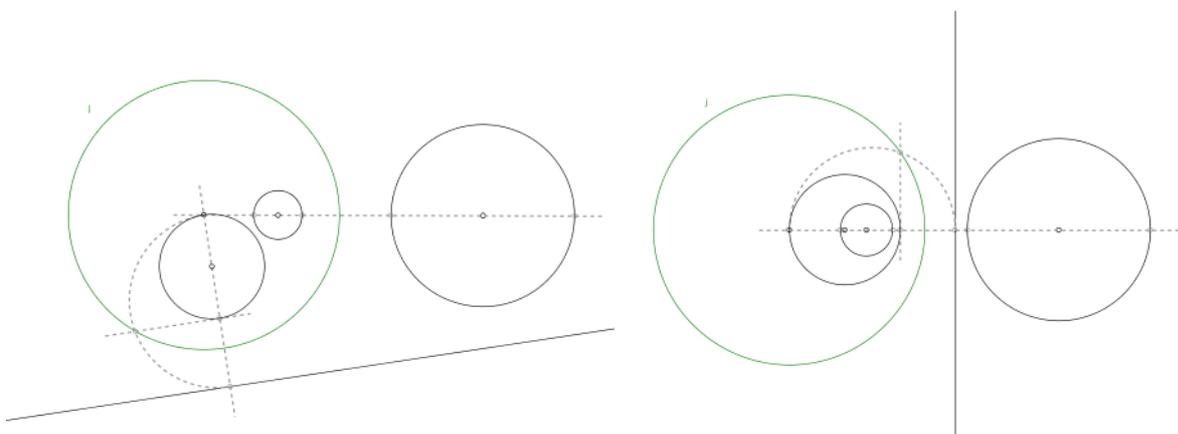
1. Eine Gerade, die einen Kreis berührt wird auf einen Kreis durch J abgebildet, der einen Kreis nicht durch J berührt:



2. Eine Gerade, die einen Kreis schneidet, wird auf einen Kreis durch J abgebildet, der einen Kreis nicht durch J schneidet:



3. Eine Gerade und ein Kreis, die sich nicht schneiden, werden auf zwei Kreise abgebildet, die sich nicht schneiden:



3.2. Konstruktionen

Den folgenden Konstruktionen der verschiedenen Fälle liegt die Idee zugrunde, den jeweils ursprünglich komplizierten Fall auf die recht einfache Lösung des Falles CLLp (s. Kapitel 2) zu bringen. Dafür eignet sich die Inversion am Kreis in besonderem Maße, wie die oben dargestellten Eigenschaften vermuten lassen. Letztendlich könnte man jeden Fall des Berührproblems auf diese Weise lösen, jedoch wäre das im Einzelfall, z. B. PPP, unnötig aufwändig. Sinnvoll ist die Lösung des Hauptfalls CCC und die der Fälle CCP, CCL, CPP und PCL, da deren elementargeometrischen Lösungen schon recht kompliziert sind, so dass die Lösung durch die Inversion eine interessante Alternative darstellt. Die Inversion bietet einen ganz eigenen Lösungsansatz, dem aber interessanterweise ebenfalls ganz elementar der Kathetensatz zugrunde liegt, der eine Folgerung des Tangenten-Sekanten-Satzes ist, welcher wiederum grundlegend für die elementargeometrischen Lösungen ist.

Es wird häufig auf die Lösung des Falls CCC hingewiesen werden, da diese bereits die meisten Lösungsstrategien der Inversion enthält. Man unterscheide wohl in der jeweiligen Situation die vier, paarweise verschiedenartig berührenden Kreise des Falls CLLp. Nicht immer führen alle Kreise zu einer Lösung.

Sehr wichtig ist es, an der Lage der Kreise zu erkennen, welcher Kreis auf welchen abgebildet wird. Liegt z. B. ein Großteil des zu invertierenden Kreises innerhalb des Inversionskreises, so liegt der Großteil seines Bildes außerhalb des Inversionskreises. Schneidet ein Urbild den Inversionskreis, so existieren zwei Fixpunkte, anhand derer man die Abbildung orientieren kann.

Begreift man die Inversion als Spiegelung, so ist klar, dass sich Inneres zu Äußerem wendet und umgekehrt. Im Zusammenhang mit den erhaltenden Eigenschaften der Inversion, kann man diese Abbildung recht gut kalkulieren.

CCC²⁶

Da acht verschiedene Berührungskreise in diesem Fall existieren, muss man unterschiedliche Konstruktionen für die einzelnen Kreise durchführen, die aber alle nach dem gleichen Prinzip funktionieren.

Konstruktion 1:

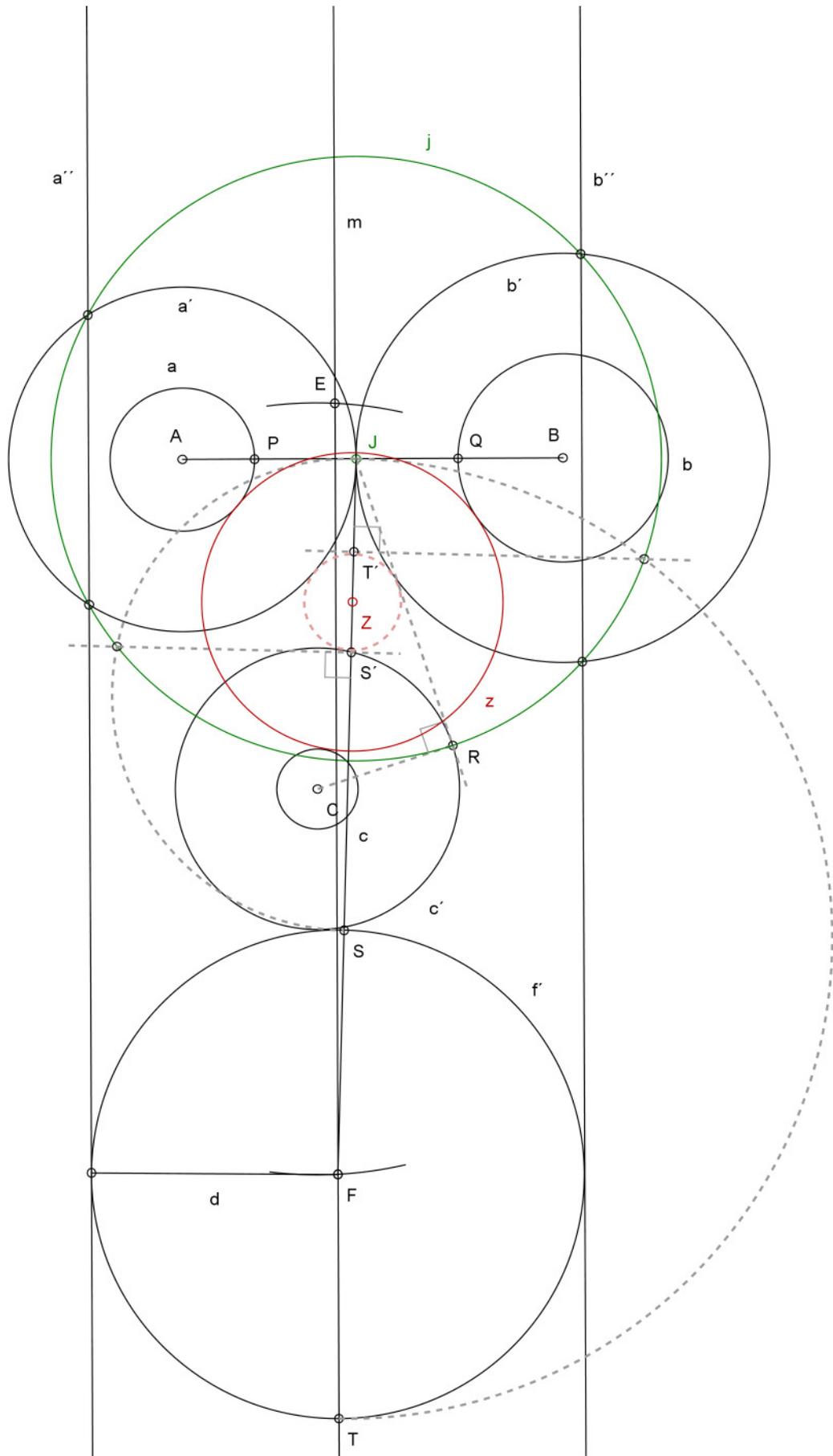
Gegeben: drei Kreise a (A, r), b (B, s) und c (C, t)

1. verbinde A und B , AB schneidet die Kreise a in P und b in Q
2. konstruiere die Mitte J von PQ
3. vergrößere die drei gegebenen Radien jeweils um PJ und zeichne damit die Kreise um A, B und C
4. bezeichne die neuen Kreise $a'(A, AJ)$, $b'(B, BJ)$ und $c'(C, t + PJ = t')$
5. konstruiere eine Tangente von J an c' , Berührungspunkt sei R
6. der Kreis j (J, JR) sei der Inversionskreis

Der Mittelpunkt J des Kreises j ist der Berührungspunkt der Kreise a' und b' , also werden diese durch die Inversion an j auf parallele Geraden abgebildet. Gleichzeitig schneidet j den Kreis c' rechtwinklig, wodurch c' bezüglich der Inversion an j Fixkreis wird.

7. invertiere die Kreise a' und b' zu den Geraden a'' und b'' ($a'' \parallel b''$). Damit wird CCC auf den Fall CLL mit parallelen Geraden abgebildet (CLLp)
8. konstruiere die Mittelparallele m zu a'' und b'' . Der Abstand zwischen a'' bzw. b'' und m sei d
9. der Kreis um C mit dem Radius $d + t'$ schneidet m in E und F , wobei F unterhalb c' liegt (damit erhält man später den Kreis, der die gegebenen Kreise innen berührt, denn er befindet sich komplett außerhalb des Inversionskreises und wird somit auch komplett nach innen abgebildet)
10. konstruiere den Berührungskreis $f'(F, d)$ zu a'' , b'' und c'
11. invertiere f'
12. dazu: zeichne eine Gerade durch J und F , die f' in den Punkten S und T schneidet
13. finde die Mitten von JS und JT
14. die Thaleskreise über JS und JT schneiden j
15. fälle die Lote von diesen Schnittpunkten auf JT
16. benenne die Fußpunkte S' und T' (die Bilder von S und T)
17. die Mitte von $S'T'$ ist der Mittelpunkt Z des Berührungskreises zu den erweiterten Kreisen a' , b' und c'
18. vergrößere dessen Radius ZS' um PJ
19. der Kreis mit diesem Radius um Z ist der Berührungskreis, der a , b und c außen berührt.

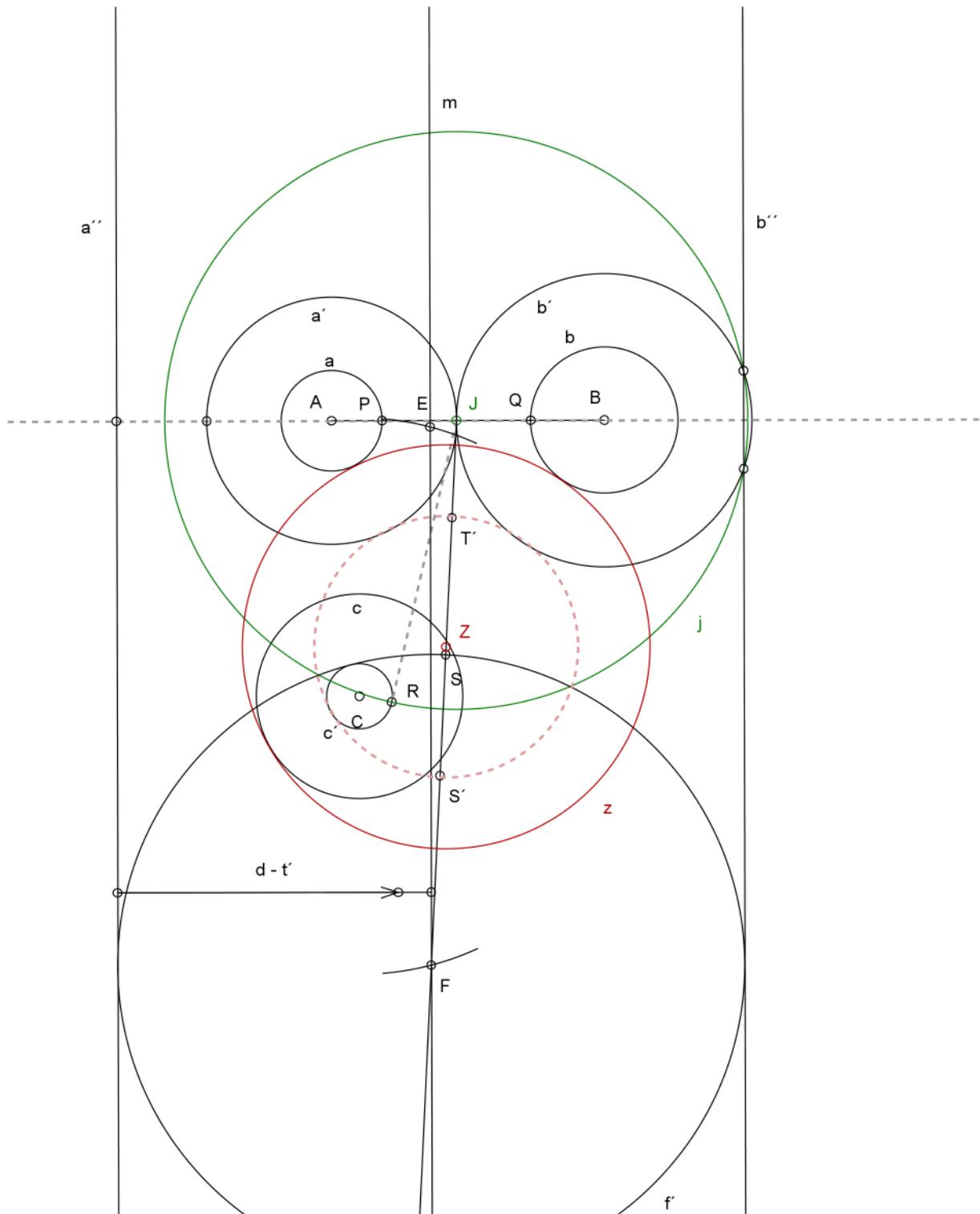
²⁶ s. Hartshorne, S. 354



Konstruktion 3:

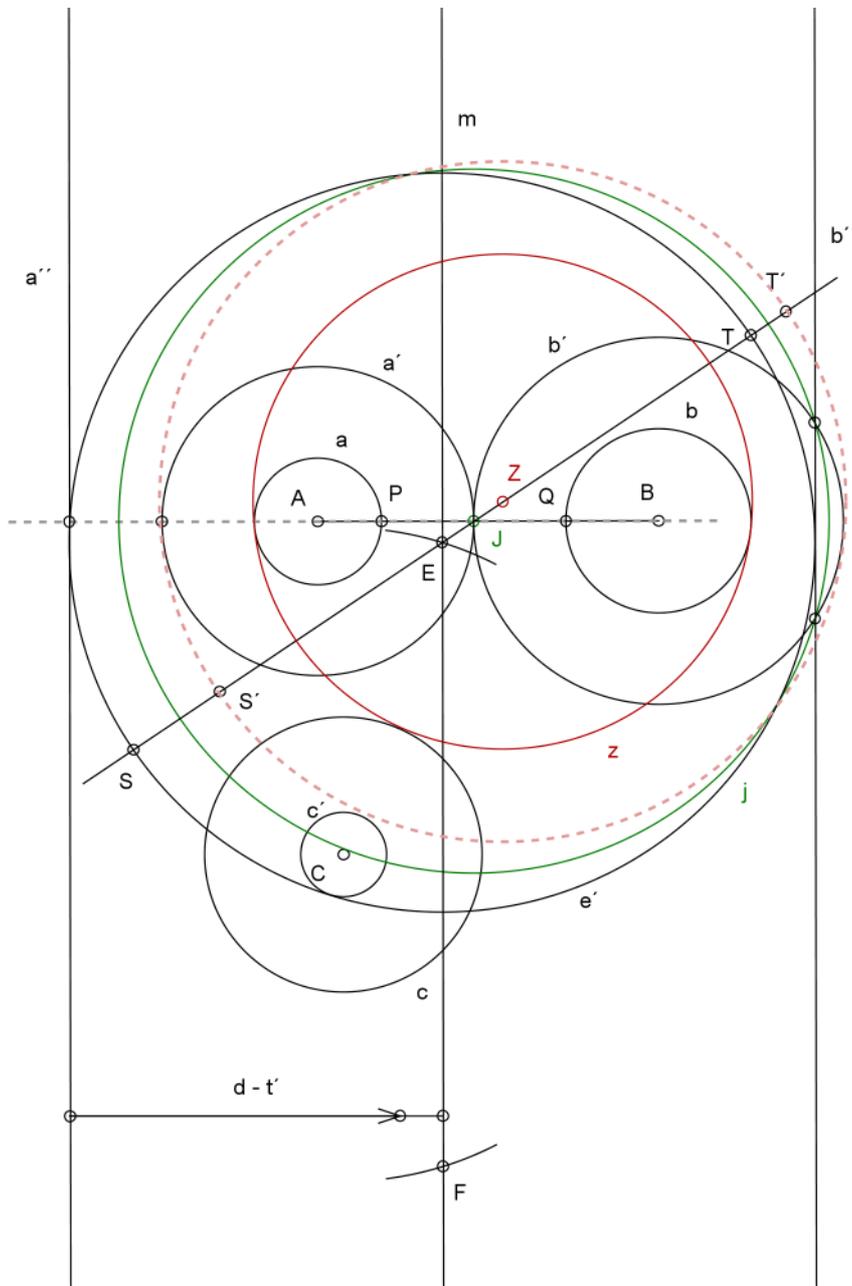
Die Kreise a' und b' bleiben, jedoch der Radius t des Kreises c wird hier um PJ verringert und liefert $c'(C, t')$ mit $t' = t - PJ$.

Zur Konstruktion des Kreises, der die Kreise a und b aus- und c einschließt, konstruiert man in der Situation CLL_p den Kreis f' um F , der c' einschließend berührt und dessen Mittelpunkt außerhalb des Inversionskreises liegt. Der Punkt F ist der Schnittpunkt der Mittelparallelen m und des Kreises um C mit Radius $d - t'$. Nach Inversion dieses Kreises $f'(F, d)$ erhält man zunächst den Kreis um Z , der die erweiterten Kreise a' und b' ausschließt und c' einschließt und durch dessen Erweiterung um PJ den gesuchten Berührkreis.



Konstruktion 4:

Zur Konstruktion des Kreises, der die Kreise a und b ein- und c ausschließt, konstruiert man in der Situation CLLp den Kreis e' um E , der c' (C, t') einschließend berührt und dessen Mittelpunkt E innerhalb des Inversionskreises liegt. E ist der zweite Schnittpunkt, des Kreises um C mit Radius $d - t'$ mit der Mittelparallelen m . Nach Inversion dieses Kreises e' erhält man zunächst den Kreis um Z , der die erweiterten Kreise a' und b' einschließt und c' ausschließt und durch dessen Reduktion um PJ den gesuchten Berührkreis.



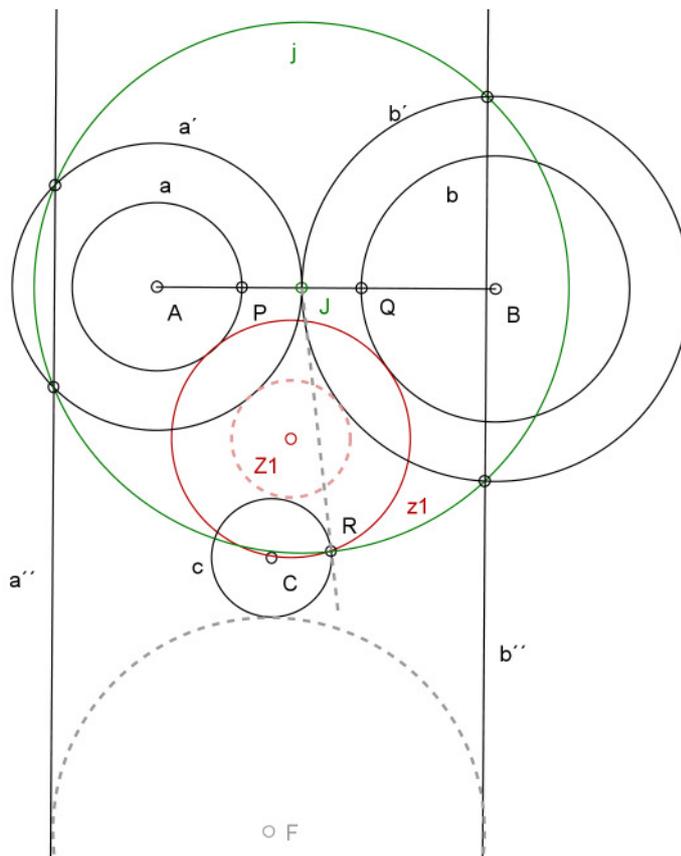
In den hier gezeigten Konstruktionen liegt J auf AB und c' ist Fixkreis bzgl. der Inversion an j . Die weiteren vier Berührkreise findet man durch „Rollentausch“ in dem der Inversionskreismittelpunkt J auf AC liegt und b' Fixkreis ist bzw. J auf BC liegt und a' Fixkreis ist und dann durch die Konstruktionen 3 und 4 die verschiedenartig berührenden Kreise findet.

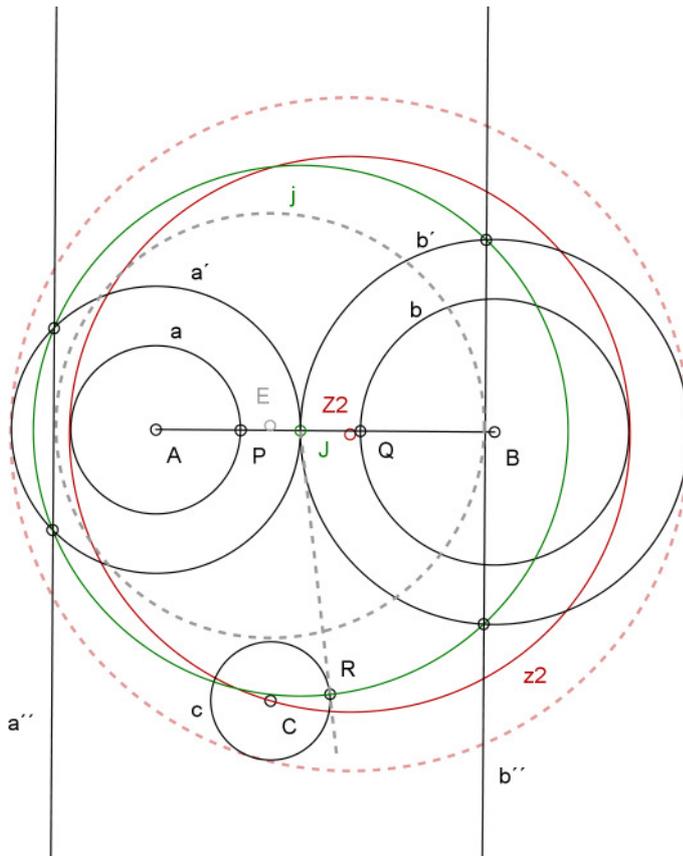
CCP

Konstruktion:

Gegeben: zwei Kreise a (A, r) und b (B, s) und Punkt C

1. verbinde A und B , die Strecke AB schneidet die Kreise a im Punkt P und b in im Punkt Q
2. finde die Mitte J zwischen P und Q
3. vergrößere die Kreise a und b um PJ zu $a'(A, AJ)$ und $b'(B, BJ)$, und den Punkt C zum Kreis c (C, PJ)
4. der Punkt J sei der Mittelpunkt des Inversionskreises, dessen Radius wie folgt bestimmt wird: man konstruiert eine Tangente von Punkt J an den Kreis c , der Berührungspunkt sei R , dann ist der Radius des Inversionskreises JR und er schneidet c rechtwinklig
5. invertiere die Kreise a' , b' und c ; die Kreise a' und b' werden auf parallele Geraden abgebildet, der Kreis c ist Fixkreis. Somit wird der Fall CCP auf den Fall CLLp gebracht und man verfährt analog zum Fall CCC (Konstr. 1 und 2). Die beiden Kreise um E und F aus CLLp, die c ausschließend berühren, werden zu den Kreisen invertiert, die a' und b' (und damit nach Radiusveränderung auch a und b) gleichartig berühren, hier $z1$ und $z2$.

