Tensorprodukte von (F)- und (DF)-Räumen und ein Fortsetzungssatz

D. Vogt

Sei $0 \longrightarrow F \xrightarrow{\imath} G \xrightarrow{q} H \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz nuklearer (F)-Räume, E ein vollständiger lokalkonvexer Raum mit einem abzählbaren Fundamentalsystem beschränkter Mengen (z.B. ein vollständiger (DF)-Raum). Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchung ist es, unter gewissen, hinreichend allgemein und anwendbaren Bedingungen die Exaktheit der tensorierten Sequenz

$$0 \longrightarrow F\hat{\otimes}_\pi E \xrightarrow{\imath\otimes\mathrm{id}} G\hat{\otimes}_\pi E \xrightarrow{q\otimes\mathrm{id}} H\hat{\otimes}_\pi E \longrightarrow 0$$

zu zeigen.

Diese ist im allgemeinen nicht exakt, wie das Beispiel einer nicht zerfallenden Sequenz und $E = H'$ lehrt. In diesem Fall ist nämlich das id entsprechende Element von $H\hat{\otimes}_\pi E = E'\hat{\otimes}_\pi E \cong L(E,E)$ nicht im Bild von $q \otimes \mathrm{id}$. Andererseits ist die tensorierte Sequenz an allen Stellen mit Ausnahme möglicherweise der letzten stets exakt, d.h. nur die Surjektivität von $q \otimes \mathrm{id}$ ist zu untersuchen.

1

Wir wollen in diesem Abschnitt einleitend zeigen, daß unser Ausgangsproblem der Erhaltung der Exaktheit der tensorierten Sequenz (bzw. der Erhaltung der Surjektivität von $q\otimes\mathrm{id}$) äquivalent ist zu einem Fortsetzungsproblem für stetige lineare Abbildungen zwischen (DF)-Räumen. Seine Lösung impliziert einen Liftingsatz für Abbildungen zwischen (F)-Räumen.

Sei also wieder $0 \longrightarrow F \xrightarrow{\imath} G \xrightarrow{q} H \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz nuklearer (F)-Räume, E ein vollständiger lokalkonvexer Raum mit einem abzählbaren Fundamentalsystem beschränkter Mengen.

Den Dualraum X' eines lokalkonvexen Raumes X denken wir uns, falls nichts anderes vermerkt, immer mit der starken Topologie versehen. Ansonsten bedeutet b die starke, τ die Mackeysche und s die schwache Topologie auf X bzw. X'. $L(X,Y)$ bedeutet der Raum der stetigen linearen Abbildungen von X nach Y, ist $A \in L(X,Y)$ so ist $A^\tau \in L(X',Y')$ die transponierte Abbildung.

Lemma 1.1 *Unter den angegebenen Voraussetzungen sind äquivalent*

(a) $0 \longrightarrow F\hat{\otimes}_\pi E \xrightarrow{\imath\otimes\mathrm{id}} G\hat{\otimes}_\pi E \xrightarrow{q\otimes\mathrm{id}} H\hat{\otimes}_\pi E \longrightarrow 0$ *ist exakt.*

(b) zu jedem $\varphi \in L(H',E)$ *existiert ein* $\psi \in L(G',E)$ *mit* $\varphi = \psi \circ q^\tau$.

Beweis: In kanonischer Weise ist

$$G\hat{\otimes}_\pi E \cong L(G'_s, E_s) = L(G'_\tau, E_\tau) = L(G'_b, E),$$

letzteres, da $G'_\tau = G'_b$. Analoges gilt für $H\hat{\otimes}_\pi E$. Dabei ergibt sich das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G\hat{\otimes}_\pi E \arrow[r, "q\otimes\mathrm{id}"] & H\hat{\otimes}_\pi E \\
L(G',E) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r] & L(H',E) \arrow[u, "\cong"'] \\
A \arrow[r, mapsto] & A \circ q^\tau
\end{tikzcd}$$

Ist speziell E Dualraum eines (F)-Raumes, so können wir in 1.1 eine weitere Äquivalenz hinzufügen, die es uns erlaubt, Liftingsätze für Abbildungen zwischen (F)-Räumen abzuleiten.