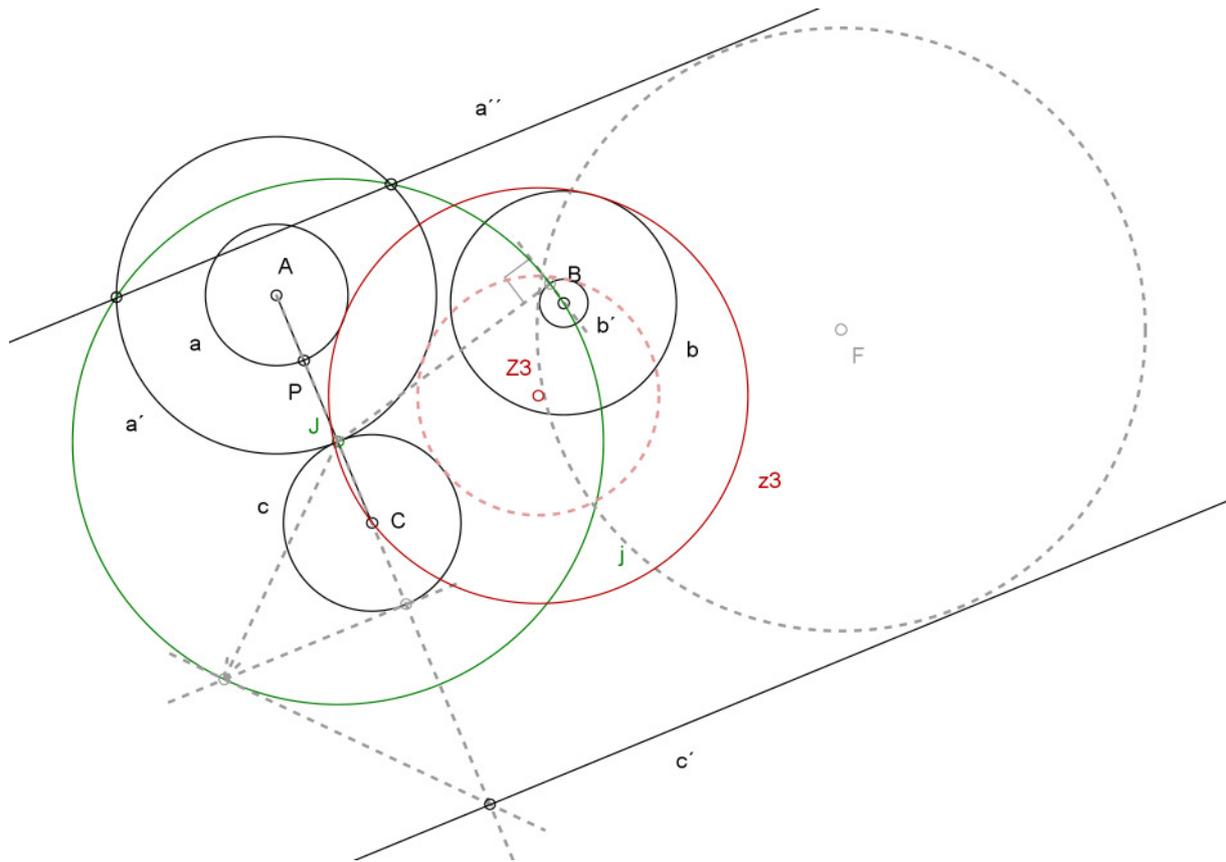




Einen der beiden Kreise, die a und b ungleichartig berühren, findet man durch eine neue Konstruktion, bei der a und ein Kreis um C zu parallelen Geraden invertiert werden und ein entsprechend veränderter Kreis b' Fixkreis ist.

Konstruktion:

1. verbinde A und C , AC schneidet a in P
2. die Mitte von PC sei J
3. zeichne die Kreise $a'(A, AJ)$ und $c(C, CJ)$,
4. verkleinere b um PJ zu $b'(B, s - PJ)$
5. J sei der Mittelpunkt des Inversionskreises j , der b' rechtwinklig schneidet
6. invertiere a' zur Geraden a'' und c zur Geraden c' , b' ist Fixkreis. Es liegt wieder der Fall CLLp vor, für den sich hier aber nur eine Lösung findet



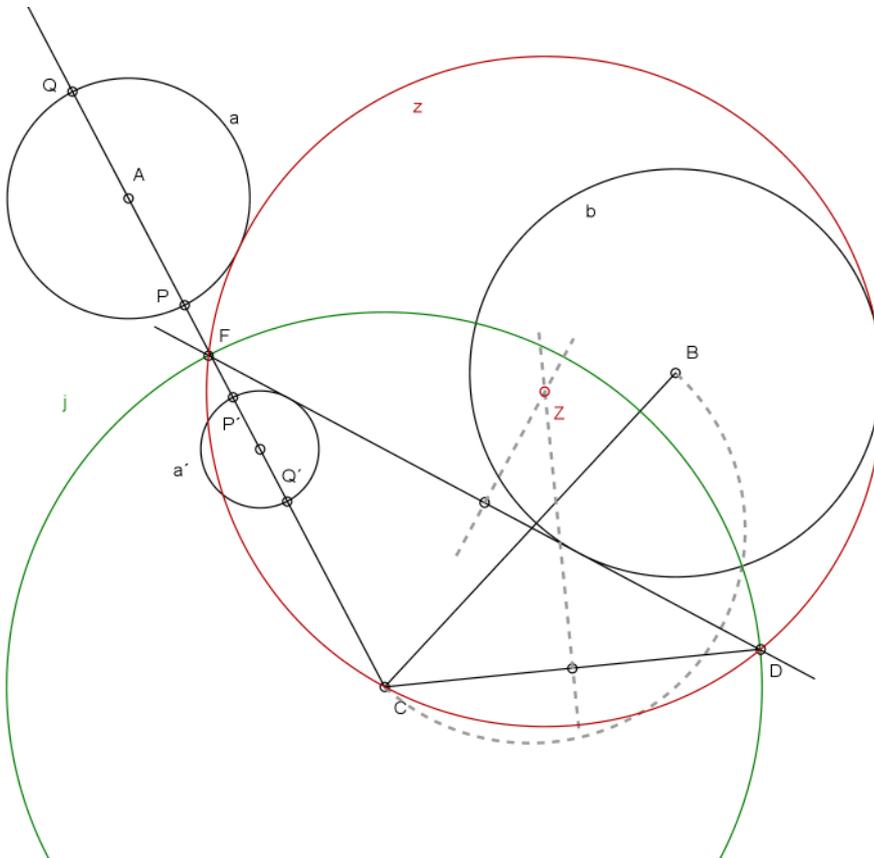
Den anderen der beiden Kreise findet man durch eine analoge Konstruktion, bei der b und ein Kreis um C zu parallelen Geraden invertiert werden und ein entsprechend veränderter Kreis a' Fixkreis ist.

Bemerkung: Sollte sich durch Radiusreduktion ein negativer Radius für den zu verändernden Kreis b ergeben (hier falls $s < PJ$), so arbeitet man mit dem Betrag des negativen Radius weiter und wählt in der Situation CLLp die b' außen berührenden Kreise zur Inversion (analog zu CCC, Konstr. 1 und 2).

Eine andere Lösung dieses Falles mit Hilfe der Inversion findet sich bei Scheid/Schwarz²⁷:

Gegeben: zwei Kreise a (A, r) und b (B, s) und Punkt C

1. Konstruiere den Inversionskreis j als den Kreis um C , der b rechtwinklig schneidet. b ist also Fixkreis
2. invertiere a an j zu a'
3. konstruiere eine gemeinsame Tangente von a' und b (hier gibt es vier Möglichkeiten, die zu den vier verschiedenen Berührkreisen dieses Falls führen)
4. das Bild bei Inversion an j dieser Geraden, die den Inversionskreis in D und F schneidet, ist der Kreis z durch F, C und D
5. z ist der gesuchte Berührkreis



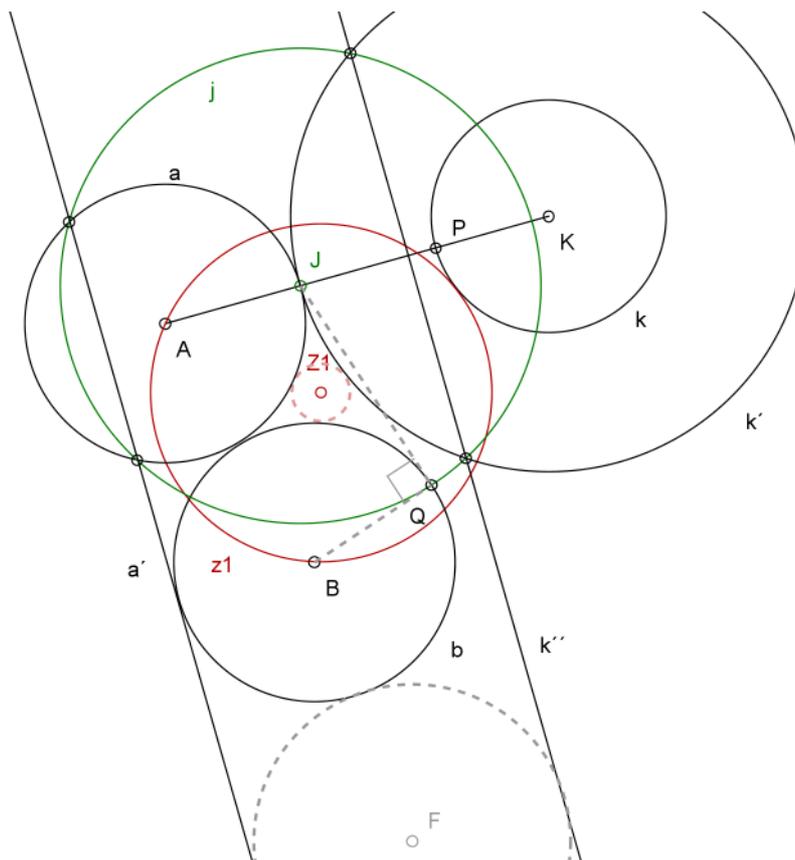
²⁷S. 152

CPP

Konstruktion:

Gegeben: ein Kreis k (K, r) und die Punkte A und B

1. verbinde die Punkte K und A , die Strecke AK schneidet den Kreis k in P
2. konstruiere die Mitte J zwischen P und A
3. vergrößere den Kreis k um JP zu $k'(K, KJ)$ und die Punkte A und B zu den Kreisen a (A, JP) und b (B, JP). Der Punkt J ist dann der Mittelpunkt des Inversionskreises, sein Radius wird wie folgt bestimmt: man legt eine Tangente von J an b (B, BJ), diese berührt den Kreis b im Punkt Q , also ist der Radius des Inversionskreises JQ
4. invertiere die Kreise k' , a und b . Die Kreise k' und a werden in parallele Geraden k'' und a' überführt, der Kreis b ist Fixkreis. Damit liegt der Fall CLLp vor und man verfährt analog zu CCC (Konstruktion 1 und 2). Das Bild des Kreises um F liefert den Kreis $z1$, der k ausschließend berührt.

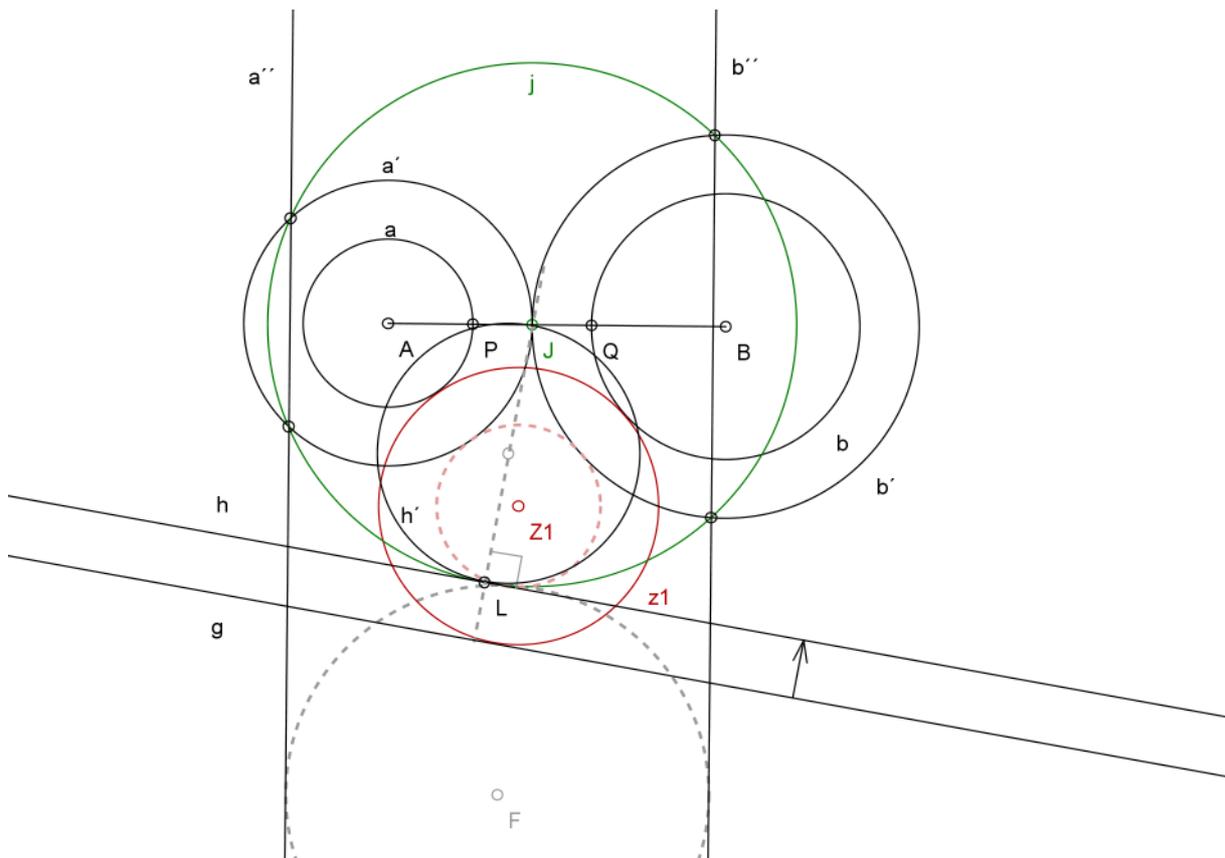


CCL

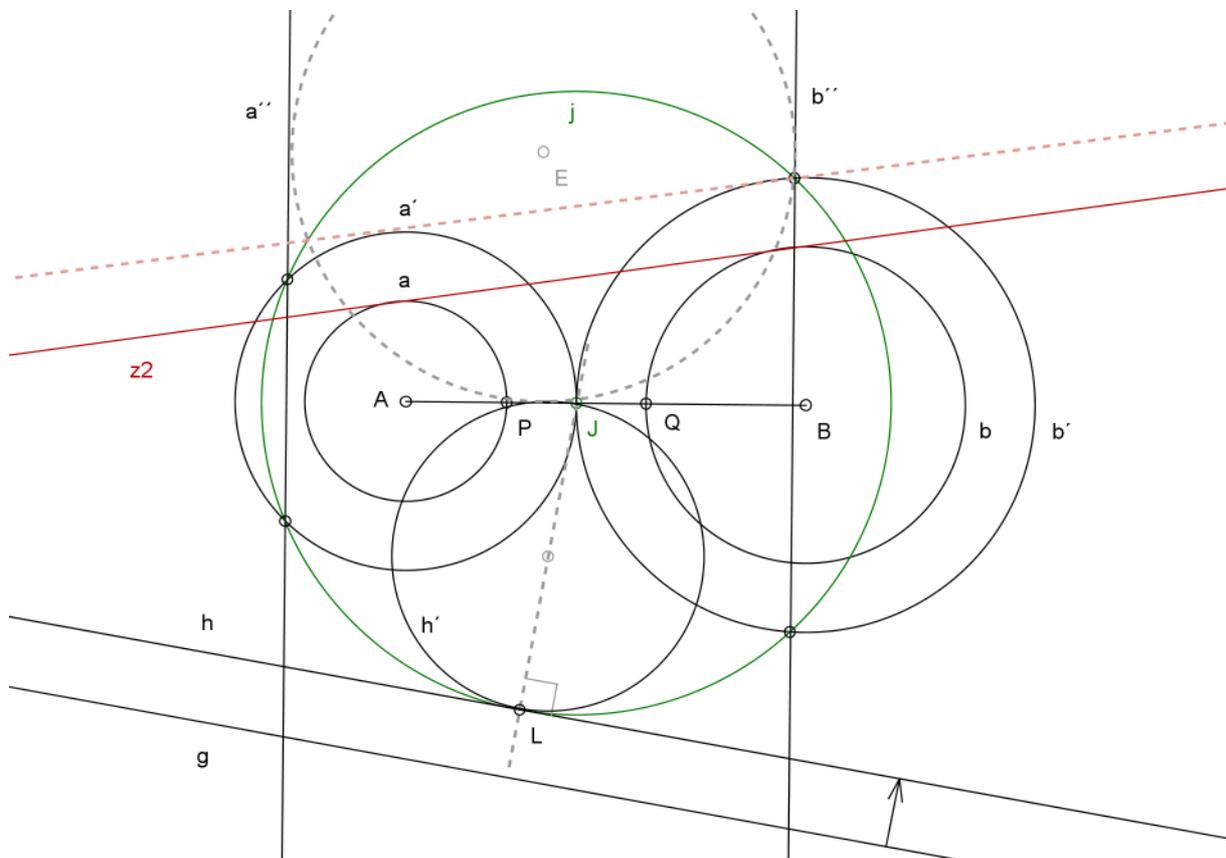
Konstruktion:

Gegeben: zwei Kreise a (A, r) und b (B, s) und eine Gerade g

1. verbinde A und B
2. AB schneidet a in P und b in Q
3. die Mitte von PQ sei J
4. zeichne die Kreise a' (A, AJ), b' (B, BJ)
5. zeichne die Parallele h zu g im Abstand PJ den Kreisen a und b zugewandt
6. der Kreis j um J , der h berührt, sei der Inversionskreis. Dazu: das Lot von J auf h in L ist der Radius von j
(Dass j die Parallele h berührt ist günstig, da das Bild von h dadurch zu einem Kreis h' durch J und F wird, der leicht zu finden ist)
7. invertiere a' , b' und h zu den Geraden a'' und b'' und zum Kreis h'
Es liegt wieder der Fall CLLp vor und man verfährt analog zu CCC (Konstr. 1 und 2).
Man findet die beiden Kreise, die a und b außen berühren



Der Kreis z_2 ist annähernd eine Gerade, da sein Urbild, der Kreis um E , fast durch den Inversionskreismittelpunkt J geht. Daher ist der Mittelpunkt Z_2 hier nicht zu sehen.



Weitere zwei Berührungskreise, und zwar z_3 und z_4 , die a und b einschließend berühren, findet man durch Verschieben der Gerade h in die den Kreisen abgewandte Halbebene (s. PCL). Diejenigen Kreise z_5 und z_6 , die a und b verschiedenartig berühren, nämlich den einen außen und den anderen innen, sind analog zum Fall CCC zu finden, indem man die Gerade und einen der beiden Kreise berührend macht, damit sie unter der Inversion zwei parallele Geraden liefern. Der zweite Kreis, der nun verkleinert wird, ist wieder Fixkreis.

Konstruktion:

1. fälle das Lot von A auf g , Lotfußpunkt sei L
2. das Lot schneidet a in P
3. die Mitte von PL sei J
4. zeichne den Kreis $a'(A, AJ)$
5. verschiebe die Gerade g um PJ parallel zu h durch J
6. verkleinere den Radius s von b um PJ und zeichne den Kreis $b'(B, s - PJ)$
7. konstruiere den Kreis j um J , der b' senkrecht schneidet, j ist der Inversionskreis
8. invertiere a' zur Geraden a'' , h ist Fixgerade, da sie durch J verläuft, b' ist Fixkreis

Die Kreise z_7 und z_8 , die a ein- und b ausschließen, finden sich entsprechend, wenn man nicht a und g sondern b und g wie oben verändert.

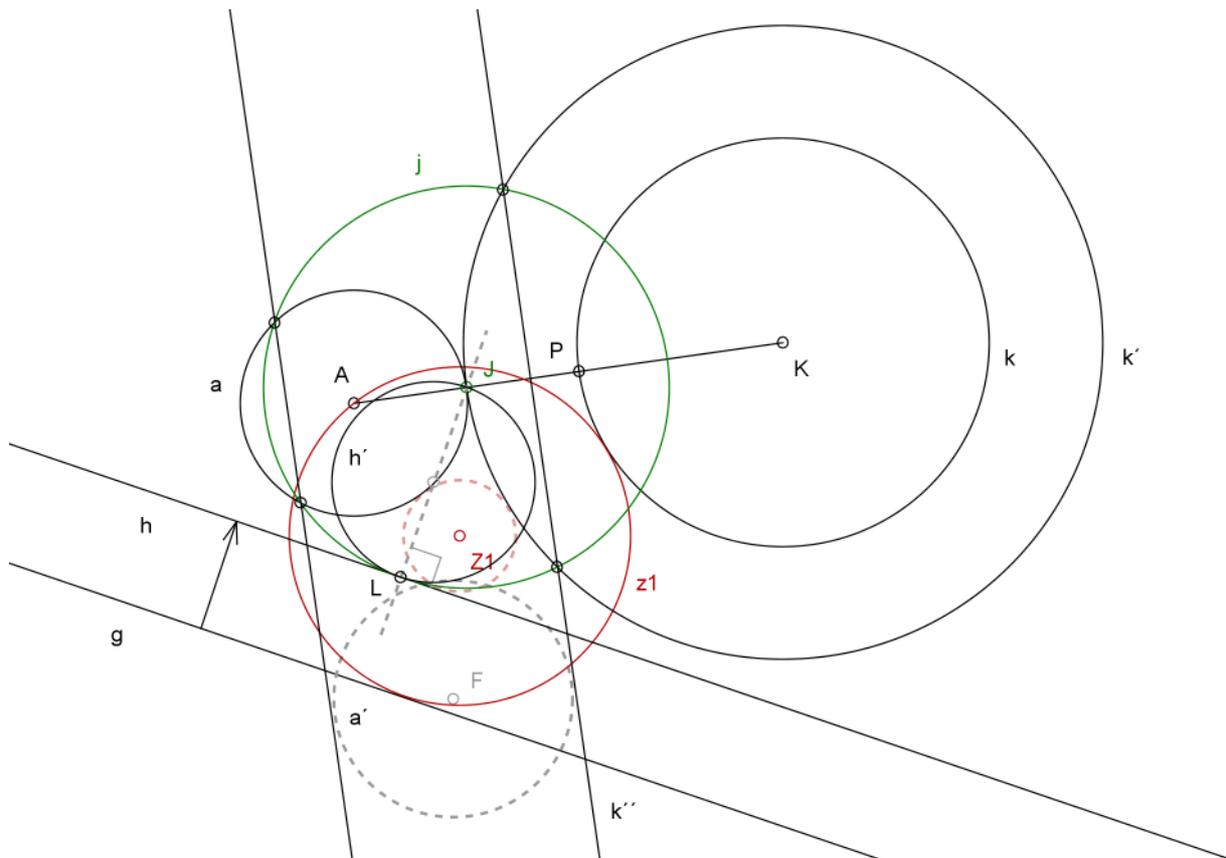
Bemerkung: Sollte sich durch Radiusreduktion ein negativer Radius für einen der zu verändernden Kreis ergeben (hier falls $s < PJ$), so arbeitet man mit dem Betrag des negativen Radius weiter und wählt in der Situation CLLp die b' außen berührenden Kreise zur Inversion (analog zu CCC, Konstr. 1 und 2)

PCL

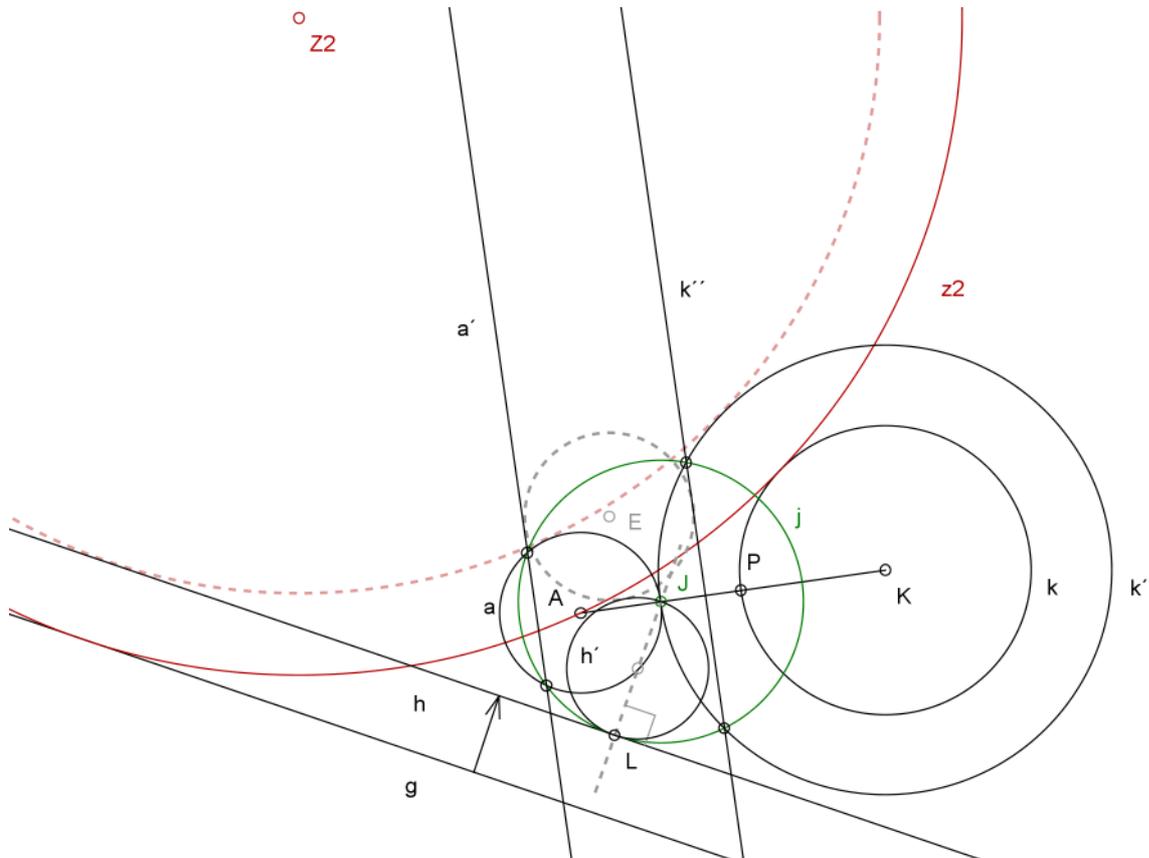
Konstruktion:

Gegeben: ein Kreis k (K, r), eine Gerade g und ein Punkt A

1. verbinde A und K
2. AK schneidet k in P
3. die Mitte von AP sei J
4. zeichne die Kreise a (A, AJ), k' (K, KJ)
5. zeichne die Parallele h zu g im Abstand AJ den Kreisen a und k zugewandt
(an dieser Stelle der Konstruktion liegt der Fall CCL vor)
6. der Kreis j um J , der h berührt, sei der Inversionskreis. Dazu: das Lot von J auf h in L ist der Radius von j
(dass j die Parallele h berührt ist günstig, da das Bild von h dadurch zu einem Kreis h' durch J und L wird, der leicht zu finden ist)
7. invertiere a, k' und h zu den Geraden a' und k'' und zum Kreis h' ,
damit liegt der Fall CLL_p vor und man verfährt analog zum Fall CCC (Konstr.1 und 2). Damit finden sich die beiden Kreise $z1$ und $z2$, die k von außen berühren. $Z1$ ist der Mittelpunkt des Kreises, dessen Urbild der Kreis um F ist, der h' außen berührt



Z2 ist der Mittelpunkt des Kreises, dessen Urbild der entgegengesetzte Kreis um E ist, der h' außen berührt.



Die beiden anderen Kreise, die k einschließend berühren, findet man nicht, wie man vielleicht vermuten könnte, durch die beiden verbleibenden Kreise der Situation CLL_p , sondern durch die Parallele h im Abstand AJ zur Geraden g , die man zu der den Kreisen abgewandten Seite hin konstruiert. h wird dann invertiert zu h' und wieder liegt die Situation CLL_p vor, und man verfährt analog zu CCC (Konstr. 1 und 2).

Bemerkung: es können hier für den Fall CCL nur vier Kreise gefunden werden, da der Punkt A nur auf eine Art berührt werden kann und nicht ein- oder ausschließend wie ein Kreis.

4. Analytische Methoden

Verlagert man die 10 Fälle des Berührproblems in ein Koordinatensystem, so können durch Aufstellen und Lösen geeigneter Gleichungen die gesuchten Berührkreise gefunden werden. Denn alle gegebenen Objekte können selbst durch Gleichungen beschrieben werden, die Bedingungen für die Lösung liefern. Grundsätzlich geht man dabei von dem bereits gelösten Problem aus und Mittelpunkt und Radius des Berührkreises werden durch die Unbekannten x , y und r beschrieben. Wichtig ist jedoch hier, die gegebenen Objekte so geschickt in das Koordinatensystem zu legen, dass komplizierte Gleichungen vermieden werden können. Das heißt, dass durch Verschiebung jede Situation ohne Einschränkung in das Zentrum der Achsen gebracht werden kann, so dass z. B. die x -Achse selbst als eine gegebene Gerade betrachtet werden kann, oder ein Punkt die x -Koordinate 0 erhält, was insgesamt zu Gleichungen mit weniger Komponenten führt.

Eine analytische Methode zur Bestimmung der Mittelpunkte und Radien der gesuchten Berührkreise besteht darin, die Gleichungen der entsprechenden Ortslinien der Mittelpunkte der gesuchten Kreise aufzustellen und durch Gleichsetzen deren Schnittpunkte zu finden, die dann die tatsächlichen Mittelpunkte der Berührkreise bilden. Diese Methode wird jedoch im Kapitel „Kegelschnitte“ behandelt.

Eine andere Möglichkeit bietet die Arbeit mit der allgemeinen Kreisgleichung. Da der gesuchte Kreis die drei gegebenen Objekte in jeweils einem Punkt berühren soll, lassen sich immer drei Gleichungen in den drei Unbekannten x , y (Mittelpunktskoordinaten) und r (Berührkreisradius) aufstellen und lösen. Das sei exemplarisch am Fall CCC im folgenden demonstriert²⁸:

Seien drei Kreise gegeben mit den Mittelpunkten $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ und den entsprechenden Radien r_1, r_2, r_3 , dann beschreibt die Gleichung $(u - x_1)^2 + (v - y_1)^2 = r_1^2$ den Kreis um A als die Menge aller Punkte $P(u, v)$, die von A den gleichen Abstand r_1 haben (analoge Gleichungen für die Kreise um B und C). Gesucht ist aber der Kreis mit dem Radius r , der den Kreis um A berührt, das heißt doch, dessen Mittelpunkt $M(x, y)$ von dem Mittelpunkt $A(x_1, y_1)$ den Abstand $r + r_1$ hat. Diese Situation wird durch die Gleichung $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (r + r_1)^2$ dargestellt.

Da diese Situation auch für die Kreise um B und um C gilt, ergibt sich für jeden der acht möglichen Berührkreise ein Gleichungssystem in den Unbekannten x , y und r .

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (r \pm r_1)^2 \quad (1)$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (r \pm r_2)^2 \quad (2)$$

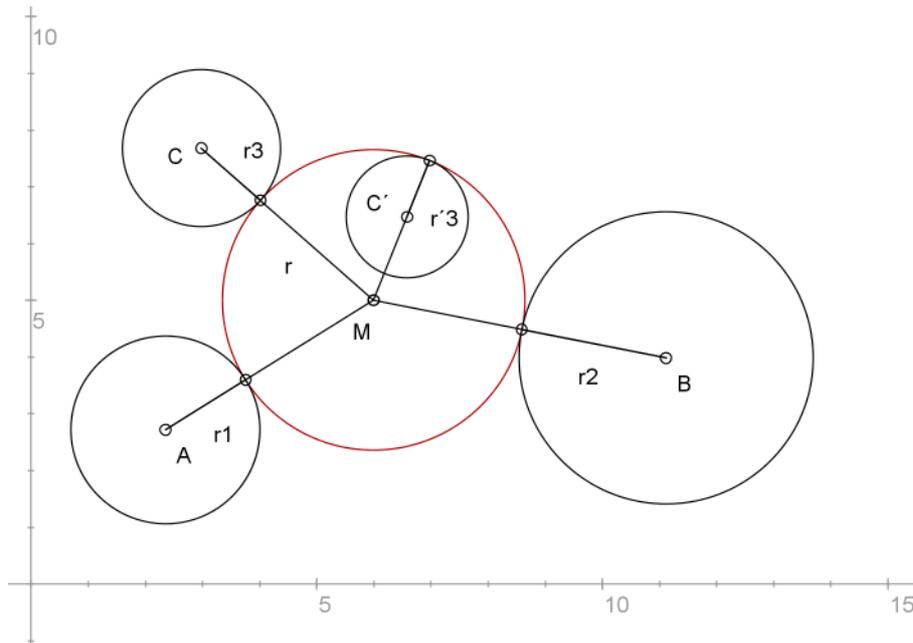
$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = (r \pm r_3)^2 \quad (3)$$

Der Vorzeichenwechsel gibt die Situation wieder, ob der gesuchte Kreis den jeweils gegebenen von außen oder einschließend berührt. Denn es ist bei äußerer Berührung der Abstand $d(MC) = r + r_3$ und bei innerer Berührung der Abstand $d(MC) = r - r_3$.

(Ist $r - r_3 \leq 0$, wie im Fall $r \leq r_3$, so ist doch $(r - r_3)^2 \geq 0$.) Das gilt dann entsprechend auch für die übrigen Kreise.

Eine Zeichnung soll dies und gleichzeitig die Bedeutung der drei Gleichungen veranschaulichen.

²⁸ s. <http://mathworld.wolfram.com/ApolloniusProblem.html>



Umformen der Gleichungen bringt:

$$\begin{aligned}
 & x^2 - 2xx_i + x_i^2 + y^2 - 2yy_i + y_i^2 - (r^2 \pm 2rr_i + r_i^2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + y^2 - r^2 - 2xx_i - 2yy_i \mp 2rr_i + x_i^2 + y_i^2 - r_i^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + y^2 - r^2 - 2xx_i - 2yy_i \mp 2rr_i = -(x_i^2 + y_i^2 - r_i^2) \quad \text{mit } i = 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

Subtrahiere (2) - (1):

$$\begin{aligned}
 & -2xx_2 + 2xx_1 - 2yy_2 + 2yy_1 \mp 2rr_2 \pm 2rr_1 = -(x_2^2 + y_2^2 - r_2^2) + (x_1^2 + y_1^2 - r_1^2) \\
 \Leftrightarrow & 2x(x_1 - x_2) + 2y(y_1 - y_2) \pm 2r(r_1 - r_2) = (x_1^2 + y_1^2 - r_1^2) - (x_2^2 + y_2^2 - r_2^2)
 \end{aligned}$$

dann ergibt sich die Gleichung $ax + by + cr = d$ (4) mit

$$a = 2(x_1 - x_2)$$

$$b = 2(y_1 - y_2)$$

$$c = \pm 2(r_1 - r_2)$$

$$d = (x_1^2 + y_1^2 - r_1^2) - (x_2^2 + y_2^2 - r_2^2)$$

Subtrahiert man entsprechend (3) - (1), erhält man $a'x + b'y + c'r = d'$ (5) mit

$$a' = 2(x_1 - x_3)$$

$$b' = 2(y_1 - y_3)$$

$$c' = \pm 2(r_1 - r_3)$$

$$d' = (x_1^2 + y_1^2 - r_1^2) - (x_3^2 + y_3^2 - r_3^2)$$

Auflösen der beiden linearen Gleichungen (4) und (5) ergibt für die Koordinaten x und y :

$$x = \frac{b'd - bd' - b'cr + bc'r}{ab' - a'b}$$

$$y = \frac{ad' - a'd + a'cr - ac'r}{ab' - a'b}$$

Durch Einsetzen von x und y in (1) lässt sich der Radius des gesuchten Kreises bestimmen und damit auch die Koordinaten seines Mittelpunktes.

Auf diese Weise lassen sich auch die Fälle, in denen keine Gerade gegeben ist, also CCP, CPP und PPP, lösen, indem die entsprechenden Radien r_i ($i = 1,2,3$) in den obigen Gleichungen gleich Null gesetzt werden.

Die weiteren Fälle, in denen auch Geraden gegeben sind, lassen sich ebenfalls durch Abstandsbestimmung der gesuchten Mittelpunkte zu den gegebenen Objekten Punkt, Gerade oder Mittelpunkt eines Kreises lösen.

Aus der allgemeinen Kreisgleichung folgt die Gleichung des Abstands zweier Punkte:

$$d = \sqrt{(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2)}.$$

Die allgemeine Gleichung²⁹ des Abstandes eines Punktes $P(x_1, y_1)$ von einer Geraden g in

$$\text{beliebiger Lage: } ax + by + c = 0 \quad \text{ist: } d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Zur wesentlichen Vereinfachung ist es aber von Vorteil, die Situation so zu transformieren, dass eine der gegebenen Geraden mit der x -Achse zusammenfällt. Denn dann ist der Abstand zu einem Punkt (also der Radius r des gesuchten Kreise) der Betrag der y -Koordinate dieses Punktes, also $d = |y|$ ($= r$).

An dieser Stelle sollen schon die Ortslinieneigenschaften der Winkelhalbierenden und der Mittelsenkrechten, die man auch ausschließlich unter dem Kapitel „Kegelschnitte“ als entartete Kegelschnitte hätte führen können, benutzt werden. Aber durch die Gleichungen dieser Geraden lassen sich die Berechnungen der gesuchten Mittelpunkte, die ja auf diesen Ortslinien liegen, wiederum vereinfachen.

Zunächst sind diese Gleichungen zu bestimmen:

1. Die Mittelsenkrechte m zu zwei gegebenen Punkten:

Seien $A(x_1, y_1)$ und $B(x_2, y_2)$ gegeben.

Dann hat deren Verbindungsgerade g die Steigung $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ($x_1 \neq x_2$).

Entsprechend hat die Mittelsenkrechte m auf AB die negative reziproke Steigung

$$-\frac{1}{a} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \quad (y_1 \neq y_2).$$

Ihr Achsenabschnitt b wird durch den Mittelpunkt P zwischen A und B mit den Koordinaten

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \text{ durch Einsetzen in } m: y = -\frac{1}{a}x + b \text{ bestimmt:}$$

$$\begin{aligned} \frac{y_1 + y_2}{2} &= -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + b \\ \Leftrightarrow b &= \frac{(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2)}{2(y_2 - y_1)} \end{aligned}$$

²⁹ Bartsch, S. 282

(Im weiteren wird m aber der Einfachheit halber immer in der Form $y = ax + b$ verwendet mit

$$a = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}.)$$

2. Die Winkelhalbierenden w_1 und w_2 zu zwei gegebenen, sich schneidenden Geraden:

Eine Formel findet sich bei Bartsch³⁰:

Sind zwei Geraden $g : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ und $h : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (in allgemeiner Form) gegeben, so sind die Winkelhalbierenden w_1 und w_2 :

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\pm\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0,$$

(Die Vorzeichen richten sich nach dem Drehsinn der Geraden, also welche der beiden Winkelhalbierenden berechnet werden sollen.)

Günstiger ist es jedoch, die Geraden g und h so zu legen, dass h durch den Ursprung geht und g mit der x -Achse zusammenfällt. Dann ergeben sich die Gleichungen $g: y = 0$ und $h: y = mx$

(in Normalform) und entsprechend für eine Winkelhalbierende $w_1 : y = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1} + 1} x$.

Diese Formel folgt aus obiger Gleichung, denn für die hier gegebenen Geraden g und h gilt $a_1 = c_1 = c_2 = 0$ und $b_1 = b_2 = 1$ und $a_2 = -m$

Einsetzen ergibt:

$$\frac{y}{\sqrt{1}} + \frac{-mx + y}{\sqrt{(-m)^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow y\sqrt{m^2 + 1} + y = mx \Leftrightarrow y = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1} + 1} x$$

Für die andere Winkelhalbierende erhält man eine Gerade mit negativer reziproker Steigung

$$w_2 : y = -\frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{m} x$$

Damit können die beiden Fälle PPP und LLL sofort gelöst werden.

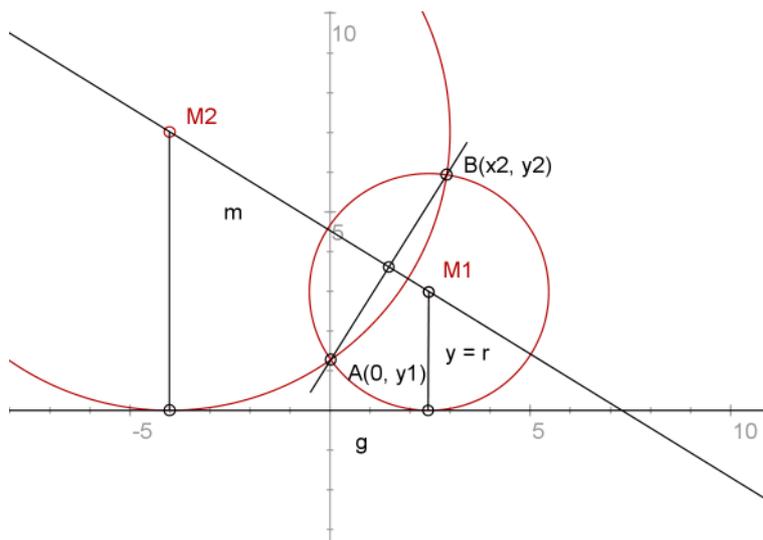
Im Fall PPP bestimmt man zunächst zwei der möglichen drei Mittelsenkrechten und berechnet deren Schnittpunkt. Dieser ist Mittelpunkt des gesuchten Berührungskreises, der zugleich der Umkreis des Dreiecks ist, das von den Punkten gebildet wird. Den Radius findet man dann mit der Formel des Abstands zweier Punkte.

Im Fall LLL, der vier Lösungen aufweist, ist ein Kreismittelpunkt der Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden, die im Inneren des Dreiecks liegen, das von den drei gegebenen Geraden gebildet wird, also der Inkreis dieses Dreiecks. Die drei anderen Mittelpunkte, also die der Ankreise, sind die Schnittpunkte der zu den drei inneren Winkelhalbierenden jeweils im Scheitel orthogonalen Geraden, die sich paarweise schneiden. Die Bestimmung der Radien ist hier recht aufwändig, da es höchstens einen Kreismittelpunkt gibt, dessen y -Koordinate gleichzeitig auch der Abstand zu einer Geraden, nämlich zur x -Achse, ist und somit den Radius bestimmt. Die anderen Radien können durch die oben erwähnte Gleichung des Abstands von einem Punkt und einer Geraden gefunden werden, wenn man die Gleichungen der gegebenen Geraden vorher in die allgemeine Form bringt.

Damit stehen nun ausreichend Werkzeuge zur Verfügung, die restlichen Fälle, in denen Geraden gegeben sind, also PPL, PLL, PCL, CLL und CCL, analytisch zu lösen.

³⁰ s. Bartsch, S. 287

PPL: (zwei Lösungen)



Seien zwei Punkte A und B und eine Gerade g im Koordinatensystem gegeben. Gesucht sind die beiden Mittelpunkte $M_{1,2}(x, y)$ der Kreise, die g berühren und durch A und B gehen, also die Punkte, die von g , A und B den selben Abstand haben.

Man wählt ohne Einschränkung die gegebene Situation schon zu Anfang so, dass die Gerade g mit der x -Achse zusammenfällt und der Punkt A auf der y -Achse liegt, so dass gilt:

$$A(0, y_1), B(x_2, y_2) \text{ und } g: y = 0$$

Ausgeschlossen sei auch hier der Fall, dass die Punkte in verschiedenen Halbebenen liegen (also muss gelten $y_1 \cdot y_2 > 0$) und dass sie auf g liegen (also y_1 und $y_2 \neq 0$).

Es ist aufgrund ihrer Definition klar, dass $M_{1,2}$ auf der Mittelsenkrechten m der Strecke AB liegen müssen. Diese Mittelsenkrechte sei bereits in Normalform berechnet.

$$\text{Also gilt } M_{1,2} \in m: y = ax + b$$

Für den Abstand der Mittelpunkte von den beiden Punkten A und B (also den Radius r der gesuchten Kreise) muss ebenfalls gelten:

$$d(M_{1,2}, A) = d(M_{1,2}, B) = y (= r), \text{ wobei } y \text{ eine Koordinate der gesuchten Mittelpunkte ist.}$$

also:

$$(1) \quad d(M_{1,2}, A) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y_1)^2} = y \quad \text{und}$$

$$(2) \quad d(M_{1,2}, B) = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} = y$$

Weiter mit (1), da diese Gleichung die einfachere ist:

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2} = y \quad (\text{quadrieren})$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y_1^2 = 2yy_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + y_1^2}{2y_1} = y \quad (3)$$

Da die Punkte $M_{1,2}$ auf der Mittelsenkrechten m liegen, kann man (3) mit der Gleichung für m gleichsetzen:

$$\frac{x^2 + y_1^2}{2y_1} = ax + b$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y_1^2 = 2y_1ax + 2y_1b$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2y_1ax + y_1^2 - 2y_1b = 0$$

Damit hat man eine quadratische Gleichung erhalten, die nach der p-q-Formel mit $p = -2y_1a$ und $q = y_1^2 - 2y_1b$ zwei Werte für x liefert, nämlich

$$x_{1,2} = y_1a \pm \sqrt{y_1^2a^2 - y_1^2 + 2y_1b} = y_1a \pm \sqrt{y_1^2(a^2 - 1) + 2y_1b}$$

Durch Einsetzen der gefundenen x -Werte in die Geradengleichung von m können die y -Werte bestimmt werden, die zugleich die gesuchten Radien sind. Damit sind die beiden Mittelpunkte gefunden und die Berührungskreise bestimmt.

Es existieren jedoch nur dann zwei reelle Lösungen, wenn der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ wird. Ist der Ausdruck negativ, so ist das aber nicht mit den Voraussetzungen vereinbar, denn es müsste gelten: $y_1^2(a^2 - 1) + 2y_1b < 0$, was bedeutet, dass $y_1(a^2 - 1) < -2b$ ist. Diese Bedingung leistet aber kein reelles a , wenn nach Voraussetzung $b > y_1 > 0$ ist.

Ist der Ausdruck unter der Wurzel aber Null, so kann das verschiedene Ursachen haben: Entweder ist $y_1 = 0$, das heißt, dass der Punkt A auf der Geraden g liegt, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Oder a und b sind zugleich Null. Ist aber $b = 0$, so verlief die Mittelsenkrechte durch den Ursprung, was mit $x_1 = 0$ bedeutet, dass $y_1 < 0$ wäre, was ebenfalls der Voraussetzung widerspricht, da A dann in einer anderen Halbebene als B liegt. Zusammen mit $a = 0$ hieße das $m = g$.

Bleibt also nur der Fall, dass gilt:

$$y_1^2(a^2 - 1) = -2y_1b$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{-\frac{2b}{y_1} + 1}$$

Diese Steigung für m kann aber nicht existieren, da nach den Voraussetzungen immer $b > y_1 > 0$ gilt, was den Ausdruck unter der Wurzel immer negativ lässt.

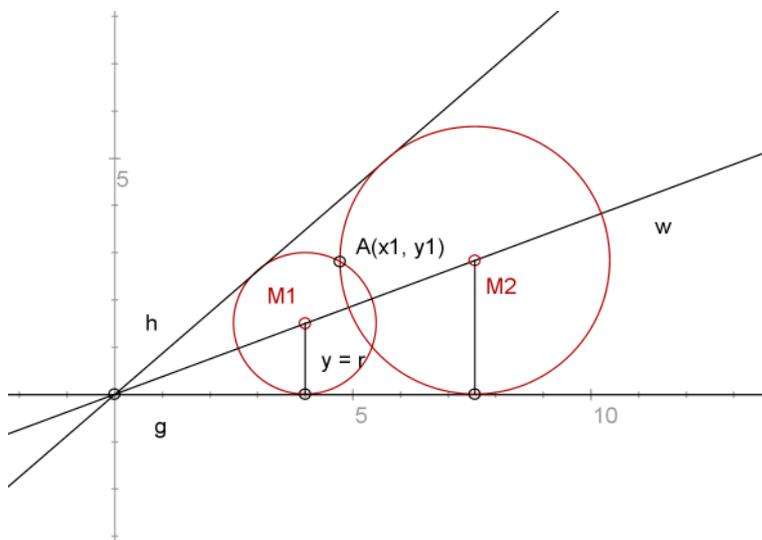
Das heißt also insgesamt, dass es in diesen Fällen, bei denen die Wurzel Null wird, auch nicht nur eine Lösung gibt, sondern keine. Der einzige Fall, der nur eine Lösung bringt, ist der, bei dem die Verbindungsgerade von A und B zur Geraden g parallel ist, also die Mittelsenkrechte auf g senkrecht steht. Dann ist $y_1 = y_2$ und die x -Koordinate des gesuchten Mittelpunktes ist

$\frac{x_2}{2}$ (da $x_1 = 0$) und die y-Koordinate berechnet sich mit dem Abstand

$$d(M,A) = \sqrt{\left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + (y - y_1)^2} = y, \text{ wodurch sich nach Umformen direkt } y = \frac{x_2^2}{8y_1} + \frac{y_1}{2} \text{ ergibt.}$$

An dieser Gleichung erkennt man auch den Fall (wenn man ihn zuließe), in dem die Punkte A und B auf der Geraden g liegen. Dann ist nämlich $y_1 = y_2 = 0$ und die y-Koordinate des Kreismittelpunktes „unendlich weit“ entfernt (durch y_1 im Nenner). Der Radius des Berührungskreises ist daher unendlich groß, was bedeutet, dass der Lösungskreis die Gerade g selbst ist.

PLL: (zwei Lösungen)



Seien zwei Geraden g und h und ein Punkt A so gegeben, dass gilt:
 $g: y = 0$, $h: y = mx$ ($m > 0$) und $A(x_1, y_1)$. A liegt im Winkelfeld auf keiner der Geraden, d.h. $mx_1 > y_1 > 0$. Dann hat die Winkelhalbierende in diesem Winkelfeld die Form

$$w: y = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1} + 1} x.$$

Es sind die Mittelpunkte $M_{1,2}(x, y)$ gesucht mit $M_{1,2} \in w$ und

$$d(M_{1,2}, A) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = y \quad (\text{wobei auch hier } y \text{ wieder eine Koordinate eines Mittelpunktes ist})$$

Quadrieren ergibt:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 &= y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 &= y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y_1^2 &= 2yy_1 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y_1^2}{2y_1} &= y \end{aligned}$$

Gleichsetzen mit w ergibt:

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y_1^2}{2y_1} = sx, \quad \text{mit } s = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1} + 1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y_1^2 = 2sxy_1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (2x_1 + 2sy_1)x + x_1^2 + y_1^2 = 0$$

Damit hat man wieder eine quadratische Gleichung erhalten, die nach der p-q-Formel mit $p = -(2x_1 + 2sy_1)$ und $q = x_1^2 + y_1^2$ zwei Werte für x liefert, so dass man zwei Mittelpunkte berechnen kann.

$$\begin{aligned} \text{Diese beiden x-Werte sind } x_{a,b} &= x_1 + sy_1 \pm \sqrt{x_1^2 + 2x_1sy_1 + s^2y_1^2 - x_1^2 - y_1^2} \\ &= x_1 + sy_1 \pm \sqrt{2x_1sy_1 + y_1^2(s^2 - 1)} \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Wurzel unter den gewählten Voraussetzungen nicht 0 werden kann. Denn das ist für $y_1 = 0$ der Fall, was bedeutet, dass A auf g liegen würde (dann gäbe es tatsächlich nur einen Berührungskreis mit Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden w. Ein weiterer fände sich nur auf der zweiten Winkelhalbierenden, die zu w orthogonal ist).

Oder es ist $s_{1,2} = -\frac{x_1}{y_1} \pm \sqrt{\frac{x_1^2}{y_1^2} + 1}$ (Das ergibt sich für s aus $2x_1sy_1 + y_1^2(s^2 - 1) = 0$).

$s_1 = -\frac{x_1}{y_1} - \sqrt{\frac{x_1^2}{y_1^2} + 1}$ bedeutet, dass s negativ ist, was aber durch der Wahl der Geraden g und h ausgeschlossen ist.

$s_2 = -\frac{x_1}{y_1} + \sqrt{\frac{x_1^2}{y_1^2} + 1}$ beschreibt die Situation, dass A auf h liegt (dann gäbe es wieder nur einen Berührungskreis bzgl. der Winkelhalbierenden w).

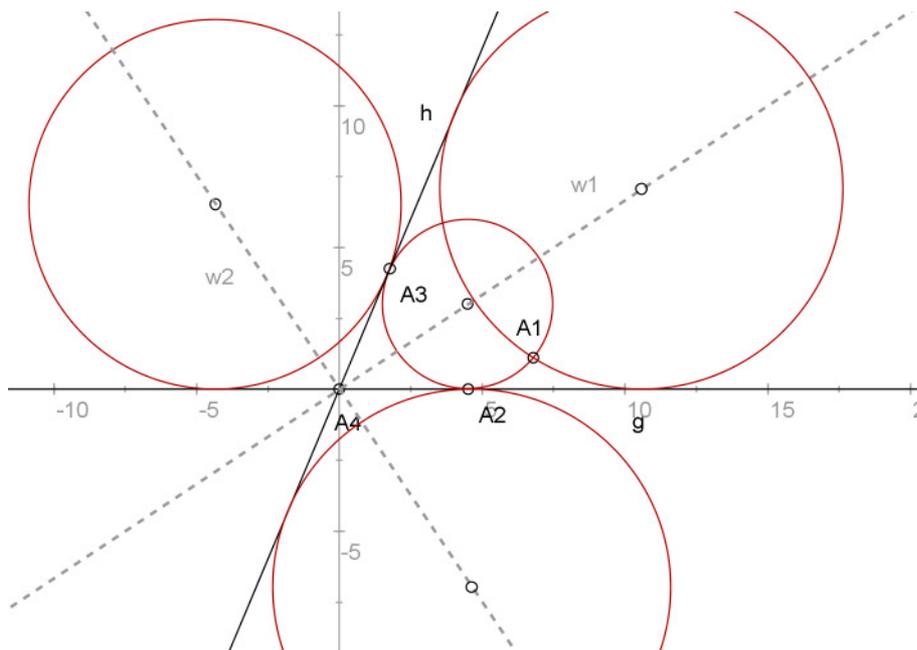
Der Ausdruck $2x_1sy_1 + y_1^2(s^2 - 1)$ unter der Wurzel wird negativ, wenn $s = 0$ ist.