Lemma 1.2 *Sind die Voraussetzungen von 1.1 erfüllt und ist* $E = \tilde{E}'$, $\tilde{E}$ (F)*-Raum, so sind äquivalent (a), (b) aus 1.1 sowie*

(c) zu jedem $\varphi \in L(\tilde{E},H)$ *existiert ein* $\psi \in L(\tilde{E},G)$ *mit* $\varphi = q \circ \psi$.

Beweis: Da $G'_b = G'_\tau$ bornologisch ist und die beschränkten Mengen in $E = \tilde{E}'_b$ mit denen in $\tilde{E}'$ übereinstimmen, erhalten wir

$$L(G'_b, E) = L(G'_\tau, \tilde{E}') \cong L(\tilde{E}, G),$$

wobei letztere Isomorphie durch die Transposition geliefert wird. Analoges gilt für H. Wir können das Diagramm im Beweis von 1.1 also folgendermaßen ergänzen:

$$A \longmapsto A \circ q^\tau$$

$$\begin{array}{ccc} L(G', E) & \longrightarrow & L(H', E) \\ \| & & \| \\ L(\tilde{E}, G) & \longrightarrow & L(\tilde{E}, H) \end{array}$$

$$B \longmapsto q \circ B$$

Bemerkung 1.3 *Es wurde die Äquivalenz von (b) und (c) gezeigt. Dazu brauchten wir nur, daß G reflexiv und damit G'_b bornologisch ist (s. [1] S. 403).*

Da die Abbildung q^τ den Raum H' in G' einbettet, beschreibt also 1.1 das Problem der Fortsetzung von Abbildungen $q^\tau H' \to E$ auf G'.

2

Wir werden also zunächst Fortsetzungssätze für stetige lineare Abbildungen zwischen (DF)-Räumen behandeln und in diesem Abschnitt in allgemeiner Form die Grundlagen schaffen. Für die Betrachtungen über Tensorprodukte sind dabei neben den Definitionen 2.1, 2.2, vorwiegend 2.3 und 2.5 maßgebend.
In diesem Abschnitt soll $X = \lim \operatorname{ind}_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ein bornologischer (DF)-Raum sein, induktiver Limes der Banachunterräume X_n, $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum von X, versehen mit einer feineren Topologie als die von X induzierte. Mit $Y_n = X \cap X_n$ ist $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}$, die Y_n sind Banachräume mit der von X_n induzierten Norm. Setzen wir $Q = X/Y$ mit der Quotiententopologie, so ist Q wieder ein bornologischer (DF)-Raum, induktiver Limes der Banachräume $Q_n := X_n/Y_n$. Die Normen in X_n, Y_n, Q_n bezeichen wir einheitlich mit $|| \; ||_n$, E soll jeweils ein quasivollständiger lokalkonvexer Raum sein. Ist B eine absolutkonvexe, abgeschlossene, beschränkte Menge in E, so soll E_B der zugehörige Banachraum sein. Seine Norm bezeichnen wir mit $|| \; ||_B$.

Definition 2.1 (Q,E) *heißt zulässig, falls folgendes gilt: Es existiert eine absolutkonvexe, abgeschlossene, beschränkte Menge B in E, eine Folge $n(k) \leq k$, $\lim n(k) = +\infty$ sowie ein k_0, so daß es zu jedem $k \geq k_0$, $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in L(Q_k, E)$ ein $\psi \in L(Q,E)$ gibt mit: $(\varphi - \psi)Q_{n(k)} \subset E_B$, $\sup\{||(\varphi-\psi)x||_B \mid x \in Q_{n(k)}, ||x||_{n(k)} \leq 1\} < \varepsilon$.*

Der in 2.1 definierte Begriff beinhaltet, daß $L(Q,E)$ für jedes k in einer präzisierten Weise dicht liegt in $L(Q_k,E)$. Q kann dabei einen beliebigen bornologischen (DF)-Raum bedeuten. Die Definition hängt dann nur von der Topologie (genauer der Bornologie, d.h. der Klasse der beschränkten Mengen) ab.