Denn mit $s = 0$ ist $2x_1sy_1 + y_1^2(s^2 - 1) = -y_1^2$.

Das bedeutet aber, dass die Gerade h mit der Geraden g zusammenfällt. In dieser Situation existieren unendlich viele Lösungskreise.

Insgesamt nur eine Lösung gibt es in dem Fall, dass der Punkt A mit dem Ursprung zusammen fällt. Dann sind x_1 und y_1 beide Null und es ergibt sich als „Lösungskreis“ wiederum der Ursprung selbst.

Eine Zeichnung soll diese Zusammenhänge an den verschiedenen Lagen von A verdeutlichen:

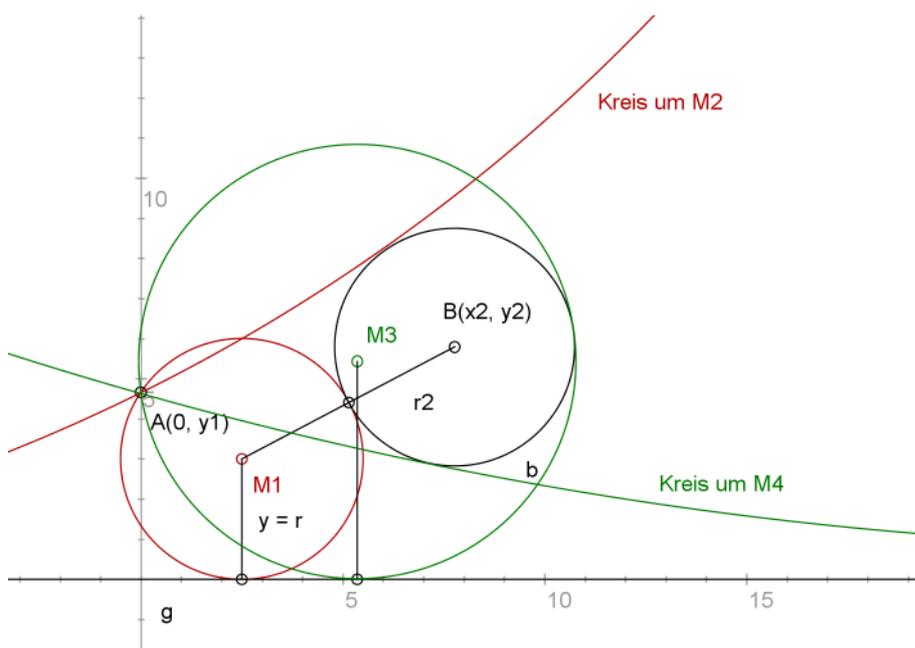


Es gibt für alle Lagen von A zwei Lösungskreise, außer in den Fällen

- A liegt im Ursprung
- h fällt mit g zusammen

Die Situation im ersten Quadranten kann als exemplarisch für den allgemeinen Fall PLL gesehen werden, da die Situationen in den übrigen Quadranten durch Spiegelungen erreicht werden.

PCL: (vier Lösungen)



Da Null- oder Negativ-Wurzeln, wie in den vorherigen Fällen gesehen, nur in Sonderfällen auftreten, können die Voraussetzungen enger gefasst werden:

Seien ein Punkt A, ein Kreis b und eine Gerade g so gegeben, dass gilt:

$A(0, y_1)$, $b(B, r_2)$ mit $B(x_2, y_2)$ und $g : y = 0$. A und b liegen ganz in der oberen Halbebene, d. h. $y_1 > 0$ und $y_2 > r_2 > 0$. Ebenso sei $A \notin b$

Es sind zunächst die Mittelpunkte $M_{1,2}(x, y)$ der Kreise gesucht, die den Kreis b von außen berühren, mit

$$d(M_{1,2}, A) = \sqrt{x^2 + (y - y_1)^2} = y \quad \text{und}$$

$$d(M_{1,2}, B) = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = y + r_2 \quad (y \text{ ist Koordinate der Mittelpunkte})$$

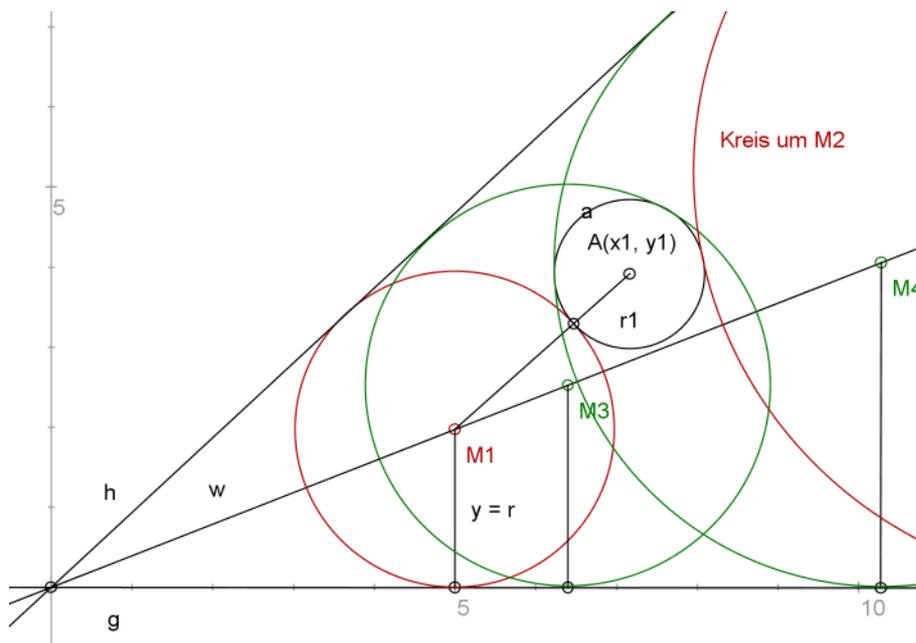
Quadrieren, umformen nach y und gleichsetzen beider Gleichungen ergibt wieder eine

quadratische Gleichung, die mit $p = \frac{2x_2 y_1}{y_1 - y_2 - r_2}$ und $q = \frac{y_1(x_1^2 + y_2^2 - r_2^2) - y_1^2(y_2 + r_2)}{y_1 - y_2 - r_2}$

zwei x-Werte liefert.

Analog findet man die Mittelpunkte $M_{3,4}(x, y)$ der Kreise, die den Kreis b mit ihrer Innenseite berühren, mit $d(M_{3,4}, B) = y - r_2$ (diese Kreise existieren nicht, wenn der Kreis b die Gerade g schneidet).

CLL: (vier Lösungen)



Seien zwei Geraden g und h und ein Kreis a so gegeben, dass gilt:

$g: y = 0$, $h: y = mx$ ($m > 0$), $a(A, r_1)$ mit $A(x_1, y_1)$. a liegt ganz in einem Winkel der beiden Geraden, d. h. $mx_1 > y_1 + r_1 + c > 0$ und $y_1 - r_1 > 0$ (wobei c hier die Differenz $mx - y_1 - r_1$ ist, deren genauer Wert für die weiteren Berechnungen nicht notwendig ist, da der Kontakt von a und h ausgeschlossen sein soll).

Dann hat die Winkelhalbierende in diesem Winkel, die Form

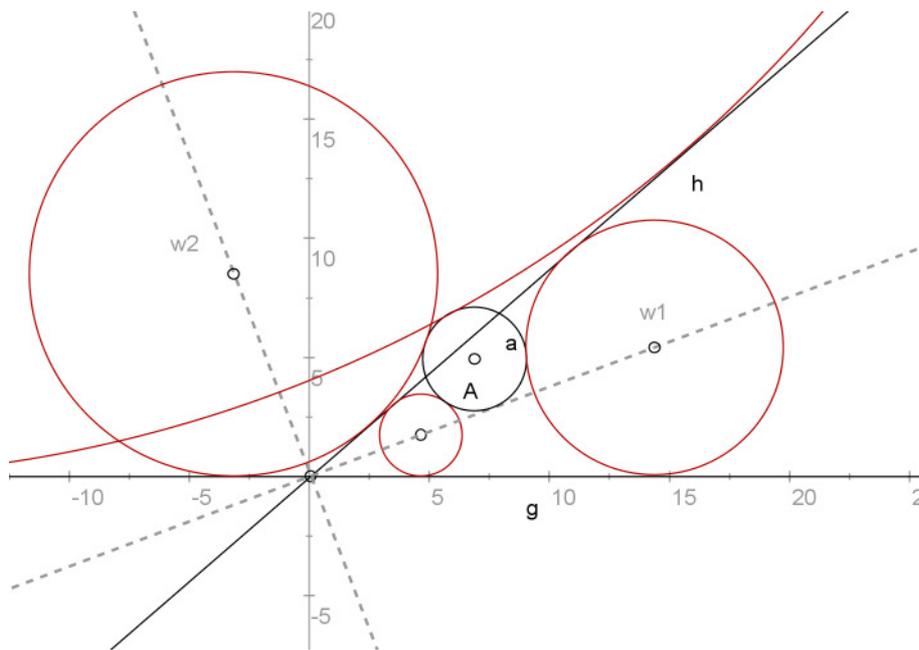
$$w: y = sx \quad \text{mit} \quad s = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1} + 1}$$

Es sind zunächst die Mittelpunkte $M_{1,2}(x, y)$ der Kreise gesucht, die den Kreis a von außen berühren, mit

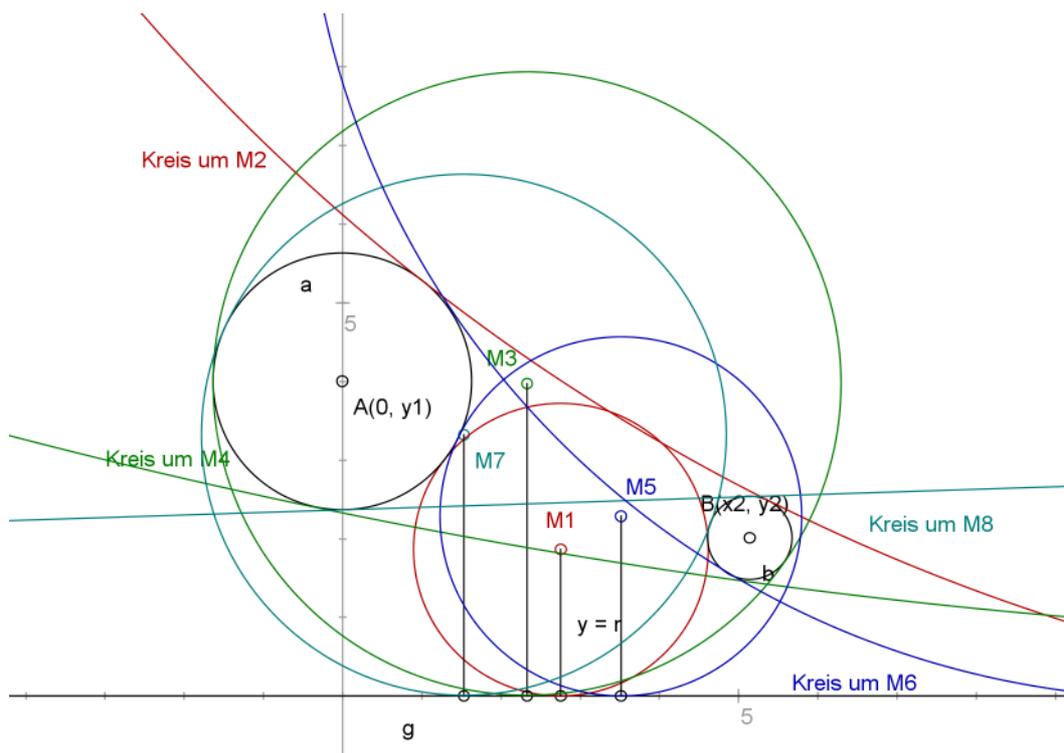
$$d(M_{1,2}, A) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = y + r_1$$

Quadrieren, umformen nach y und gleichsetzen mit w ergibt wieder eine quadratische Gleichung mit $p = -(2x_1 + 2sr_1 + 2sy_1)$ und $q = x_1^2 + y^2 - r_1^2$, die zwei x-Werte liefert.

Analog findet man die Mittelpunkte $M_{3,4}(x, y)$ der Kreise, die den Kreis a mit ihrer Innenseite berühren, mit $d(M_{3,4}, A) = y - r_1$ (diese Kreise existieren nicht, wenn der Kreis a eine der Geraden schneidet. Dann existieren aber zwei Berührkreise, deren Mittelpunkte auf der zu w orthogonalen Winkelhalbierenden liegen).



CCL: (acht Lösungen)



Seien eine Gerade g und zwei Kreise a und b so gegeben, dass gilt:
 $g: y = 0$, $a(A, r_1)$ mit $A(0, y_1)$ und $b(B, r_2)$ mit $B(x_2, y_2)$. a und b liegen ganz in einer Halbebene, d. h. $y_1 - r_1 > 0$ und $y_2 - r_2 > 0$, die beiden Kreise sollen sich nicht schneiden.

Dann sind $M_{1,2}$ die Mittelpunkte der Kreise, die a und b von außen berühren,
 $M_{3,4}$ die Mittelpunkte der Kreise, die a und b mit ihrer Innenseite berühren,
 $M_{5,6}$ die Mittelpunkte der Kreise, die a außen und b mit der Innenseite berühren,
 $M_{7,8}$ die Mittelpunkte der Kreise, die a mit der Innenseite und b außen berühren.
 Seien zunächst $M_{1,2}$ gesucht, mit

$$d(M_{1,2}, A) = \sqrt{x^2 + (y - y_1)^2} = y + r_1 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 + y_1^2 - r_1^2}{2(r_1 + y_1)} \quad \text{und}$$

$$d(M_{1,2}, B) = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = y + r_2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y_2^2 - r_2^2}{2(r_2 + y_2)}$$

Gleichsetzen und umformen ergibt eine quadratische Gleichung mit

$$p = -\frac{2x_2(r_1 + y_1)}{r_2 - r_1 + y_2 - y_1} \quad \text{und} \quad q = \frac{(r_1 + y_1)(x_2^2 + y_2^2 - r_2^2) + (r_2 + y_2)(y_1^2 - r_1^2)}{r_2 - r_1 + y_2 - y_1},$$

die unter den gewählten Voraussetzungen zwei Werte für x liefert.

Die Untersuchung aller möglicher Sonderfälle würde hier zu weit führen

Analog werden $M_{3,4}$ bestimmt durch $d(M_{3,4}, A) = y - r_1$ und $d(M_{3,4}, B) = y - r_2$,

$M_{5,6}$ durch $d(M_{5,6}, A) = y + r_1$ und $d(M_{5,6}, B) = y - r_1$,

$M_{7,8}$ durch $d(M_{7,8}, A) = y - r_1$ und $d(M_{7,8}, B) = y + r_1$.

Damit sind alle 10 Fälle des Apollonischen Berührproblems in zusammenhängender analytischer Weise gelöst.

Man hat gesehen, dass die Untersuchung der auftretenden Wurzeln zu Sonderfällen der Lage der gegebenen Objekte führt, deren differenzierte Betrachtung aber sehr aufwändig ist. Die Anzahl der Lösungen ist also durchaus abhängig von der Konstellation der Objekte, die in den jeweiligen Voraussetzungen in den einzelnen Fällen festgelegt wird. Umgekehrt kann man durch Rechnung auch die Lage der Objekte bestimmen.

Weiterhin ist die Anzahl der Lösungen auch von der Art der Objekte abhängig. Punkte lassen weniger Lösungen zu als Geraden oder Kreise. Der analytische Grund hierfür liegt darin, dass sich in den jeweiligen Abstandsgleichungen, die im hier gezeigten Zusammenhang eine zentrale Rolle spielen, die Eigenschaften der Objekte wiederfinden. Wird ein Kreis ein- oder ausschließend berührt, so müssen zwei Gleichungen erstellt werden, die den Abstand vom gesuchten Berührungskreismittelpunkt beschreiben. Eine Gerade wird nah oder fern berührt, was wiederum zwei Gleichungen erfordert. Ein Punkt wird lediglich auf eine Art berührt, das führt zu einer Gleichung. Da jeder Fall eine andere Kombination von Objekten ist, liefert jeder Fall auch eine unterschiedliche Anzahl an Lösungen. Der Fall PPP ist der einzige, der in Normallage eine ungerade Anzahl Lösungen bietet, nämlich eine. Alle anderen liefern, wenn Sonderfälle ausgeschlossen werden, gerade Anzahlen von Lösungen.

Im Kapitel über die Kegelschnitte wird eine weitere analytische Methode gezeigt. Es wird jedoch nicht der Anspruch erhoben, dass diese hier demonstrierten Methoden die einzigen analytischen Methoden sind, mit denen das Berührproblem behandelt werden kann. Es bleibt zu untersuchen, in wieweit man z. B. mit Hilfe von Polarkoordinaten zu Lösungen gelangt. Einen Einblick bekommt man in der historischen Betrachtung, wo dem Hauptfall CCC noch weitere besondere Aufmerksamkeit gewidmet wird, da er von Gauß, Euler und Descartes auf jeweils unterschiedliche Weise analytisch gelöst wird.

5. Die Kegelschnitte

Lösung des Berührproblems mittels Kegelschnitte als Ortslinien.

Hans Schupp beschreibt in seinem Buch „Die Kegelschnitte“ unter anderem die Lösbarkeit aller Fälle des Berührproblems mittels der Kegelschnitte Parabel, Hyperbel und Ellipse³¹. Diese erweisen sich aufgrund ihrer Eigenschaften in Bezug auf Abstände zu Punkten, Geraden und Kreisen als Ortslinien für die Mittelpunkte der gesuchten Berührkreise. Die Kegelschnitte als geometrische Örter beziehen sich jeweils auf zwei der drei gegebenen Objekte. So ergeben drei Objekte zwei Ortslinien, deren Schnittpunkte die Mittelpunkte der Lösungskreise eindeutig bestimmen.

5.1. Kegelschnitte als Ortslinien

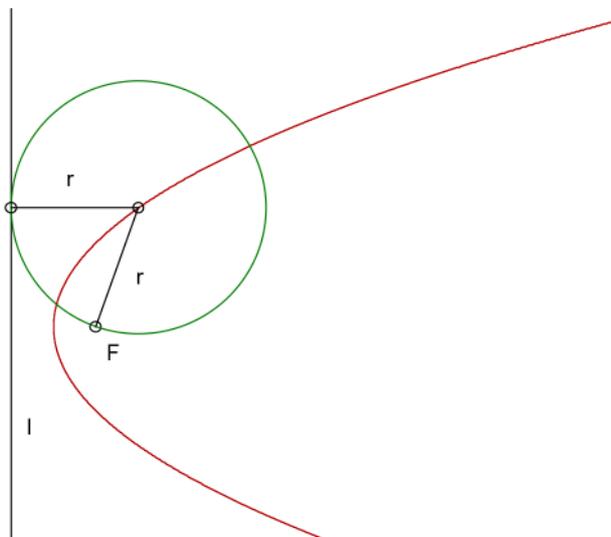
Zunächst werden alle möglichen Paare von Objekten im Hinblick auf den Kegelschnitt untersucht, der die geeignete Ortslinieneigenschaft besitzt, also die Menge aller Punkte bildet, die von den gegebenen Objekten den gleichen Abstand haben. Bei drei Objekten lassen sich sechs Paare angeben:

PP: Sind zwei Punkte gegeben, so ist die Mittelsenkrechte, also ein entarteter Kegelschnitt, geometrischer Ort der Mittelpunkte der Berührkreise.

LL: Sind zwei Geraden gegeben, so ist die Winkelhalbierende, also wieder ein entarteter Kegelschnitt, die Ortslinie der Mittelpunkte der Berührkreise.

PL: Sind ein Punkt und eine Gerade gegeben, so ist die Parabel geometrischer Ort der Mittelpunkte der Berührkreise. Denn aufgrund der Definition der Parabel kann man schon ihren Nutzen für das Berührproblem erkennen: Die Parabel ist die Menge aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt, dem Brennpunkt, und von einer Geraden, der Leitlinie, denselben Abstand haben³².

Das heißt, dass sich auf der Parabel die Mittelpunkte aller Kreise befinden, die durch den Brennpunkt gehen und die Leitgerade gleichzeitig berühren.



³¹ s. Schupp, S. 64 ff

³² s. Andrié/Meier, S. 231

CL: Auch im Fall, dass ein Kreis und eine Gerade gegeben sind, ist die Parabel Ortslinie der Mittelpunkte der Berührungskreise. Dies wird in den entsprechenden Konstruktionen (s. 5.2.) deutlich, in der die Leitgerade um den Abstand des Kreisradius r dem Kreis abgewandt oder zugewandt verschoben wird, je nach Art der Berührung.

CP: Sind ein Kreis und ein Punkt gegeben, so unterscheidet man zwei Möglichkeiten:

- a) der Punkt liegt im Kreisinnern, dann ist der geometrische Ort der Berührungskreismittelpunkte eine Ellipse.
- b) der Punkt liegt außerhalb des Kreises, dann ist die Ortslinie eine Hyperbel.

Das soll bewiesen werden:

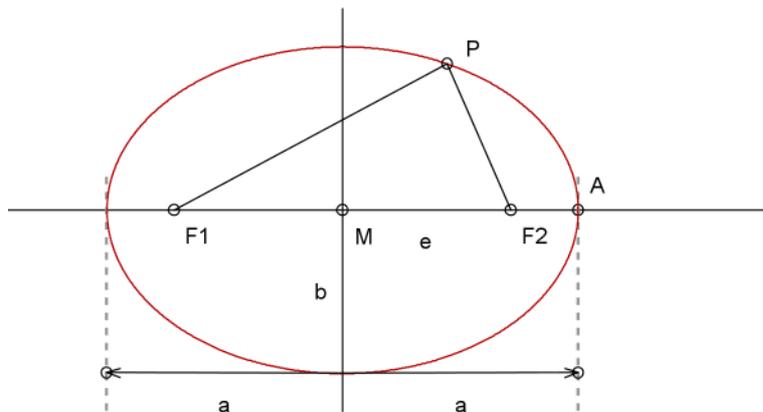
Zu a)

Behauptung:

Die Mittelpunkte aller Kreise, die einen Kreis k und einen Punkt A im Inneren von k berühren, liegen auf einer Ellipse.

Beweis³³:

Zunächst sei die Ellipse definiert als die Menge aller Punkte der Ebene, für die die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 , den Brennpunkten, konstant ist³⁴.



a und b bezeichnen die Längen der beiden Halbachsen, e ist der Abstand der Brennpunkte zum Mittelpunkt ($a > e$). Fällt P mit einem Hauptscheitelpunkt A zusammen, so ist ersichtlich, dass die konstante Summe der Abstände von P zu F_1 und F_2 $2a$ beträgt. Nach Definition gilt: $F_1P + PF_2 = 2a$ für alle Punkte P auf der Ellipse.

Zum Beweis der Behauptung ist zunächst zu zeigen, dass die Senkrechte t in P auf der Winkelhalbierenden w des Winkels $\angle F_1PF_2$ die Tangente an der Ellipse in P ist (Die Tangente an einer Ellipse ist die Gerade, die mit der Ellipse genau einen Punkt gemeinsam hat).

³³ s. Schupp, S. 22 und 23

³⁴ s. Andrié/Meier, S. 226

Zum Beweis:

Spiegele den Punkt F_2 an t , sein Bildpunkt sei F_2' .

Es gilt $\beta = \beta'$, denn t ist senkrecht zu w . Weiterhin gilt $\beta' = \beta''$ (Spiegelung an t).

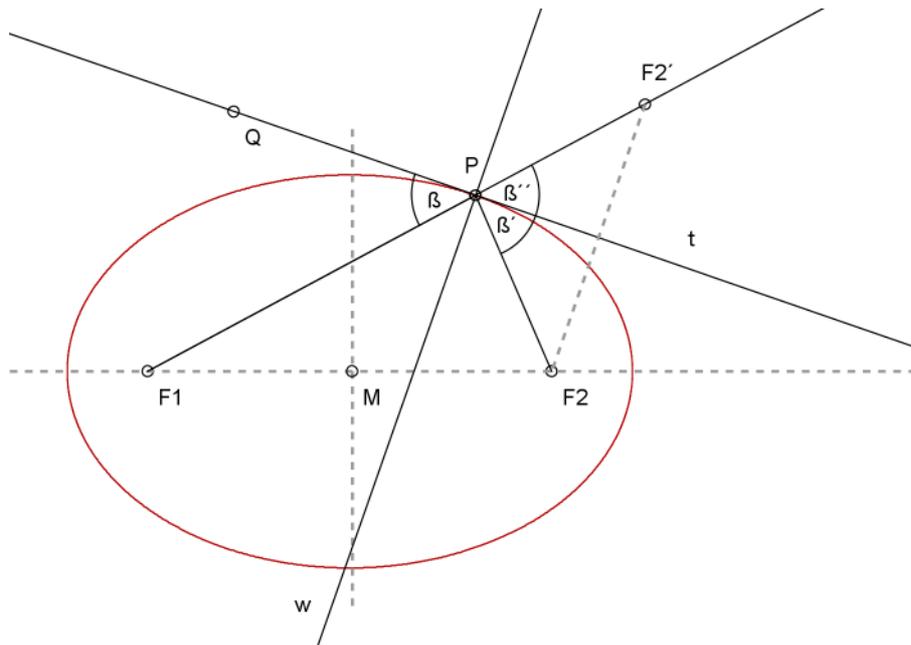
Also ist $\beta = \beta''$ und beide Winkel sind Scheitelwinkel.

Folglich liegt F_2'' auf der Trägergeraden von F_1P .

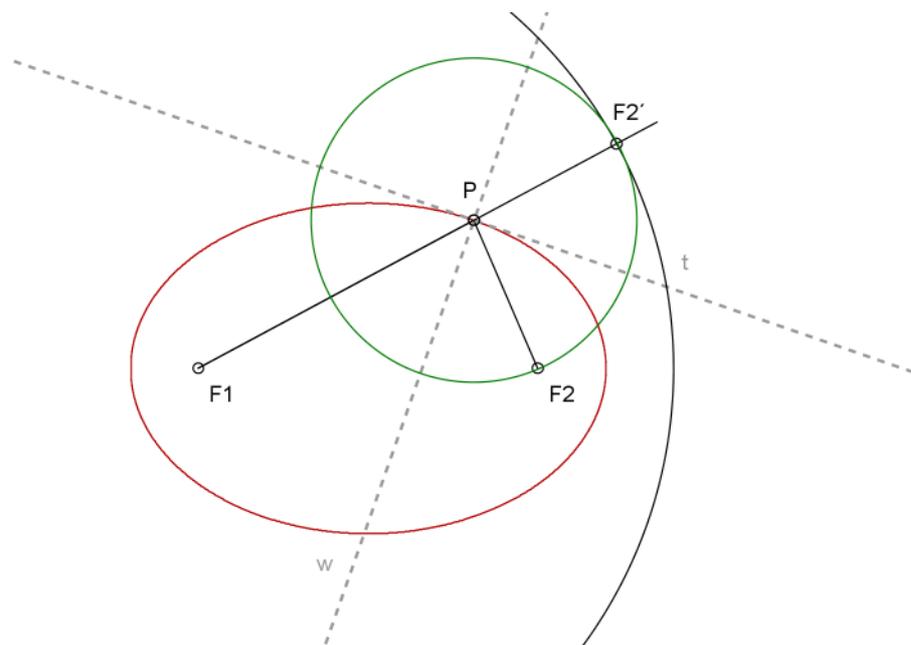
t ist Tangente in P , denn F_1 und F_2' liegen auf einer Geraden, somit ist

$F_1P + PF_2' = F_1P + PF_2 = 2a$.

Jeder weitere Punkt Q auf t wäre mit $F_1Q + QF_2' > F_1P + PF_2 = 2a$ nicht auf der Ellipse.

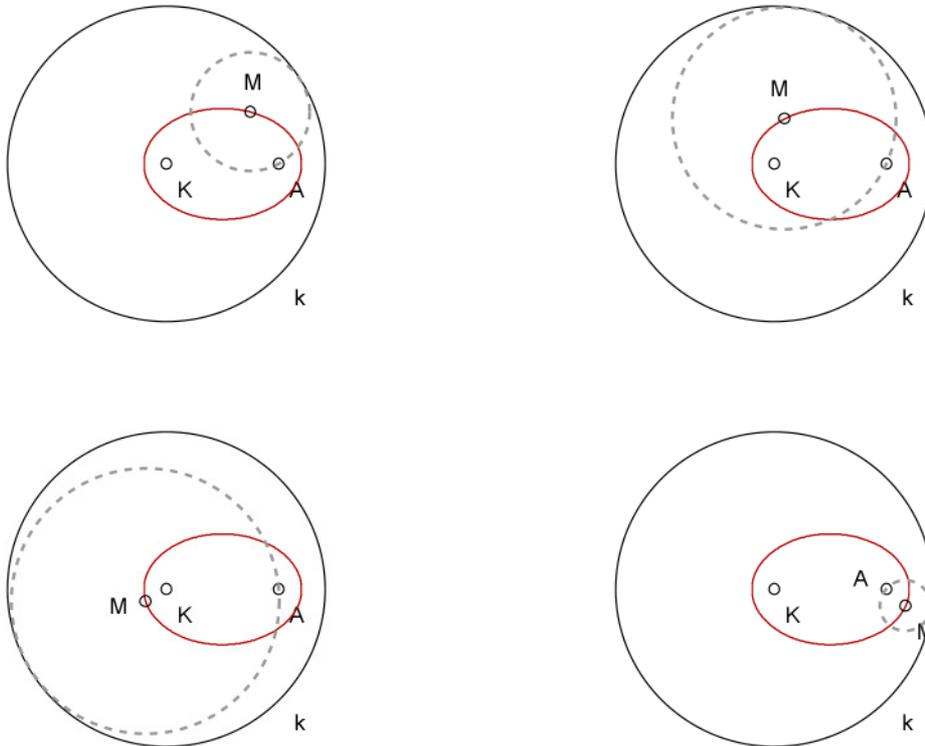


Damit ist gezeigt, dass alle Punkte P der Ellipsenlinie von F_2 und F_2' den selben Abstand haben. Das heißt, der Kreis um P verläuft durch den festen Punkt F_2 und berührt den Kreis um F_1 mit Radius $2a$.



Bezogen auf die Behauptung heißt das:

Sind ein Kreis k um den Punkt K und ein Punkt A im Inneren von k vorgegeben, so liegen die Mittelpunkte M aller Kreise, die k berühren und durch A gehen, auf der Ellipse mit den Brennpunkten A und K .



Zu b)

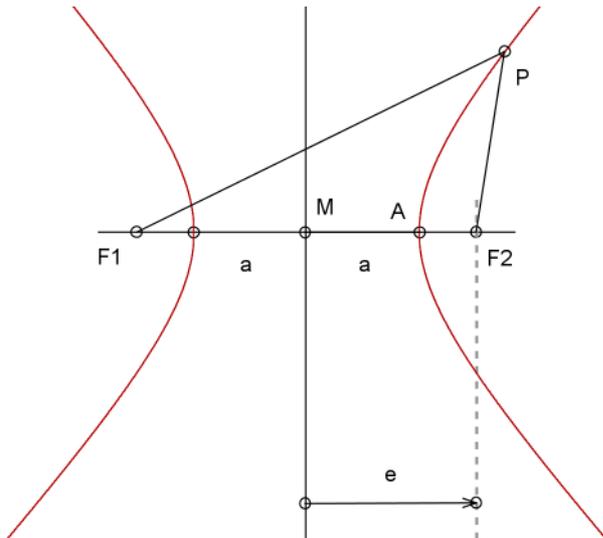
Behauptung:

Die Mittelpunkte aller Kreise, die einen Kreis k und einen Punkt A außerhalb von k berühren, liegen auf einer Hyperbel.

Beweis:

Zunächst sei die Hyperbel definiert als die Menge aller Punkte der Ebene, für die die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten, den Brennpunkten F_1 und F_2 , konstant ist³⁵.

³⁵ Andrié/Meier, S. 228



a bezeichnet die Länge der Halbachse, e ist der Abstand der Brennpunkte zum Mittelpunkt ($a < e$). Fällt P mit einem Hauptscheitelpunkt A zusammen, so ist ersichtlich, dass die konstante Differenz der Abstände von P zu F_1 und F_2 $2a$ beträgt. Nach Definition gilt $F_1P - PF_2 = 2a$ für alle Punkte P auf der Hyperbel.

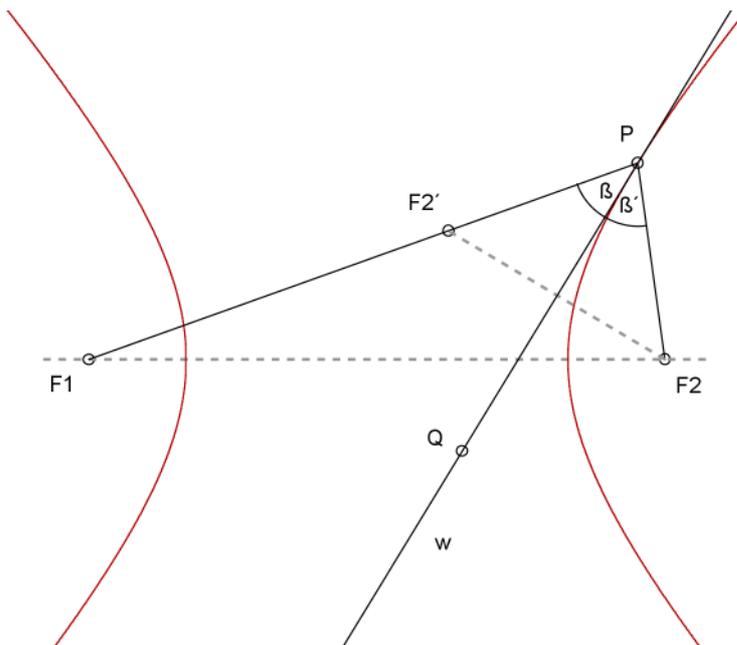
Bei Schupp findet sich an statt eines Beweises lediglich der Hinweis, dass der innere Punkt bei der Ellipse mit $a > e$ bei der Hyperbel wegen $a < e$ zum äußeren Punkt wird³⁶.
Tatsächlich kann man hier fast analog argumentieren wie im Fall der Ellipse.

Die Winkelhalbierende w des Winkels $\angle F_1PF_2$ ist die Tangente an die Hyperbel in P (Die Gerade, die mit der Hyperbel genau einen Punkt gemeinsam hat).

Nach Spiegelung von F_2 an w liegt F_2' auf F_1P .

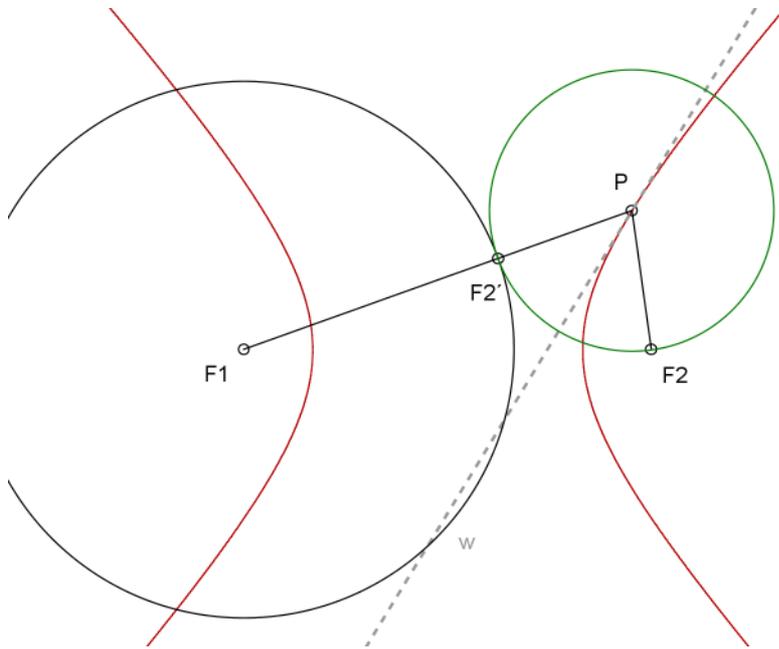
Es gilt: $F_1P - PF_2' = F_1P - PF_2 = 2a$

Denn für jeden weiteren Punkt Q auf w wäre $F_1Q - QF_2' < F_1P - PF_2 = 2a$

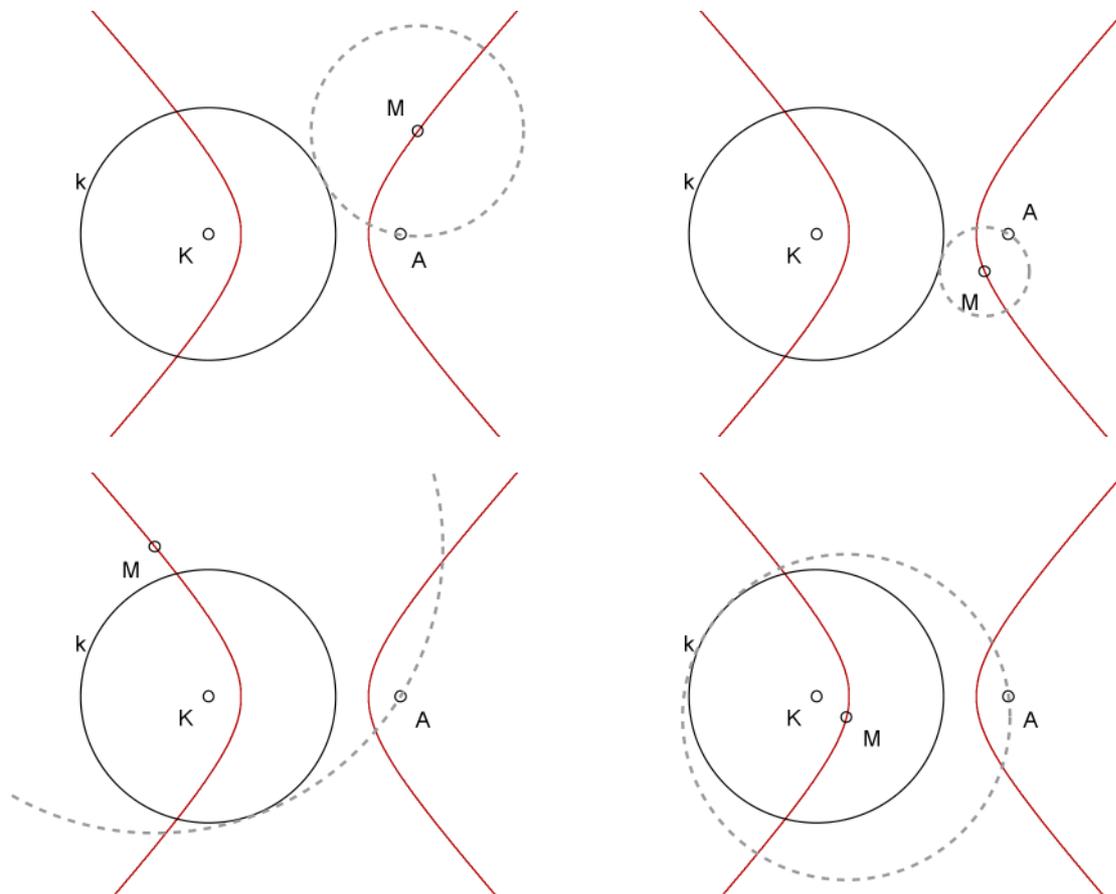


³⁶ s. Schupp, S. 29

Damit ist gezeigt, dass alle Punkte P der Hyperbellinie von F_2 und F_2' den selben Abstand haben. Das heißt, der Kreis um P verläuft durch den festen Punkt F_2 und berührt den Kreis um F_1 mit Radius $2a$.

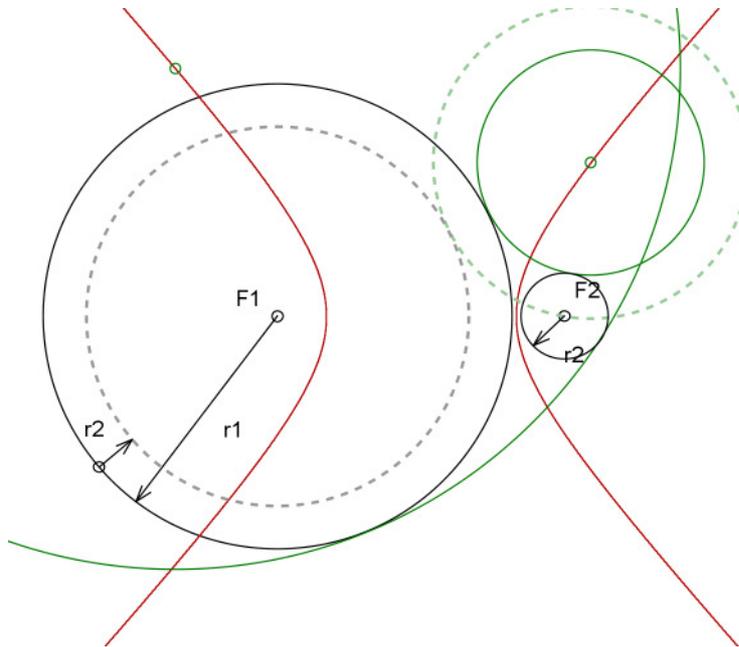


Bezogen auf die Behauptung heißt das:
Sind ein Kreis k um den Punkt K und ein Punkt A außerhalb von k vorgegeben, so liegen die Mittelpunkte M aller Kreise, die k ein- und ausschließend berühren (je nach Hyperbelast) und durch A gehen, auf der Hyperbel mit den Brennpunkten A und K .



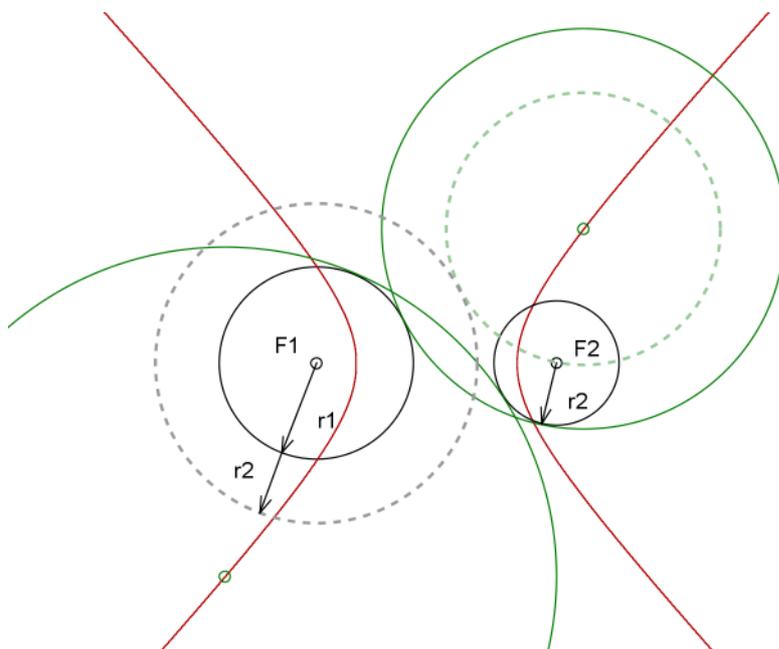
CC

Sind zwei Kreise gegeben, so kann man diesen Fall durch Radiusveränderung auf den Fall CP zurückführen, indem man die Hyperbel zu F_1 und F_2 mit $2a = r_1 - r_2$ konstruiert:



Man erhält die Hyperbel, die die Mittelpunkte der Kreise trägt, die die beiden gegebenen Kreise gleichartig berühren. Auf einem Hyperbelast liegen die Mittelpunkte der Kreise, die beide von außen berühren, auf dem anderen Ast diejenigen, die beide Kreise einschließend berühren.

Mit $2a = r_1 + r_2$ erhält man die Hyperbel für die Kreise, die die gegebenen Kreise ungleichartig berühren, wiederum wird je nach Hyperbelast ein Kreis aus- der andere eingeschlossen:



Ist nun der gemeinsame Berührungskreis dreier Objekte gesucht, so schneidet man die entsprechenden Kegelschnitte und erhält als Schnittpunkte die gesuchten Mittelpunkte. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten. Zum einen kann man konstruktiv vorgehen, zum anderen analytisch, da jeder Kegelschnitt durch eine Gleichung beschrieben wird.

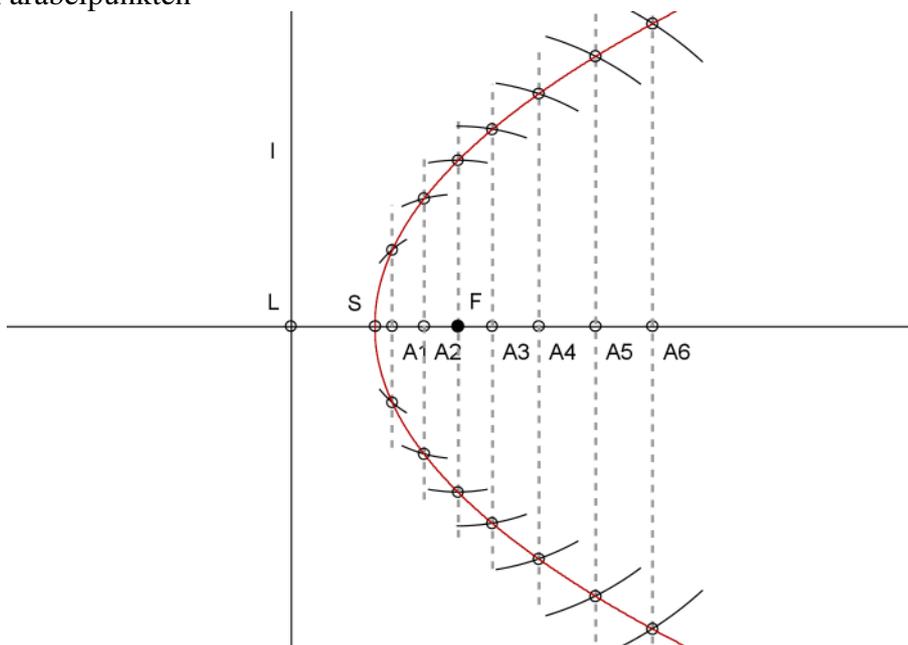
5.2. Konstruktive Lösungen

Die folgenden Konstruktionen der Kegelschnitte mit Zirkel und Lineal sind als Näherungskonstruktionen zu werten, aber sie zeigen dennoch eine erstaunliche Präzision, da sie beliebig verfeinert werden könnten.

Parabelkonstruktion³⁷:

Seien eine Gerade l (Leitgerade) und ein Punkt F (Brennpunkt) gegeben.

1. fälle das Lot von F auf l , Fußpunkt sei L
2. der Mittelpunkt der Strecke FL ist der Scheitelpunkt S der Parabel
3. finde beliebige Punkte A_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) auf der Lotgeraden FL (Parabelachse) ausgehend von S über F hinaus
4. errichte die Senkrechten zu FL in den Punkten A_i
5. Kreise um F mit den Radien LA_i schneiden die entsprechenden Senkrechten in Parabelpunkten



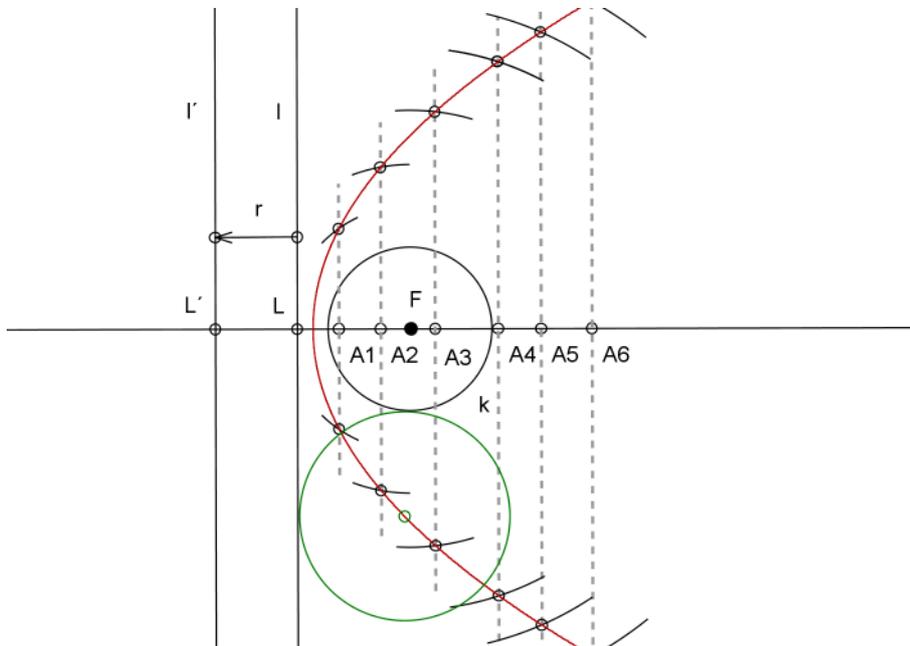
Ist statt eines Punktes ein Kreis gegeben, so gelangt man wiederum mittels Radiusveränderung zu einer Parabel³⁸:

Seien eine Gerade l und ein Kreis k (F, r) gegeben.

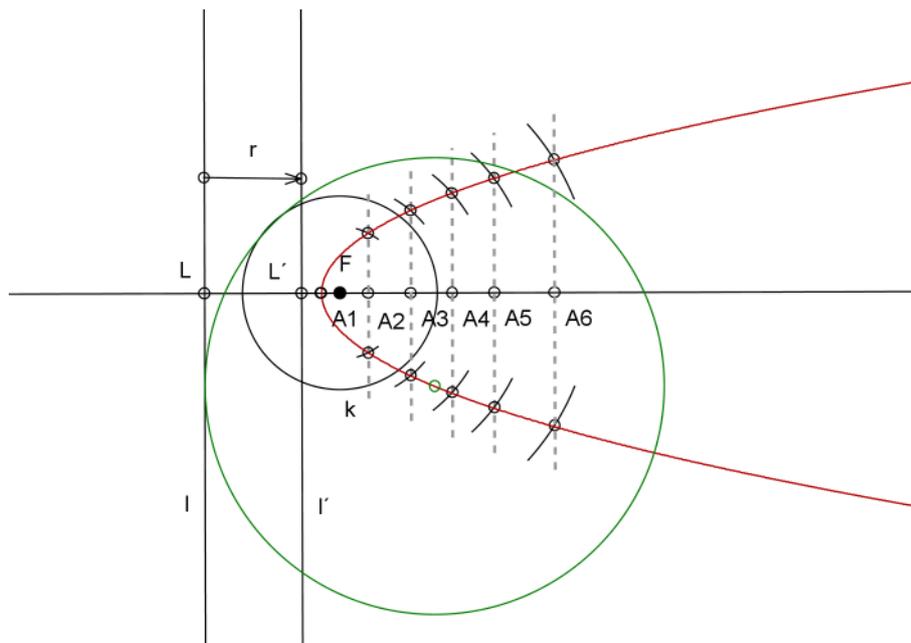
³⁷ vgl. Bartsch, S. 315

³⁸ vgl. Schupp, S. 65

1. fälle das Lot von F auf l , Fußpunkt sei L
2. eine Parallelverschiebung von l um den Abstand r in die Halbebene, die k nicht enthält, liefert l' mit dem Lotfußpunkt L' zur Lotgeraden FL
3. konstruiere die Parabel zum Brennpunkt F und zur Leitgeraden l' wie oben



Diese Parabel ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte der Kreise, die den gegebenen Kreis von außen berühren. Durch eine kleine Veränderung in der Konstruktion, Verschiebung von l um r in die Halbebene, die k enthält, erhält man analog die Parabel, die die Mittelpunkte der Kreise trägt, die den gegebenen einschließend berühren:

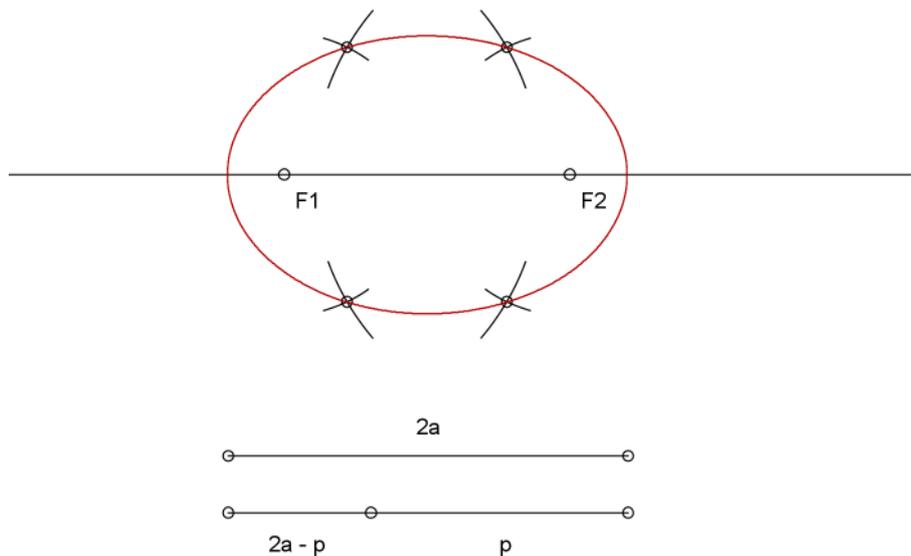


Ellipsenkonstruktion³⁹:

Seien zwei Brennpunkte F_1 und F_2 und die große Achse $2a$ gegeben.