Definition 2.2 $U \in L(Y,E)$ *heißt stufenweise fortsetzbar, falls zu jedem n ein $V_n \in L(X_n, E)$ existiert, so daß $V_n|_{Y_n} = U|_{Y_n}$.*

Der folgende Satz zeigt mit Hilfe eines Beweisschemas vom Mittag-Leffler-Typ, daß die Zulässigkeit von (Q,E) es erlaubt, die Frage der Fortsetzbarkeit einer Abbildung auf die Frage der stufenweisen Fortsetzbarkeit zu reduzieren. Diese ist in den in §1 angesprochenen Fällen immer gegeben (s. 2.5).

Satz 2.3 *Ist (Q,E) zulässig, $u \in L(Y,E)$ stufenweise fortsetzbar, dann ist u fortsetzbar, d.h. es existiert ein $U \in L(X,E)$ mit $U|_Y = u$.*

Beweis: Für jedes k setzen wir u fort zu einer Abbildung $V_k \in L(Y_k, E)$. Dann ist

$$V_{k+1}|_{X_k} - V_k \in L(X_k, E)$$

null auf Y_k, d.h. induziert ein $W_k \in L(Q_k, E)$.
Wir wählen nun induktiv eine Folge A_k von Abbildungen aus $L(Q,E)$. Sei dazu $A_1 = 0$. Ist A_k gewählt, dann wenden wir die Definitionseigenschaft der Zulässigkeit auf $W_k + A_k|_{Q_k} \in L(Q_k, E)$ an und erhalten $A_{k+1} \in L(Q,E)$, so daß

$$(W_k + A_k - A_{k+1})|_{Q_{n(k)}} \in L(Q_{n(k)}, E_B)$$

mit

$$||W_k + A_k - A_{k+1}||_{n(k),B} \leq 2^{-k},$$

wo $||\ ||_{n(k),B}$ die Norm in $L(Q_{n(k)}, E_B)$ bedeutet.
Wir setzen nun für $x \in X_k$

$$U_k(x) = V_k(x) - A_k(qx). \tag{(1)}$$

Hierbei soll q die Quotientenabbildung bedeuten. Es ist $U_k \in L(X_k, E)$. Sei $x \in X_n$, $n(k) \geq n$. Dann ist $k \geq n$ und wir erhalten

$$(U_{k+1}-U_k)x = (V_{k+1}-V_k)x - A_{k+1}(qx) + A_k(qx) = (W_k + A_k - A_{k+1})qx \in E_B,$$

und weiter

$$||U_{k+1}x - U_k x||_B \leq 2^{-k}||x||_{n(k)} \leq 2^{-k}||x||_n. \tag{(2)}$$

Die Folge $U_k x$, k genügend groß, konvergiert also für jedes $x \in X$. Wir setzen $Ux = \lim_{k->+\infty} U_k x$ und erhalten eine lineare Abbildung U von X nach E. Wir haben ihre Stetigkeit zu zeigen.
Sei also $x \in X_n$, $n(k) \geq n$, dann konvergiert wegen (2) die Folge $U_{k+p}x - U_k x$ für $p \to +\infty$ in E_B und wir erhalten

$$||Ux - U_k x||_B \leq ||x||_n.$$

Also ist $U - U_k|_{X_n} \in L(X_n, E_B) \subset L(X_n, E)$ und damit $U|_{X_n} \in L(X_n, E)$ für alle n, d.h. $U \in L(X, E)$.
Für $x \in Y_n$ ist wegen (1) $Ux = \lim_{k \geq n} U_k(x) = \lim_{k \geq n} V_k(x) = ux$. □