Man schlägt Kreise um F_1 und F_2 mit den Radien $p < 2a$ und $2a - p$ und erhält als Schnittpunkte vier symmetrisch liegende Ellipsenpunkte.

Durch Variieren von $p < 2a$ ergeben sich weitere Ellipsenpunkte.

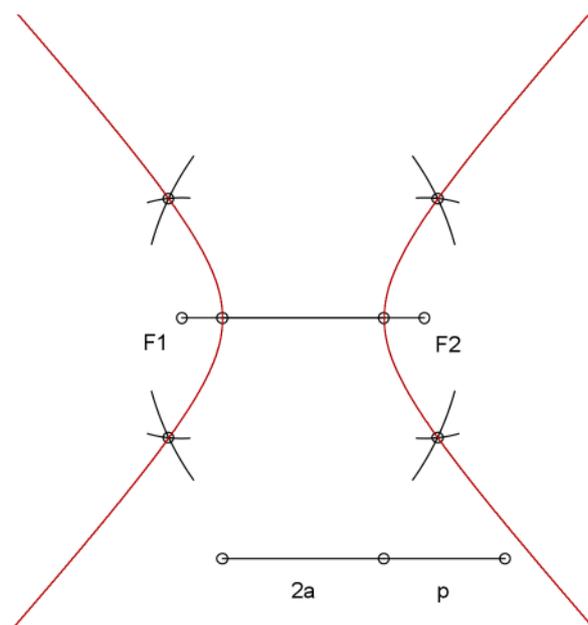


Hyperbelkonstruktion⁴⁰:

Seien zwei Brennpunkte F_1 und F_2 und die Hauptachse $2a$ gegeben.

Man schlägt Kreise um F_1 und F_2 mit beliebigem Radius p und dem Radius $2a + p$ und erhält als Schnittpunkte vier symmetrisch liegende Hyperbelpunkte.

Durch Variieren von p ergeben sich weitere Hyperbelpunkte.



³⁹ vgl. Bartsch, S. 302

⁴⁰ vgl. Bartsch, S. 323

Demonstration:

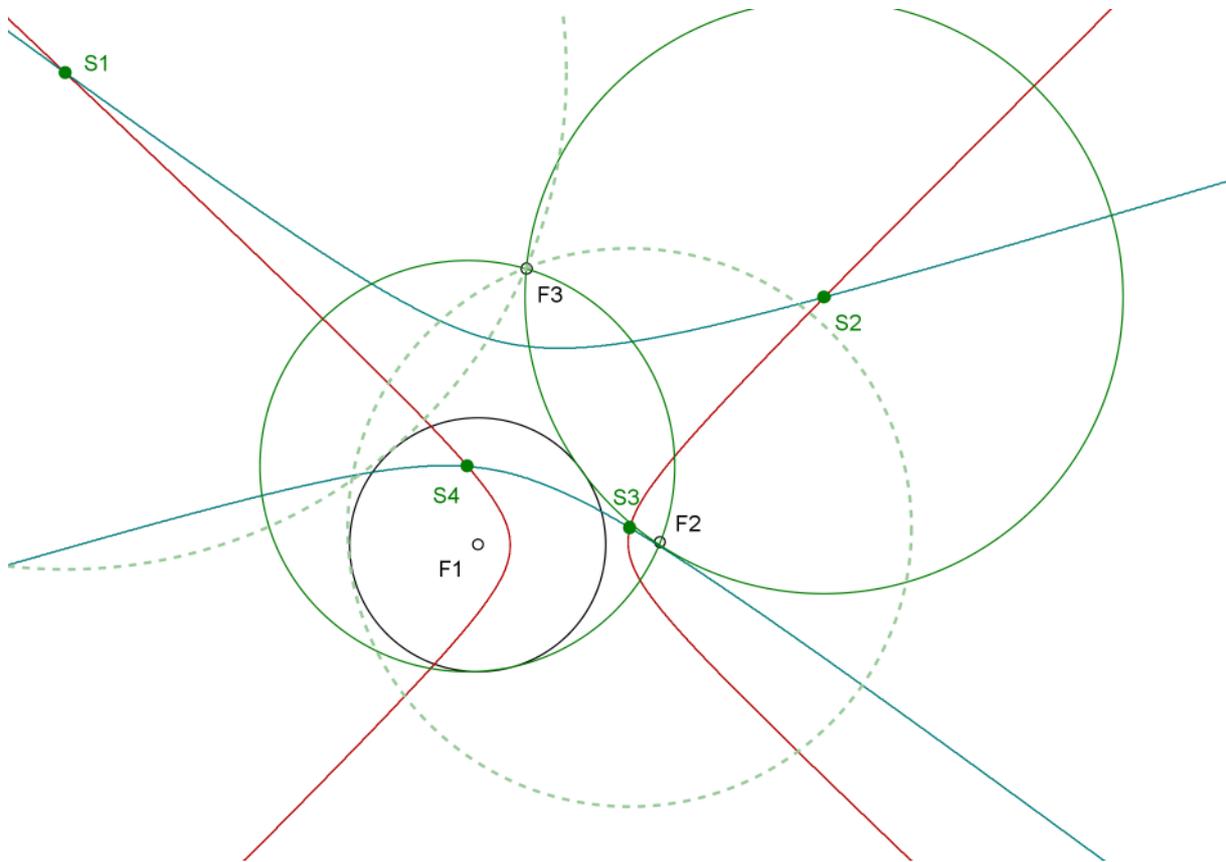
Da sich der Hauptfall CCC wie oben geschildert auf den Fall CPP bringen lässt, sei hier an diesem Fall die Konstruktion der Schnittpunkte der Ortslinien demonstriert.

Konstruktion:

Gegeben seien ein Kreis um F_1 mit Radius r und zwei Punkte F_2 und F_3 .

1. konstruiere die Hyperbel zu F_1 und F_2 mit $2a = r$
2. konstruiere die Hyperbel zu F_1 und F_3 mit $2a = r$
3. die Schnittpunkte der Hyperbeln seien S_1, S_2, S_3 und S_4

Dabei sind jedoch nur die Kreise um S_2 und S_4 Berührungskreise aller drei Objekte.



Um im Fall CCC auf alle acht Berührungskreise zu kommen, führt man die Radiusveränderungen durch, die die verschiedenen Berührarten ermöglichen. Darauf sei aber hier verzichtet, da im Fall CPP das Prinzip der Ortslinien und deren Schnittpunkte schon sehr deutlich wird.

5.3. Analytische Lösungen

Die Grundidee der analytischen Lösung durch Kegelschnitte besteht darin, die dem jeweiligen Fall entsprechenden Kegelschnitte durch ihre Gleichungen darzustellen und zur Bestimmung ihrer Schnittpunkte gleichzusetzen. Damit erhält man die Koordinaten der Mittelpunkte der Berührkreise. Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts ist⁴¹:

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + Exy + F = 0$ mit $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$.

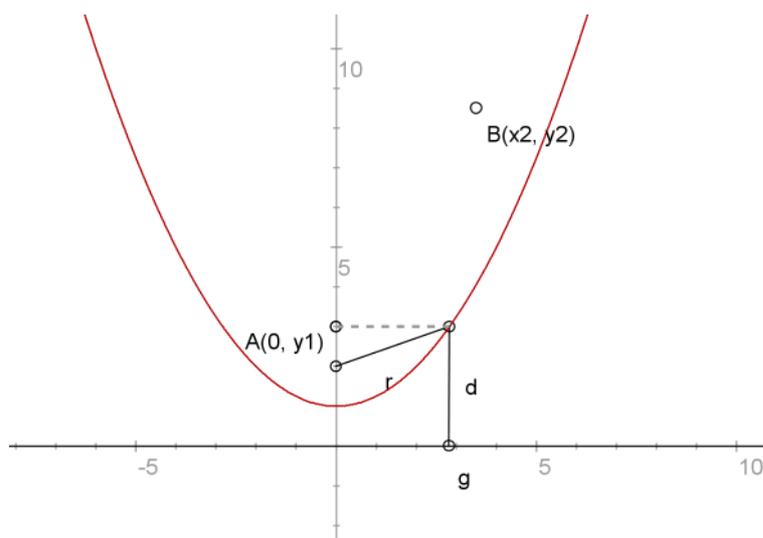
Je nach Koeffizienten ergeben sich die Koordinatengleichungen für die

- a) Ellipse in allgemeiner Lage mit Mittelpunkte $M(x_m, y_m)$: $\frac{(x - x_m)^2}{a^2} + \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$
- b) Parabel in allgemeiner Lage mit Scheitelpunkte $S(x_s, y_s)$: $\frac{2p(x - x_s)}{(y - y_s)^2} = 1$, wobei p der Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie ist.
- c) Hyperbel in allgemeiner Lage mit Mittelpunkt $M(x_m, y_m)$: $\frac{(x - x_m)^2}{a^2} - \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$

Da in den Fällen des Apollonischen Berührproblems diese Gleichungen lediglich aus den Koordinaten der Brennpunkte und aus den Abständen der Objekte zueinander gewonnen werden können, können sich sehr umfangreiche Berechnungen ergeben, die hier nicht ausgeführt werden sollen.

Das Prinzip der Lösung durch die Gleichungen von Kegelschnitten kann man an dem Fall PPL gut verdeutlichen, bei dem eine Gerade und eine Parabel als geometrische Örter auftreten. Hier kann man durchaus mit der Gleichungsform $y = ex^2 + f$ einer Parabel arbeiten, wenn man die Situation so in ein Koordinatensystem verlagert, dass die gegebene Gerade mit der x -Achse zusammenfällt und einer der gegebenen Punkte auf der y -Achse liegt. Jedoch ist es schon in diesem Fall recht aufwändig, die Formel der Parabel aus dem Brennpunkt A und der Leitlinie g herzuleiten.

Seien die Punkte $A(0, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ und die Gerade $g: y = 0$ gegeben.



Es gilt für die Parabel bzgl. A und g : $d = y$ und $r = \sqrt{x^2 + (y - y_1)^2}$.

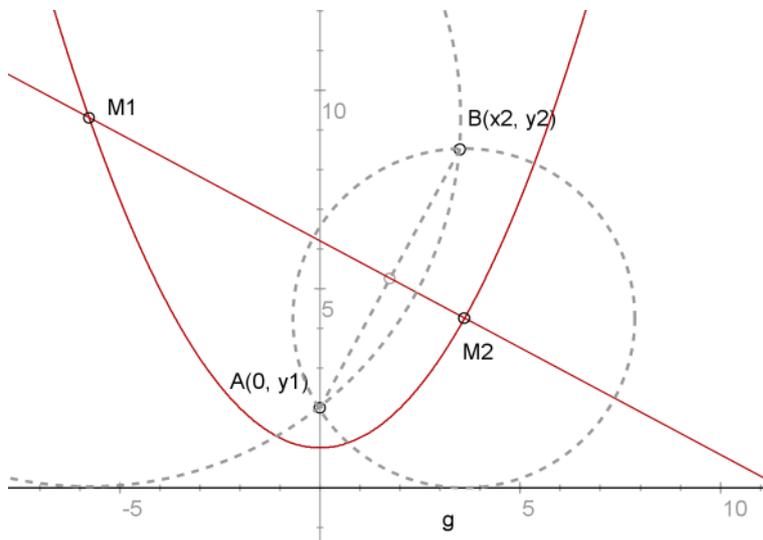
⁴¹ vgl. Andrié/Meier, S. 225 ff

Nach Definition der Parabel gilt $d = r$, also auch

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 + (y - y_1)^2} \\ \Leftrightarrow y^2 &= x^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 \\ \Leftrightarrow 2yy_1 &= x^2 + y_1^2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2y_1}x^2 + \frac{y_1}{2} \end{aligned}$$

Es ergibt sich für die Parabel die Form: $y = ex^2 + f$ mit $e = \frac{1}{2y_1}$ ($y_1 \neq 0$) und $f = \frac{y_1}{2}$.

Des weiteren ist die Mittelsenkrechte $m: y = ax + b$ zu den Punkten A und B zu bestimmen mit $a = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ und $b = \frac{(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2)}{2(y_2 - y_1)}$, wobei $y_1 \neq y_2$ (vgl. Kapitel 4)



Durch Gleichsetzen berechnet man mit der quadratischen Gleichung

$$ex^2 + f = ax + b \Leftrightarrow x_{a,b} = \frac{1}{2e} \left(a \pm \sqrt{a^2 - 4e(f - b)} \right)$$

zwei Schnittpunkte $M1(x_a, y_a)$ und $M2(x_b, y_b)$, oder keinen Schnittpunkt, wenn $y_2 < 0$.

Nur einen Schnittpunkt berechnet man, wenn man $y_2 = y_1$ zuließe, d. h. die Mittelsenkrechte der Strecke AB ist orthogonal zu g und hat die Gleichung $x = c$. Dann ist die entsprechende y -Koordinate des Schnittpunktes mit der Parabel $y = ec^2 + f$.

Auf die analytische Lösung der anderen Fälle des Berührproblems nach diesem Prinzip sei hier verzichtet.

5.4. Der Kreis des Apollonius

Im Rahmen seiner Untersuchungen der Kegelschnitte (Conica) bewies Apollonius, dass die Menge aller Punkte der Ebene, deren Abstände zu zwei festen Punkten ein konstantes Verhältnis haben, ein Kreis ist. Dieser Kreis ist nach Apollonius benannt worden. Um diesen Zusammenhang zu zeigen, beweist man zunächst den Satz:

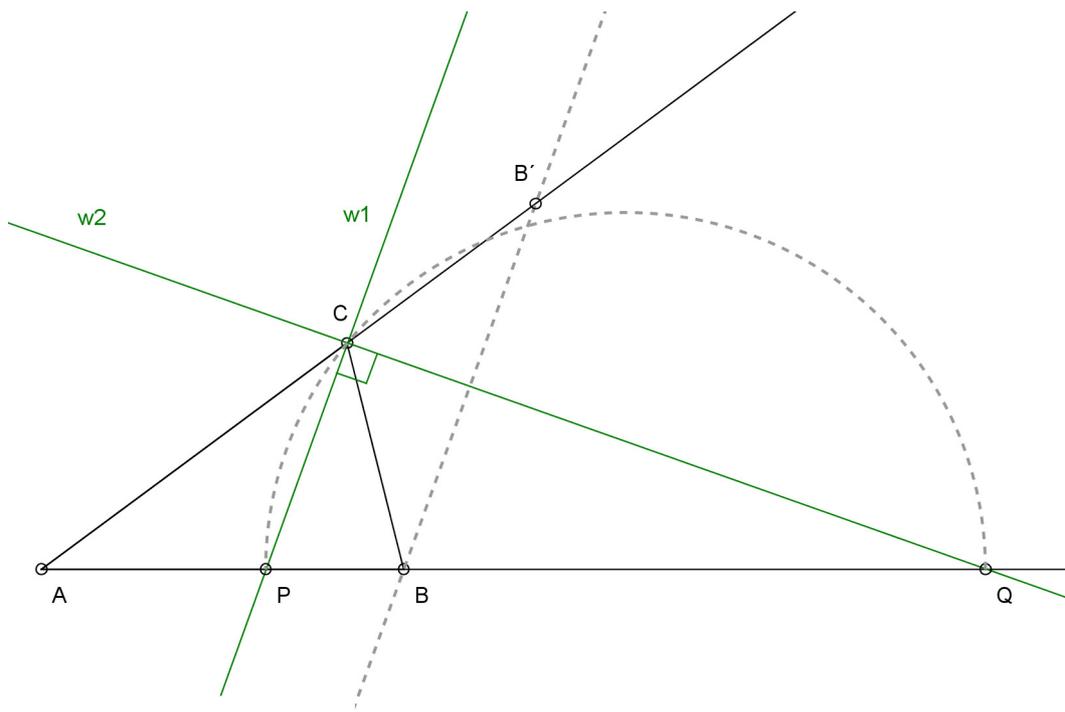
In einem beliebigen Dreieck ABC teilen die Winkelhalbierenden die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten⁴².

Konstruktion und Beweis:

Gegeben sei ein Dreieck ABC .

1. verlängere die Seite AB über B und die Seite AC über C hinaus
2. konstruiere die Winkelhalbierende w_1 des Winkels $\angle ACB$. Diese schneidet die Dreiecksseite AB in P
3. die in C zu w_1 senkrechte Winkelhalbierende w_2 des Nebenwinkels von $\angle ACB$ schneidet die Verlängerung von AB in Q

Behauptung: $AP : PB = CA : CB$



Die Parallele zu w_1 durch B schneidet die Trägergerade von AC im Punkt B' .

Das Dreieck CBB' ist gleichschenkelig, denn es gilt:

$\angle BCQ = \angle QCB'$ (Winkelhalbierende des Nebenwinkels).

$\angle ACP = \angle BCP$ (Winkelhalbierende) womit auch $\angle CBB' = \angle ACP$ ist (Wechselwinkel).

Ebenso ist $\angle CB'B = \angle ACP$ (Stufenwinkel).

Also ist $\angle CBB' = \angle CB'B$.

Damit sind auch die Strecken CB und CB' gleich und es gilt nach dem Strahlensatz:

$AP : PB = CA : CB' = CA : CB$

⁴² vgl. Glaeser, S. 22, 23

Da die Winkelhalbierenden w_1 und w_2 immer einen rechten Winkel bilden, liegt C auf dem Thaleskreis über PQ . Wandert C auf diesem Kreis, so bleibt der Quotient der Seiten CA und CB konstant, denn P , Q und der rechte Winkel in C verändern sich nicht.

Hieraus folgt, dass die Menge aller Punkte C , deren Abstände von zwei festen Punkten A und B ein konstantes Verhältnis bilden, auf einem Kreis liegen.

Ist dieses Verhältnis $1 : 1$, so entartet dieser Kreis zu einem Kreis mit „unendlich weit entferntem“ Mittelpunkt, nämlich zu der Mittelsenkrechten zu A und B .

Interessant ist hier, dass diese Interpretation einer Geraden zu den zehn verschiedenen Fällen des Berührproblems führt. Denn wenn man Kreise mit unendlich großem Radius zulässt, so muss man auch Kreise mit unendlich kleinem Radius zulassen, wodurch man eben Punkte erhält.

Neben der Ellipse (Summe der Abstände von zwei festen Punkten konstant) und der Hyperbel (Betrag der Differenz der Abstände konstant) konnte Apollonius mit diesem Satz auch die Kreise in dieses Schema einordnen (Quotient der Abstände konstant).

Zwar besitzt der Kreis des Apollonius für die Lösung des Apollonischen Berührproblems keine direkte Relevanz, dennoch ist er hier nicht nur aus Gründen der Vollständigkeit sondern auch wegen seiner faszinierenden Zusammenhänge aufgeführt.

6. Geschichte – Ideengeschichte

Da Mathematikgeschichte in erster Linie Ideengeschichte ist, eignet sich das Apollonische Berührproblem in besonderem Maße, Ideen zu untersuchen. Da die Originallösungen von Apollonius leider nicht mehr erhalten oder überliefert sind, haben sich seit Bestehen des Problems verschiedene berühmte Mathematiker mit den unterschiedlichsten Ideen an die Lösung der Probleme begeben und dabei immer die mathematischen Methoden ihrer Zeit eingesetzt und ausprobiert. Einige dieser Ideen seien in dieser Arbeit vorgestellt, nicht nur weil es sich um sehr interessante Gedankengänge handelt, sondern auch um die Komplexität des Themas zu verdeutlichen. Ein nahezu vollständiger historischer Rückblick findet sich bei Frauke Böttcher⁴³.

Die beiden einfachsten Fälle PPP und LLL sind bereits bei Euklid (ca. 365 – 300 v. Chr.) gelöst, da die gesuchten Kreise die In-, Um- und Ankreise eines Dreiecks sind.

Der erste, der eine vollständige Lösung aller zehn Fälle nach Apollonius veröffentlichte, war der Franzose Francois Viète (1540 – 1604). Er benutzte ausschließlich elementargeometrische Konstruktionen. Die Ausführungen bei Böttcher legen die Vermutung nahe, dass sich die Lösungen, die sich bei Ulrich finden und die in dieser Arbeit in Kapitel 2 ausführlich vorgestellt werden, im wesentlichen auf die Lösungen Viètes beziehen.

Im Jahr 1817 entwickelte Joseph Diaz Gergonne (1771 – 1859) die Lösungen mittels der Ähnlichkeits- und Potenzpunkte, wie sie bei Hellwig ausführlich vorgestellt wird. In Kapitel 2 finden sich ebenfalls die Bearbeitungen der Fälle PPL und CCC nach dieser Methode.

Es verwundert wenig, dass auch die bedeutendsten und produktivsten Mathematiker der Geschichte Lösungen des Berührproblems fanden. So haben sich René Descartes (1596 - 1650), Leonard Euler (1707 - 1783) und Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) auf jeweils sehr unterschiedliche Weise mit dem Problem auseinandergesetzt und dabei ausschließlich analytische Zugänge gewählt. Die hier folgenden Lösungen befassen sich ausschließlich mit dem Hauptfall CCC.

Descartes, der als erster eine analytische Methode benutzt, er gilt ja als der Begründer der Analytischen Geometrie, stellt gleich zwei Möglichkeiten zur Lösung vor. Eine Lösung benutzt die Heronsche Formel für den Dreiecksinhalt, die andere nimmt Bezug zum Satz des Pythagoras.

Euler benutzt die Zusammenhänge der Trigonometrie, um das Problem zu lösen. Wenig später veröffentlichte er sogar die Lösung des dreidimensionalen Falls⁴⁴.

Gauß findet zwei Geraden, auf denen jeweils ein Mittelpunkt der Lösungskreise liegt, durch die Herleitung von Polarkoordinaten.

Allen Lösungen ist gemein, dass die Autoren vom bereits gelösten Fall ausgehend operieren und die gefundenen Lösungen nicht mehr durch Konstruktionen verifizieren. Sie vertrauen vollkommen in ihre Methoden. Descartes geht sogar soweit, dass er seine Berechnungen nicht mehr zu Ende führt, da die gefundenen Gleichungen prinzipiell lösbar sind.

Es existieren zwar noch weitere historische Lösungen nach Gauß, die nachzuzeichnen aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden.

⁴³ s. Böttcher, Das Apollonische Berührproblem, S. 7 ff

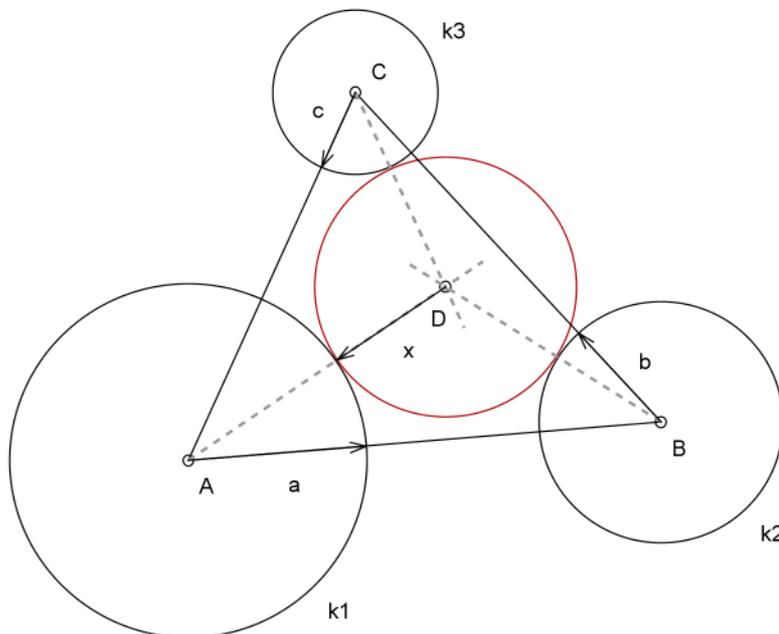
⁴⁴ s. Böttcher, Das Apollonische Berührproblem, S. 27

6.1. Descartes⁴⁵

René Descartes (1596 – 1650) gibt gleich zwei Lösungen des Problems CCC an, die auf ganz unterschiedlichen Ideen beruhen. In seinem Briefwechsel mit Elisabeth von Böhmen (1596 – 1632) legt er diese ersten analytischen Lösungsansätze dar. Bei Böttcher finden sich beide Lösungen im Zusammenhang mit dieser Korrespondenz sogar in der Originalfassung. Seine erste Lösung beruht auf der Heronschen Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks: In einem Dreieck ABC mit den Seiten a, b und c gilt für den Flächeninhalt F:

$$F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \quad \text{mit } s = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad (\text{halber Umfang})$$

Descartes geht in seiner Lösung von dem bereits gefundenen Kreis um D aus und formuliert: Seien die drei Kreise $k_1(A, a)$, $k_2(B, b)$ und $k_3(C, c)$ gegeben. In der Annahme, dass der Kreis um D der gesuchte Berührkreis mit dem Radius x ist, kann man x durch die drei Teilflächen ABD, ACD und BCD des Dreiecks ABC bestimmen (und somit auch D finden, als Schnittpunkt der Kreise um die Punkte A, B und C mit den jeweils um x erweiterten Radien).



Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt $F_{ABC}^2 = (F_{ABD} + F_{BCD} + F_{ACD})^2$

Der Flächeninhalt der Dreiecke ABD, BCD und ACD kann durch eine quadratische Gleichung ausgedrückt werden.

Im Dreieck ABD gilt für den halben Umfang s_1 :

$$s_1 = \frac{1}{2}[c' + (a+x) + (b+x)] \quad \text{mit } c' = AB$$

$$\Rightarrow s_1 = \frac{1}{2}(c' + a + b) + x, \quad \text{wonach mit } z_1 = \frac{1}{2}(c' + a + b) \quad \text{gilt: } s_1 = z_1 + x$$

Analog lassen sich die halben Umfänge der anderen Dreiecke BCD und ACD darstellen als

$$s_2 = z_2 + x \quad \text{und} \quad s_3 = z_3 + x$$

$$\text{mit } z_2 = \frac{1}{2}(a' + b + c) \quad \text{und} \quad z_3 = \frac{1}{2}(b' + a + c)$$

⁴⁵ s. Böttcher, S. 13 ff

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABD gilt demnach

$$F_{ABD}^2 = s_1(s_1 - \hat{c})(s_1 - (a + x))(s_1 - (b + x)) \quad \text{und nach Einsetzen von } s_1 = z_1 + x$$

$$\begin{aligned} &= (z_1 + x)((z_1 + x) - \hat{c})((z_1 + x) - (a + x))((z_1 + x) - (b + x)) \\ &= (z_1 + x)(z_1 - \hat{c} + x)(z_1 - a)(z_1 - b) \\ &= (z_1 + x)[(z_1 - \hat{c})(z_1 - a)(z_1 - b) + x(z_1 - a)(z_1 - b)] \\ &= (z_1 - \hat{c})(z_1 - a)(z_1 - b)(z_1 + x) + x(z_1 - a)(z_1 - b)(z_1 + x) \\ &= (z_1 - \hat{c})(z_1 - a)(z_1 - b)z_1 + (z_1 - \hat{c})(z_1 - a)(z_1 - b)x + (z_1 - a)(z_1 - b)z_1x \\ &\quad + (z_1 - a)(z_1 - b)x^2 \\ &= (z_1 - \hat{c})(z_1 - a)(z_1 - b)z_1 + [(z_1 - \hat{c})(z_1 - a)(z_1 - b) + (z_1 - a)(z_1 - b)z_1]x \\ &\quad + (z_1 - a)(z_1 - b)x^2 \end{aligned}$$

setzt man nun $(z_1 - \hat{c})(z_1 - a)(z_1 - b)z_1 = u_1$

$$[(z_1 - \hat{c})(z_1 - a)(z_1 - b) + (z_1 - a)(z_1 - b)z_1] = v_1$$

$$(z_1 - a)(z_1 - b) = w_1$$

so existiert für den Flächeninhalt des Dreiecks ABD die quadratische Gleichung:

$$F_{ABD}^2 = u_1 + v_1x + w_1x^2$$

$$\Leftrightarrow F_{ABD}^2 = \sqrt{u_1 + v_1x + w_1x^2}$$

Analog erhält man

$$F_{BCD}^2 = u_2 + v_2x + w_2x^2$$

$$\Leftrightarrow F_{BCD}^2 = \sqrt{u_2 + v_2x + w_2x^2}$$

und

$$F_{ACD}^2 = u_3 + v_3x + w_3x^2$$

$$\Leftrightarrow F_{ACD}^2 = \sqrt{u_3 + v_3x + w_3x^2}$$

so dass sich für die Fläche des gesamten Dreiecks ABC ergibt:

$$F_{ABC}^2 = (F_{ABD} + F_{BCD} + F_{ACD})^2$$

$$= (\sqrt{u_1 + v_1x + w_1x^2} + \sqrt{u_2 + v_2x + w_2x^2} + \sqrt{u_3 + v_3x + w_3x^2})^2$$

Für Descartes reicht es völlig zu wissen, dass diese quadratische Gleichung lösbar ist, denn er schreibt:

„[...]dass diese Rechnung zu viele Multiplikationen verlangt, die ich in drei Monaten nicht lösen kann.“

Dieser Auffassung kann man sich hier durchaus anschließen, um sich der zweiten, ebenfalls sehr interessanten und kreativen Lösung zu zuwenden. Diese zweite Lösung stützt sich auf den Satz des Pythagoras.

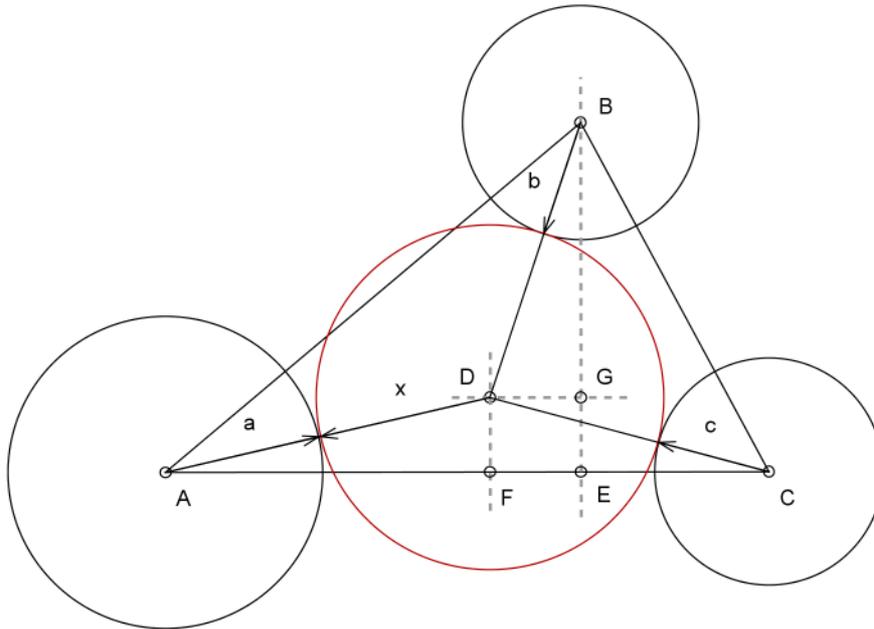
Gegeben sei die Situation wie oben. Konstruiere drei Senkrechten:

BE sei die Höhe auf AC

DF sei das Lot von D auf AC

DG sei das Lot von D auf BE

Durch diese Konstruktion erhält man drei rechtwinklige Dreiecke ADF, CDF und BDG.
 Unbekannt sind die Längen der Strecken $DF = GE$, $DG = FE$ und der Radius x des gesuchten Berührkreises.



Es gilt: $AD = a + x$, $BD = b + x$ und $CD = c + x$

Setze: $AE = d$, $BE = e$, $CE = f$ (bekannt)
 $DF = GE = y$, $DG = FE = z$ (unbekannt)

Die Seiten der rechtwinkligen Dreiecke sind demzufolge:

$$\begin{aligned} AF &= d - z, & DF &= y, & AD &= a + x \\ BG &= e - y, & DG &= z, & BD &= b + x \\ CF &= f + z, & DF &= y, & CD &= c + x \end{aligned}$$

Und nach Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} (a + x)^2 &= y^2 + (d - z)^2 & (1) \\ (b + x)^2 &= z^2 + (e - y)^2 & (2) \\ (c + x)^2 &= y^2 + (f + z)^2 & (3) \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist lösbar und man erhält nach Subtraktion (3) – (1):

$$\begin{aligned} c^2 - a^2 + 2cx - 2ax &= f^2 - d^2 + 2fz + 2dz \\ \Leftrightarrow z &= \frac{c^2 - a^2 + d^2 - f^2 + 2(c - a)x}{2(d + f)} = \frac{c^2 - a^2 + 2(c - a)x}{2(d + f)} + \frac{d - f}{2} \end{aligned}$$

und nach Subtraktion (1) – (2):

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + 2ax - 2bx &= d^2 - e^2 - 2dz + 2ey \\ \Leftrightarrow 2ey &= a^2 - b^2 + 2ax - 2bx - d^2 + e^2 + 2dz \end{aligned}$$

Umordnen und Einsetzen von z bringt:

$$\Leftrightarrow 2ey = e^2 + a^2 + 2ax - b^2 - 2bx - d^2 + 2d \left(\frac{c^2 - a^2 + 2cx - 2ax}{2(d+f)} + \frac{d-f}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2ey = e^2 + a^2 + 2ax - b^2 - 2bx - d^2 + \frac{c^2d - a^2d + 2cdx - 2adx}{d+f} + d^2 - df$$

$$\Leftrightarrow 2ey = e^2 - b^2 - 2bx - df + \frac{a^2d + a^2f + 2adx + 2afx + c^2d - a^2d + 2cdx - 2adx}{d+f}$$

$$\Leftrightarrow 2ey = e^2 - b^2 - 2bx - df + \frac{c^2d + a^2f + 2cdx - 2afx}{d+f}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{e}{2} - \frac{b^2}{2e} - \frac{bx}{e} - \frac{df}{2e} + \frac{c^2d + a^2f + 2cdx - 2afx}{2ed + 2ef}$$

Einsetzen von y und z in eine der Gleichungen (1), (2) oder (3) bringt eine lösbare quadratische Gleichung.

Damit hat Descartes gezeigt, dass das Problem lösbar ist und er verzichtet wiederum auf die genaue Berechnung der Unbekannten.

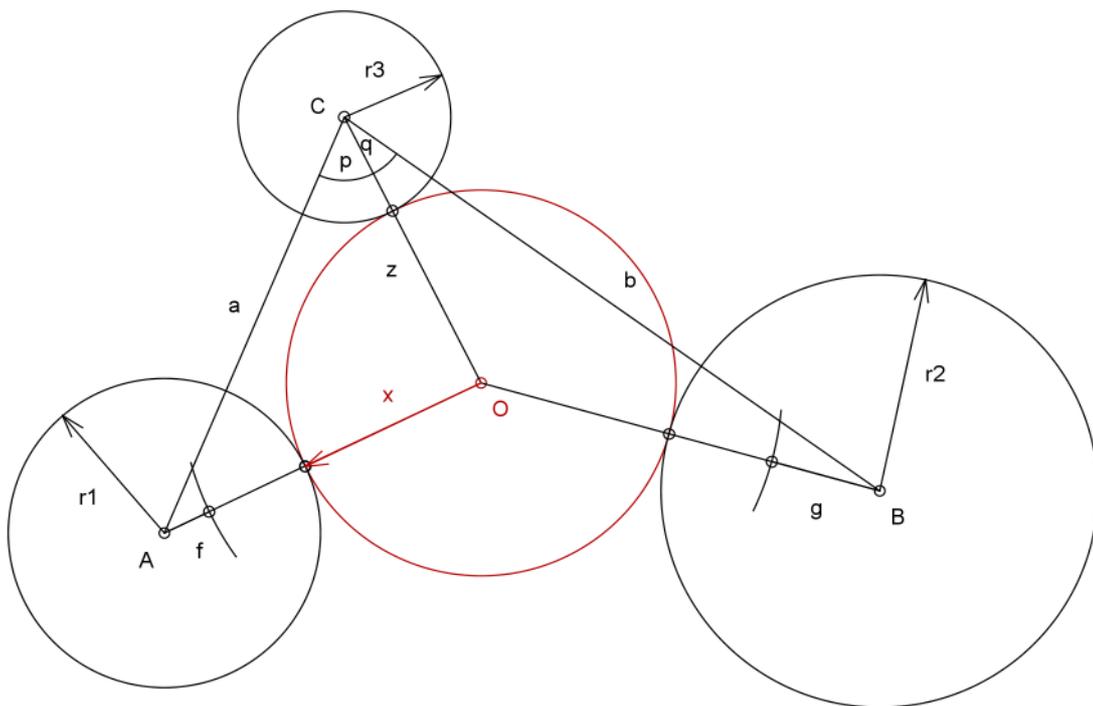
6.2. Euler

Leonhard Euler (1707 – 1783) veröffentlichte im Jahr 1779 die Arbeit „Solutio facilis problematis, quo quaeritur circulus, qui datos tres circulos tangat.“⁴⁶, die sich mit dem Fall CCC auseinander setzt. Ausgehend vom bereits gelösten Problem findet er zunächst eine sehr elegante und recht eingängige algebraische Lösung durch die Entwicklung einer quadratischen Gleichung mit Hilfe des Cosinussatzes und der Additionstheoreme der Trigonometrie, wobei die Unbekannte der Abstand zwischen dem Mittelpunkt des gesuchten und dem eines gegebenen Kreises ist.

Weiter diskutiert Euler unter Betrachtung negativer und positiver Vorzeichen der Radien in den Gleichungen, die insgesamt acht möglichen Lagen des gesuchten Berührkreises. Anschließend beschreibt er eine weitere Möglichkeit, das Problem durch eine Konstruktion zu lösen, die sich ebenfalls algebraisch aus dem Cosinussatz ergibt.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass der Originaltext in Latein verfasst ist, jedoch der Gedankengang Eulers auch ohne wörtliche Übersetzung seiner Bemerkungen nachvollziehbar ist. Deswegen werden längere Textpassagen hier nur verkürzt wiedergegeben. Die mathematischen Notationen und alle Bezeichnungen sind dem Original entsprechend, um einen Vergleich zu vereinfachen.

Im Anhang des Originaltextes befindet sich eine zugehörige Zeichnung, die aber nicht vollständig bezeichnet ist. Das soll hier zur besseren Orientierung nachgeholt werden.



(Aus software-bedingten Gründen ist hier $r1 = \alpha$, $r2 = \beta$ und $r3 = \gamma$)

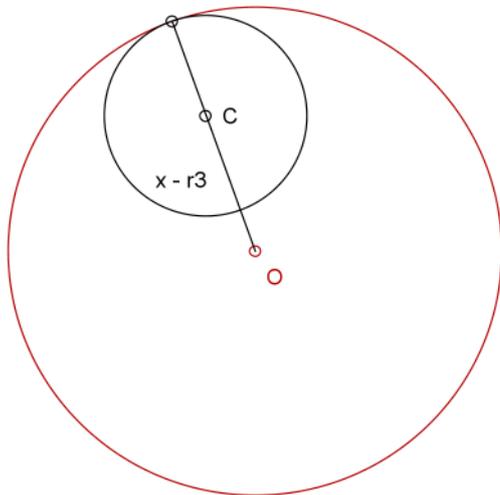
Sind drei Kreise mit ihren Mittelpunkten A, B, C gegeben, so sind die Abstände der Mittelpunkte $CA = a$ und $CB = b$ und $\angle ACB = C$ (Euler wählt hier die gleiche Bezeichnung für einen Winkel wie für einen Punkt, jedoch ist im weiteren eine Verwechslung ausgeschlossen, so dass diese Bezeichnung beibehalten werden kann). Die Radien der

⁴⁶ The Euler Archive, E 648, Seiten 95 - 101

gegebenen Kreise sind α , β , und γ . Der Mittelpunkt des Kreises, der alle berührt ist O, sein Radius = x .

Für die Strecken OA, OB und OC ergibt sich $OA = x + \alpha$, $OB = x + \beta$ und $OC = x + \gamma$.

An dieser Stelle folgt eine Überlegung, dass diese Beziehungen nur für einen Lösungskreis gelten, der die gegebenen Kreise alle von außen berührt. Mit der Möglichkeit, dass der Berührkreis den Kreis um C einschließt, ändert sich die Beziehung in $OC = x - \gamma$.



$$(r_3 = \gamma)$$

Analog gilt auch $OA = x - \alpha$ und $OB = x - \beta$, falls die Kreise um A und B einschließend berührt werden.

Da sowohl kein, genau ein, zwei oder alle drei Kreise im Innern des Berührkreises liegen können, ergibt sich für Euler rein kombinatorisch der Beweis, dass es genau acht Lösungen für den gesuchten Kreis gibt, nämlich:

1. $x + \alpha$, $x + \beta$, $x + \gamma$
2. $x + \alpha$, $x + \beta$, $x - \gamma$
3. $x + \alpha$, $x - \beta$, $x + \gamma$
4. $x - \alpha$, $x + \beta$, $x + \gamma$
5. $x - \alpha$, $x + \beta$, $x - \gamma$
6. $x + \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$
7. $x - \alpha$, $x - \beta$, $x + \gamma$
8. $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$

Im weiteren werden von Euler einige Definitionen vorgenommen (ausgehend von der Situation 1).

Setze:

$$OC = x + \gamma = z \Leftrightarrow x = z - \gamma$$

$$\alpha - \gamma = f \text{ und } \beta - \gamma = g \text{ woraus folgt: } OA = z + f \text{ und } OB = z + g$$

$$\angle OCA = p \text{ und } \angle OCB = q, \text{ sodass gilt } p + q = C$$

somit gilt im Dreieck OCA: $OC = z$, $OA = z + f$ und $CA = a$

Nach dem Cosinus-Satz gilt nun (a^2 schreibt Euler als aa):

$$\cos p = \frac{a^2 + z^2 - (z + f)^2}{2az} = \frac{a^2 + z^2 - z^2 - 2fz - f^2}{2az} = \frac{a^2 - 2fz - f^2}{2az} \quad (1)$$

Analog gilt im Dreieck OCB: $OC = z$, $OB = z + g$ und $CB = b$, und somit

$$\cos q = \frac{b^2 - 2gz - g^2}{2bz} \quad (2)$$

Da $p + q = C$, gilt nach den Additionstheoremen:

$$\cos C = \cos p \cdot \cos q - \sin p \cdot \sin q \quad (3)$$

$$\sin C = \sin p \cdot \cos q + \cos p \cdot \sin q \quad (4)$$

(2) quadrieren ergibt (hier benutzt Euler für den quadrierten Sinus die Bezeichnung $\sin C^2$, korrekt nach heutiger Sicht wäre jedoch $\sin^2 C$ oder $(\sin C)^2$)

$$\sin^2 C = \sin^2 p \cdot \cos^2 q + 2 \sin p \cdot \cos q \cdot \cos p \cdot \sin q + \cos^2 p \cdot \sin^2 q$$

Nach (1) ist

$\sin p \cdot \sin q = \cos p \cdot \cos q - \cos C$, womit sich durch Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \sin^2 C &= \sin^2 p \cdot \cos^2 q + 2 (\cos p \cdot \cos q - \cos C) \cos q \cdot \cos p + \cos^2 p \cdot \sin^2 q \\ &= \sin^2 p \cdot \cos^2 q + \cos^2 p \cdot \sin^2 q + 2 \cos^2 p \cdot \cos^2 q - 2 \cos C \cdot \cos q \cdot \cos p \end{aligned}$$

ferner gilt (nach Pythagoras):

$$\sin^2 p = 1 - \cos^2 p \quad \text{und} \quad \sin^2 q = 1 - \cos^2 q$$

woraus durch Einsetzen folgt:

$$\begin{aligned} \sin^2 C &= (1 - \cos^2 p) \cdot \cos^2 q + \cos^2 p \cdot (1 - \cos^2 q) + 2 \cos^2 p \cdot \cos^2 q - 2 \cos C \cdot \cos q \cdot \cos p \\ &= \cos^2 q - \cos^2 p \cdot \cos^2 q + \cos^2 p - \cos^2 p \cdot \cos^2 q + 2 \cos^2 p \cdot \cos^2 q - 2 \cos C \cdot \cos q \cdot \cos p \\ &= \cos^2 q + \cos^2 p - 2 \cos^2 p \cdot \cos^2 q + 2 \cos^2 p \cdot \cos^2 q - 2 \cos C \cdot \cos q \cdot \cos p \\ &= \cos^2 q + \cos^2 p - 2 \cos C \cdot \cos q \cdot \cos p \quad (5) \end{aligned}$$

damit hat Euler alle Sinus-Ausdrücke eliminiert und die obige Gleichung stark vereinfacht.

Erneut folgen Definitionen, die den Umgang mit gegebenen oder berechneten Elementen erleichtern.

Setze:

$a^2 - f^2 = 2F$ und $b^2 - g^2 = 2G$, dann gilt nach (1) und (2) für

$$\cos p = \frac{2F - 2fz}{2az} = \frac{F - fz}{az} \quad \text{und für}$$

$$\cos q = \frac{2G - 2gz}{2bz} = \frac{G - gz}{bz}$$

Einsetzen in die obige Gleichung (5) bringt

$$\sin^2 C = \frac{(F - fz)^2}{a^2 z^2} + \frac{(G - gz)^2}{b^2 z^2} - 2 \frac{(F - fz)(G - gz) \cos C}{ab z^2}$$

Multipliziert man nun beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner $a^2 b^2 z^2$, ergibt sich eine recht große Gleichung:

$$\begin{aligned} a^2 b^2 z^2 \cdot \sin^2 C &= b^2 (F - fz)^2 + a^2 (G - gz)^2 - 2ab(F - fz)(G - gz) \cos C \\ &= b^2 F^2 - 2b^2 Ffz + b^2 f^2 z^2 + a^2 G^2 - 2a^2 Ggz + a^2 g^2 z^2 - 2ab \cdot \cos C \cdot FG + 2ab \cdot \cos C \cdot Fgz \\ &\quad + 2ab \cdot \cos C \cdot Gfz - 2ab \cdot \cos C \cdot fgz^2 \end{aligned}$$

Euler vereinfacht diese quadratische Gleichung in der Unbekannten z , indem er die berechenbaren Koeffizienten zu L , M und N zusammenfasst, so dass sich folgende Gleichung ergibt:

$$Lz^2 - 2Mz + N = 0 \quad \text{mit}$$

$$L = b^2 f^2 + a^2 g^2 - 2ab \cdot \cos C \cdot fg - a^2 b^2 \cdot \sin^2 C \quad (\text{also alle Koeffizienten von } z^2)$$

$$M = b^2 Ff + a^2 Gg - ab \cdot \cos C \cdot (Fg + Gf) \quad (\text{alle Koeffizienten von } z)$$

$$N = b^2 F^2 + a^2 G^2 - 2ab \cdot \cos C \cdot FG \quad (\text{alle absoluten Glieder})$$

Mit Hilfe der sogenannten p-q-Formel lassen sich für z nach Umformung dieser Gleichung zwei Werte ermitteln:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow z^2 - \frac{2Mz}{L} + \frac{N}{L} &= 0 \\ \Leftrightarrow z_{1/2} &= \frac{2M}{2L} \pm \sqrt{\frac{M^2}{L^2} - \frac{N}{L}} \\ &= \frac{M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{L} \end{aligned}$$

Damit ist z zu berechnen und somit auch x und O .

Im Originaltext folgt nun⁴⁷ die Beobachtung, dass es zwei reelle Lösungen für z gibt, falls $M^2 > LN$, und dass es keine reelle Lösung gibt, falls $LN > M^2$.

Weiterhin stellt Euler fest, dass durch $\alpha - \gamma = f$ und $\beta - \gamma = g$, je nach Vorzeichen der Radien, f und g negative Vorzeichen haben könnten (falls also Kreise gesucht werden, die einschließend berühren und es gilt nach obigem Schema, dass α , β und/oder γ positiv oder negativ in die Berechnungen einfließen). Da sich dadurch aber die Vorzeichen von F und G nicht ändern, ebenso die Vorzeichen von L und N bleiben, ist lediglich M einem Vorzeichenwechsel unterworfen, was zu der Gleichung $Lz^2 + 2Mz + N = 0$ führt.

Umformen ergibt $z_{3/4} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{L}$, was ein z negativ werden lässt.

Da es kein negatives z geben kann, ordnet Euler die Fälle mit gegensätzlichen Vorzeichen der Radien paarweise jeweils einer der vier Gleichungen für z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) zu.

⁴⁷ s. E 648, S. 97

Er verdeutlicht das an folgendem Schema:

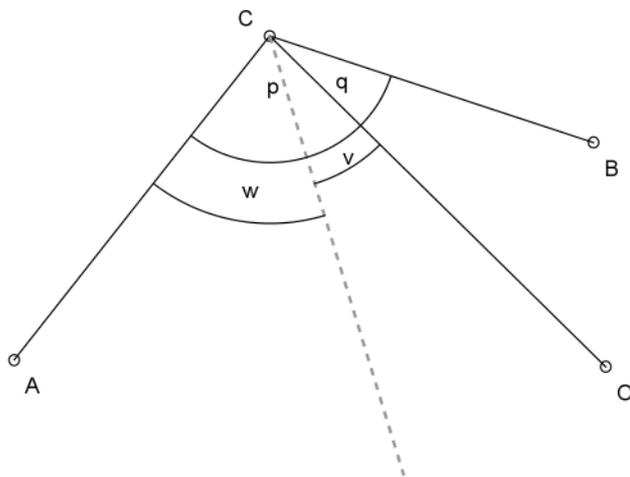
$$1. \begin{Bmatrix} \alpha + \beta + \gamma \\ -\alpha - \beta - \gamma \end{Bmatrix} \quad 2. \begin{Bmatrix} \alpha + \beta - \gamma \\ -\alpha - \beta + \gamma \end{Bmatrix} \quad 3. \begin{Bmatrix} \alpha - \beta + \gamma \\ -\alpha + \beta - \gamma \end{Bmatrix} \quad 4. \begin{Bmatrix} -\alpha + \beta + \gamma \\ \alpha - \beta - \gamma \end{Bmatrix}$$

Wörtlich heißt es dann: „Dieser beobachtete Schluss macht sich für beliebige Beispiele keiner größeren Schwierigkeit schuldig.“⁴⁸

Nachdem er beklagt, dass in diesem geometrischen Problem bisher eine geometrische Konstruktion vermisst wird, „[...]wird es daher am meisten nützen, eine solche Konstruktion aus den Rechenbeispielen selbst abzuleiten.“

Euler bringt dazu in einem weiteren Kapitel⁴⁹ unter dem Titel: „Constructio problematis“ eine zweite Lösung zum Auffinden des gesuchten Kreises, unter Hinzunahme schon gewonnener Erkenntnisse aus der ersten Lösung, indem er sich nur auf den Winkel C konzentriert. Diese Lösung nachzuvollziehen ist etwas aufwändiger als im ersten Abschnitt und der folgende Text ist gegenüber dem Original mit ausführlichen Berechnungen versehen. Interessant ist hier, dass Euler durch rein algebraische Berechnungen zu einer Konstruktion einer Strecke gelangt, mit deren Hilfe ein Winkel konstruiert werden kann, der wiederum andere Teile der Lösung bestimmt. Jedoch ist anhand des Originaltextes trotz seiner Überschrift nicht nachzuvollziehen, in wieweit sich die Lösung, ausgehend von der bestimmten Strecke, rein konstruktiv finden lässt. Berechnungen führen dann aber letztendlich zum Ziel.

Sei der Winkel $ACB = 2\zeta$ (in der oben dargestellten Situation) gegeben, so dass gilt $\angle ACO = p = \zeta + \varphi$ und $\angle BCO = q = \zeta - \varphi$, so ist φ nicht bekannt.



(hier ist $w = \frac{1}{2} \angle ACB = \zeta$ und $v = \varphi$)

Es gilt: (im ersten Teil schon hergeleitet)

$$(1) \cos(\zeta + \varphi) = \frac{F - fz}{az} = \frac{F}{az} - \frac{fz}{az} = \frac{F}{az} - \frac{f}{a} \quad \text{und analog}$$

$$(2) \cos(\zeta - \varphi) = \frac{G}{bz} - \frac{g}{b}$$

⁴⁸ s. E 648, S. 99

⁴⁹ s. E 648, S. 99

Um z aus diesen Gleichungen zu eliminieren, und dadurch die Anzahl der Unbekannten zu reduzieren, multipliziert Euler zunächst (1) mit $\frac{G}{b}$ und (2) mit $\frac{F}{a}$ und erhält

$$\frac{G}{b} \cos(\zeta + \varphi) = \frac{GF}{abz} - \frac{Gf}{ab} \quad \text{und} \quad \frac{F}{a} \cos(\zeta - \varphi) = \frac{FG}{abz} - \frac{Fg}{ab}$$

Subtrahieren beider Gleichungen ergibt:

$$\frac{G}{b} \cos(\zeta + \varphi) - \frac{F}{a} \cos(\zeta - \varphi) = \frac{GF}{abz} - \frac{Gf}{ab} - \frac{FG}{abz} + \frac{Fg}{ab} = \frac{Fg - Gf}{ab}$$

und nach Multiplikation mit ab

$$aG \cdot \cos(\zeta + \varphi) - bF \cdot \cos(\zeta - \varphi) = Fg - Gf$$

Nach Additionstheorem⁵⁰ gilt im weiteren:

$$aG \cdot \cos\zeta \cdot \cos\varphi - aG \cdot \sin\zeta \cdot \sin\varphi - bF \cdot \cos\zeta \cdot \cos\varphi + bF \cdot \sin\zeta \cdot \sin\varphi = Fg - Gf$$

und nach Ausklammern

$$(aG - bF)\cos\zeta \cdot \cos\varphi - (aG + bF)\sin\zeta \cdot \sin\varphi = Fg - Gf$$

Euler schreibt dann nach Multiplikation mit -1

$$Gf - Fg = (bF - aG)\cos\zeta \cdot \cos\varphi + (aG + bF)\sin\zeta \cdot \sin\varphi$$

Hier nun setzt Euler zur Vereinfachung der weiteren Schreibweise

$$Gf - Fg = L$$

$$bF - aG = M$$

$$aG + bF = N \quad \text{und erhält durch Substitution die Gleichung (3):}$$

$$L = M \cdot \cos\zeta \cdot \cos\varphi + N \cdot \sin\zeta \cdot \sin\varphi$$

Jetzt wird ein neuer Winkel θ eingeführt, für den $\tan\theta = \frac{M \cdot \cos\zeta}{N \cdot \sin\zeta}$ gilt, und der somit aus den bekannten Größen zu berechnen ist.

Für diesen Winkel sind dann

$$\sin\theta = \frac{M \cdot \cos\zeta}{\sqrt{M^2 \cos^2\zeta + N^2 \sin^2\zeta}} \quad \text{und} \quad \cos\theta = \frac{N \cdot \sin\zeta}{\sqrt{M^2 \cos^2\zeta + N^2 \sin^2\zeta}}$$

Diesen Zusammenhang kann man sich am rechtwinkligen Dreieck leicht verdeutlichen, wenn die Gegenkathete des Winkels θ mit $M \cos\zeta$ und die Ankathete mit $N \sin\zeta$ bezeichnet ist. Nach dem Satz des Pythagoras berechnet sich die Hypotenuse dann durch die Wurzel aus der Summe der Quadrate der beiden Katheten und mit den Definitionen des Sinus und des Cosinus im rechtwinkligen Dreieck ergeben sich dann obige Gleichungen.

Durch Umformen dieser Gleichungen erhält Euler mit

⁵⁰ s. Andrié/Meier, S.70

$$M \cdot \cos \zeta = \sin \theta \sqrt{M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta} \quad \text{und} \quad N \cdot \sin \zeta = \cos \theta \sqrt{M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta}$$

zwei Ausdrücke, die er in Gleichung (3) einsetzt:

$$L = \sin \theta \sqrt{M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta} \cdot \cos \varphi + \cos \theta \sqrt{M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta} \cdot \sin \varphi$$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{\sqrt{M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta}} = \sin \theta \cdot \cos \varphi + \cos \theta \cdot \sin \varphi = \sin(\theta + \varphi) \quad (\text{nach Additionstheorem}^{51})$$

Jetzt definiert Euler einen Winkel λ , dessen Sinus $\frac{L}{\sqrt{M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta}}$ ergibt, so dass gilt:

$$\sin \lambda = \sin(\theta + \varphi)$$

Da auch $\sin \lambda = \sin(180^\circ - (\theta + \varphi))$ gilt, ergeben sich zwei Gleichungen

$\lambda = \theta + \varphi$ und $\lambda = 180^\circ - \theta - \varphi$, die sich nach φ auflösen lassen zu
 $\varphi = \lambda - \theta$ und $\varphi = 180^\circ - \lambda - \theta$, wodurch sich φ aus bekannten Größen berechnen lässt, da θ durch obige Definition des $\tan \theta$ ebenfalls bekannt ist. Mit φ ist dann der Schenkel bekannt, auf dem der Mittelpunkt O zu finden ist, jedoch noch nicht sein Abstand z von C. Dazu berechnet Euler die vorherige Wurzel:

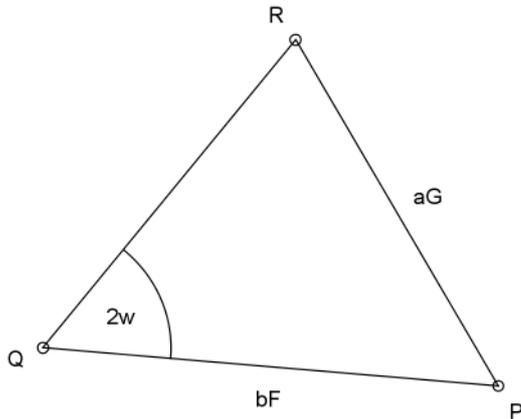
$$\begin{aligned} & \sqrt{M^2 \cos^2 \zeta + N^2 \sin^2 \zeta} \\ &= \sqrt{(bF - aG)^2 \cos^2 \zeta + (aG + bF)^2 \sin^2 \zeta} \quad (\text{nach Definition von M und N}) \\ &= \sqrt{(b^2 F^2 - 2aGbF + a^2 G^2) \cos^2 \zeta + (a^2 G^2 + 2aGbF + b^2 F^2) \sin^2 \zeta} \quad (\text{nach binomischen Formeln}) \\ &= \sqrt{b^2 F^2 \cdot \cos^2 \zeta - 2aGbF \cdot \cos^2 \zeta + a^2 G^2 \cdot \cos^2 \zeta + a^2 G^2 \cdot \sin^2 \zeta + 2aGbF \cdot \sin^2 \zeta + b^2 F^2 \cdot \sin^2 \zeta} \\ &= \sqrt{b^2 F^2 (\cos^2 \zeta + \sin^2 \zeta) + a^2 G^2 (\cos^2 \zeta + \sin^2 \zeta) - 2aGbF (\cos^2 \zeta - \sin^2 \zeta)} \\ &= \sqrt{b^2 F^2 + a^2 G^2 - 2aGbF \cdot \cos 2\zeta} \quad (\text{denn } \cos^2 \zeta + \sin^2 \zeta = 1 \text{ und nach der Formel des doppelten Winkels}^{52} \text{ ist } \cos^2 \zeta - \sin^2 \zeta = \cos 2\zeta) \end{aligned}$$

In einem Dreieck PQR mit $\angle PQR = 2\zeta$ und die Seiten $PQ = bF$ und $PR = aG$ gilt nach dem Cosinussatz für die Seite $QR = \sqrt{b^2 F^2 + a^2 G^2 - 2aGbF \cdot \cos 2\zeta}$.

Somit ist diese Wurzel in dem Dreieck PQR aus bekannten Elementen konstruierbar.

⁵¹ s. Andrié/Meier, S.70

⁵² s. Andrié/Meier, S.71



$$(w = \zeta)$$

Damit ergibt sich für den oben definierten Winkel λ

$$\sin\lambda = \frac{L}{\sqrt{M^2\cos^2\zeta + N^2\sin^2\zeta}} = \frac{Gf - Fg}{QR}$$

(Euler: „[...] woraus der Winkel λ leicht zu konstruieren ist.“ Sehr wahrscheinlich ist hier λ in einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse QR und der Gegenkathete $Gf - Fg$ zum Winkel λ zu konstruieren. Nach dieser Stelle gibt Euler jedoch keine weiteren Konstruktionsschritte mehr vor, so dass man mit der reinen Berechnung fortfahren muss.)

Nun kann der Winkel φ bestimmt werden, damit man durch die Gleichung (1) den gesuchten Abstand z berechnen kann. Denn es ist durch (1):

$$\begin{aligned} \cos(\zeta + \varphi) &= \frac{F - fz}{az} \\ \Leftrightarrow az \cdot \cos(\zeta + \varphi) &= F - fz \\ \Leftrightarrow fz + az \cdot \cos(\zeta + \varphi) &= F \\ \Leftrightarrow z \cdot (f + a \cdot \cos(\zeta + \varphi)) &= F \\ \Leftrightarrow z &= \frac{F}{f + a \cdot \cos(\zeta + \varphi)} \end{aligned}$$

Damit hat Euler den Hauptfall des Berührproblems auf zwei unterschiedliche Weisen gelöst.

Bald nach der Veröffentlichung der hier gezeigten Lösungen, die erstmalig in der Geschichte eine vollständige Diskussion aller acht möglichen Berührkreise des Hauptfalls darstellen, behandelte Euler das Apollonische Berührproblem im Dreidimensionalen, also mit Kugeln statt Kreisen⁵³.

⁵³ s. Böttcher, Das Apollonische Berührproblem, S. 27

6.3. Gauß

Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) veröffentlicht 1810 zum Hauptfall CCC eine recht kurze analytische Lösung, die im folgenden im originalen Wortlaut (kursiv) wiedergegeben wird⁵⁴. Die Lösung von Gauß ist allerdings so kurz und ohne Zeichnung auch sehr abstrakt, so dass zum besseren Verständnis der einzelnen Schritte Kommentare und erklärende Berechnungen ergänzt wurden und eine Zeichnung erstellt wurde, die die Situation anschaulich macht.

Aufgabe: Es sind drei Kreise der Lage und Grösse nach gegeben, man soll einen vierten beschreiben, der sie alle berührt.

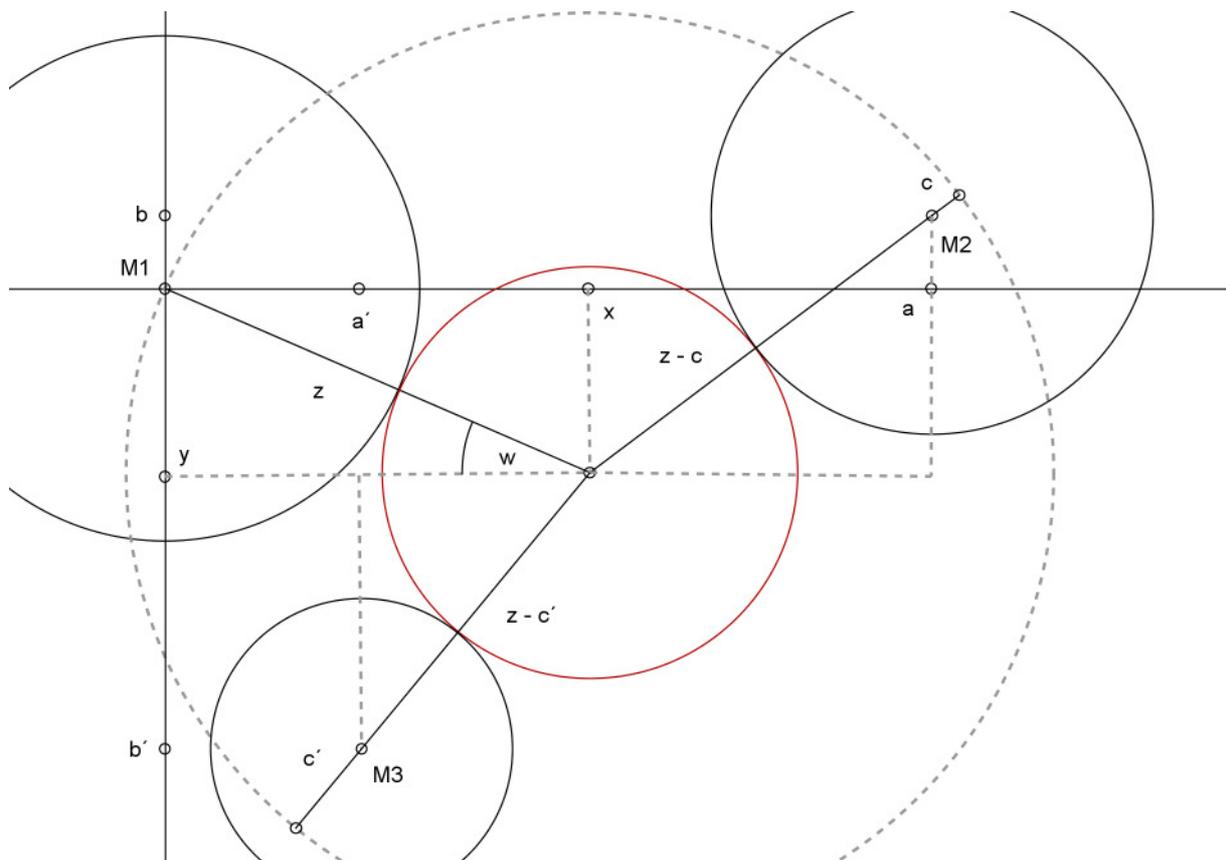
Auflösung: Man lege durch den Mittelpunkt des einen Kreises die senkrechten Axen (sic), und nenne die Abstände von diesen Linien des Mittelpunktes des zweiten Kreises a , b , des dritten Kreises a' , b' und des gesuchten x , y .

Die Entfernung des Mittelpunktes des ersten Kreises vom Mittelpunkte des gesuchten heisse z , so ist:

$z - c$ die Entfernung des Mittelpunktes des zweiten vom Mittelpunkte des gesuchten,

$z - c'$ die Entfernung des Mittelpunktes des dritten vom Mittelpunkt des gesuchten;

wo c den Unterschied der Halbmesser des ersten und zweiten, und c' den Unterschied der Halbmesser des ersten und dritten Kreises bedeutet.



(Aus software-bedingten Gründen ist hier $w = \varphi$)

⁵⁴ s. Gauß, Werke, Band 4, S. 399 ff

Wir haben folgende Gleichungen:

$$xx + yy = zz$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (z - c)^2$$

$$(x - a')^2 + (y - b')^2 = (z - c')^2$$

Umformung am Beispiel der zweiten Gleichung:

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = z^2 - 2cz + c^2 \quad \text{umordnen}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + a^2 + b^2 - c^2 = z^2 + 2ax + 2by - 2cz$$

Setzt man $x = z \cos \varphi$
 $y = z \sin \varphi$

so erhält man aus den vorigen Gleichungen

$$z^2 \cos^2 \varphi + z^2 \sin^2 \varphi + a^2 + b^2 - c^2 = z^2 + 2az \cos \varphi + 2bz \sin \varphi - 2cz$$

$$\Leftrightarrow z^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + a^2 + b^2 - c^2 = z^2 + 2az \cos \varphi + 2bz \sin \varphi - 2cz$$

mit $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ gilt dann:

$$aa + bb - cc = 2az \cos \varphi + 2bz \sin \varphi - 2cz \quad (1)$$

$$a'a' + b'b' - c'c' = 2a'z \cos \varphi + 2b'z \sin \varphi - 2c'z \quad (2)$$

Dividirt (sic) man die erste Gleichung mit $a \cos \varphi + b \sin \varphi - c$, die zweite mit $a' \cos \varphi + b' \sin \varphi - c'$, und zieht sie dann von einander ab, so erhält man

$$\frac{a'a' + b'b' - c'c'}{a' \cos \varphi + b' \sin \varphi - c'} - \frac{aa + bb - cc}{a \cos \varphi + b \sin \varphi - c} = 0 \quad (3)$$

Das ist leicht einzusehen, denn nach Division und Subtraktion erscheinen die linken Seiten der Gleichungen 1 und 2 als Summanden in 3, die rechten Seiten der Gleichungen 1 und 2 kürzen sich jeweils zu 2z und subtrahieren sich zu 0.

oder wenn wir bezeichnen

an dieser Stelle fasst Gauß die bekannten Werte zu „handlicheren“ Größen A und A' zusammen, die jedoch keine konkrete geometrische Bedeutung haben und in der Zeichnung nicht zu finden sind.

$$a'a' + b'b' - c'c' = A'$$

$$aa + bb - cc = A$$

erhält man durch Einsetzen dieser beiden Terme in die angegebene Bruchgleichung (3):

$$A'(a \cos \varphi + b \sin \varphi - c) - A(a' \cos \varphi + b' \sin \varphi - c') = 0$$

$$\Leftrightarrow A'a \cos \varphi + A'b \sin \varphi - A'c - Aa' \cos \varphi - Ab' \sin \varphi + Ac' = 0$$

$$\Leftrightarrow A'a \cos \varphi - Aa' \cos \varphi + A'b \sin \varphi - Ab' \sin \varphi = A'c - Ac'$$

$$\Leftrightarrow (A'a - Aa') \cos \varphi + (A'b - Ab') \sin \varphi = A'c - Ac'$$

Setzen wir nun

$$A'a - Aa' = R \cos M \quad (4)$$

$$A'b - Ab' = R \sin M \quad (5)$$

$$A'c - Ac' = N$$

Auch R , M , N sind hier keine in der Zeichnung ablesbaren Größen, sondern „Berechnungshilfen“ für den Winkel φ , wobei sich N direkt berechnen lässt, R und M sich jedoch erst durch Umformen und Gleichsetzen aus (4) und (5) ergeben.

So verwandelt sich unsere Gleichung in

$$\begin{aligned} R \cos M \cos \varphi + R \sin M \sin \varphi &= N \\ \Leftrightarrow R (\cos M \cos \varphi + \sin M \sin \varphi) &= N \text{ und nach Additionstheorem der Trigonometrie} \\ \Leftrightarrow R \cos(M - \varphi) &= N \end{aligned}$$

$$R \cos (\varphi - M) = N$$

worin ausser φ alles gegeben ist. Man erhält daraus zwei Werthe für φ , unter denen man nach der Art, wie der gesuchte Kreis berühren soll, zu wählen hat.

Was dann noch fehlt ist die Lage der Mittelpunkte der Kreise auf den Schenkeln der Winkel φ . Deren Berechnung ist aber nicht weiter ausgeführt.

7. Schlussbemerkung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit sind verschiedenste Lösungsmethoden gesammelt und vorgestellt worden, die das Apollonische Berührproblem unter unterschiedlichen Aspekten beleuchten. Es wurden elementargeometrische und analytische Lösungen gezeigt, ebenso die Bearbeitung der einzelnen Fälle mit Hilfe der Inversion am Kreis oder der Kegelschnitte als Ortslinien. So unterschiedlich die Vorgehensweise in den einzelnen Lösungsmethoden ist, so erstaunlich sind doch die Zusammenhänge, die sich im Detail zeigen (z.B. anhand des Sekanten-Tangenten-Satzes). Die für mich persönlich faszinierendsten Lösungen finden sich mit den Kegelschnitten als Ortslinien und der Inversion am Kreis. Die Tatsache, dass die Mittelpunkte der gesuchten Kreise auf Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln liegen (die von Apollonius untersucht und benannt wurden) ist ebenso bemerkenswert wie die Idee, ein Problem durch eine Spiegelung am Inversionskreis in ein einfacheres zu verwandeln, dann zu lösen und anschließend wieder in die ursprüngliche Situation zurück zu führen.

Die Lösungen des Apollonischen Berührproblems stecken voller interessanter Ideen, bei deren Untersuchung sich erstaunliche Gedankengänge offenbaren, die zu tiefgreifender geometrischer Erkenntnis führen. Man sieht sich aber auch animiert, weitere Fragestellungen zu formulieren, um die gewonnenen Erkenntnisse auf andere Probleme zu übertragen.

So ist die nächstliegende Frage (Leonard Euler stellte sie als erster) die nach der Lösung des dreidimensionalen Falls, also des Falls sich berührender Kugeln, und wie weit sich Analogien zu den hier gezeigten Lösungen feststellen lassen. Hier ergeben sich dann wieder Fragen, die vielleicht zu Keplers Kugelpackungen, zum n-dimensionalen Fall oder zur fraktalen Geometrie des Teufelsgetriebes⁵⁵ führen.

Ebenso kann aber auch der zweidimensionalen Fall noch durch die weitere Untersuchung von besonderen Bedingungen der Lage der gegebenen Elemente wie Orthogonalität, Parallelität, gleiche Radien, kollineare Lagen von Mittelpunkten und Punkten oder sich schneidende Elemente ausgedehnt werden. Bei der Suche nach ähnlichen Problemen stößt man vielleicht auf den Ring der sich berührenden Kreise⁵⁶ oder auf andere Aufgaben der Kreisgeometrie, die in die verschiedensten Richtungen führen.

Auch die Inversion am Kreis bietet noch weitere Möglichkeiten der Auseinandersetzung. So führt beispielsweise die Inversion von Kegelschnitten zu ganz erstaunlichen Kurven. Durch die Übertragung der Inversion in das Dreidimensionale gelangt man zur Inversion an der Kugel oder am Drehzylinder.

Nicht zuletzt kann über das Apollonische Berührproblem das Interesse an vielen anderen Bereichen der Geometrie geweckt werden, was wiederum über neue Problemstellungen zu ganz anderen Zusammenhängen führt.

Man kann sagen, dass die vorliegende Sammlung von Aufgaben und deren verschiedene Lösungen noch keineswegs abgeschlossen ist, sondern genügend Anregung bietet, in die unterschiedlichsten Richtungen ausgebaut zu werden. Dabei mag die praktische Anwendung des Themas etwas begrenzt sein und es stellt sich vielleicht die Frage nach dem Nutzen.

Das Apollonische Berührproblem ist eines der mathematischen Probleme, die wegen ihrer einfachen Aufgabenstellung und ihren weitreichenden Folgen als schön bezeichnet werden können und deren Nutzen vielleicht darin verborgen liegt, dass sie immer wieder Anlass zum Staunen bieten, indem man durch intensive Beschäftigung Einblicke bekommt, Entdeckungen macht und neue Erkenntnisse gewinnt und dass sie auf diese Weise das Vermögen menschlichen Denkens offenbaren.

⁵⁵ s. C. Pöppe, Spektrum der Wissenschaft

⁵⁶ s. Scheid/Schwarz, S.154



Kreisprobleme? - Das Apollonische Berührproblem in der Wirtschaft:

Seien elf Kreise in einem Kranz gegeben ...

Literaturliste:

- Andrié, Manfred / Meier, Paul: Lineare Algebra und Geometrie für Ingenieure, 2. Auflage
Mannheim, 1987
- Bartsch, Hans-Jochen: Taschenbuch mathematischer Formeln, 7.-12. Auflage, Thun, 1990
- Böttcher, Frauke: Good for What, Köln, 2005 (nicht veröffentlicht)
- Böttcher, Frauke: Das Apollonische Berührproblem, Köln, 2006 (nicht veröffentlicht)
- Glaeser, Georg: Geometrie und ihre Anwendungen, München, 2005
- Hartshorne, Robin: Geometry. Euclid and beyond, New York, 2000
- Holtmann, Friedrich: Mathematik, Band 2, Leipzig, 1961
- Scheid, Harald / Schwarz, Wolfgang: Elemente der Geometrie, 4. Auflage, München, 2007
- Scriba, Christoph / Schreiber, Peter: 5000 Jahre Geometrie, Berlin, 2005
- Schupp, Hans: Die Kegelschnitte, Mannheim, 1988
- Ulrich, Georg: Geometrie, 24. Auflage, Berlin-Leipzig, 1941
- Weinacht, Josef: Prinzipien zur Lösung mathematischer Probleme, Braunschweig, 1958
- Internet (August 2007):
- Hellwig, C.: Das Problem des Apollonius, Halle, 1865
<http://quod.lib.umich.edu/cgi/b/bib/bibperm?q1=ACV2151.0001.001>
- Gauss, Werke, Band 4, S. 399 ff:
<http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?ht=VIEW&did=D139408>
- <http://mathworld.wolfram.com/ApolloniusProblem.html>
- Pöppe, Christoph: Das Getriebe des Teufels, in: Mathematische Unterhaltungen, Spektrum
der Wissenschaft, September 2004
www.spektrum.de
- The Euler Archiv, E 648:
www.math.dartmouth.edu/~euler/index.html