Bemerkung 2.4 *Wir haben von der Zulässigkeit (Def. 2.1) nur benötigt, daß zu $\varphi \in L(Q_k, E)$ ein $\psi \in L(Q_{k+1}, E)$ mit der erwähnten Eigenschaft existiert. Eine Definition der Zulässigkeit in dieser Weise würde uns zunächst in Abhängigkeit vom speziellen Stufensystem bringen. Sie wären außerdem nur scheinbar allgemeiner, wie in 3.3 gezeigt wird.*

Wir zeigen zunächst, daß im Falle des aus §1 resultierenden Fortsetzungsproblems die Voraussetzung der stufenweisen Fortsetzbarkeit immer erfüllt ist. Ein lokalkonvexer Raum H heißt dualnuklear, wenn zu jeder absolutkonvexen, abgeschlossenen, beschränkten Menge B_1 eine absolute Menge B_1 eine ebensolche Menge B_2, $B_1 \subset B_2$ existiert, so daß die Inklusionsabbildung $E_{B_1} \hookrightarrow E_{B_2}$ nuklear ist. H ist dualnuklear genau dann, wenn H'_b nuklear ist und im Falle metrischer oder dualmetrischer (bzw. (DF)-) Räume, wenn H nuklear ist (siehe [3]).

Lemma 2.5 *Ist E oder Y dualnuklear, so ist jede Abbildung $u \in L(Y, E)$ stufenweise fortsetzbar.*

Beweis: In beiden Fällen ist $U|_{Y_n}$ eine nukleare Abbildung von Y_n nach E und kann daher zu einer (nuklearen) Abbildung $V_n \in L(X_n, E)$ fortgesetzt werden. □
Die Voraussetzung der stufenweisen Fortsetzbarkeit ist auch in weiteren Fällen automatisch erfüllt. Hierzu dient der folgende Begriff.

Definition 2.6 *Y heißt stufenweise projiziert in X, wenn die identische Abbildung id_X stufenweise fortsetzbar ist (d.h. zu jedem n eine Abbildung $\pi_n \in L(X_n, Y)$ existiert mit $\pi_n|_{Y_n} = \mathrm{id}$).*

Bemerkung 2.7 *Dies ist sicher immer der Fall, wenn Y_n stetig projiziert ist in X_n für alle n.*

Das folgende Lemma ist auf Grund der Definition unmittelbar klar.

Lemma 2.8 *Ist Y stufenweise projiziert in X, so ist jedes $u \in L(Y, E)$ stufenweise fortsetzbar.*

Ferner folgt der folgende Satz aus 2.3 und Definition 2.6.

Satz 2.9 *Ist (Q, Y) zulässig und Y stufenweise projiziert, so ist Y stetig projiziert in X.*

Beweis: Die nach 2.3 existierende Fortsetzbarkeit von id_Y zu einer Abbildung aus $L(X, Y)$ liefert die Projektion. □

Proposition 2.10 *In jedem der folgenden Fälle ist Y stufenweise projiziert in X:*

(1) Y dualnuklear

(2) X_n Hilbertraum für alle n

(3) Y_n ℓ^∞-Raum für alle n

(4) Q_n ℓ^1-Raum für alle n.

Beweis: (1) folgt aus 2.5 mit $E = Y$ oder aus (2), bei (2), (3), (4) liegt Y_n projiziert in X_n. □

Die in (3) und (4) genannten Voraussetzungen spielen in dieser Form für Köthesche Folgenräume eine Rolle. Es lassen sich aber sehr viel allgemeinere Situationen analog behandeln. Anstelle von (3) genügt etwa die folgende Bedingung: Zu jedem n existiert ein p, so daß die Einbettung $Y_n \longrightarrow Y_{n+p}$ über einen Raum faktorisiert, der die Ausdehnungseigenschaft hat, z.B. L^∞ oder allgemeiner $C(K)$, K total unzusammenhängend. Oder auch: Zu jedem n existiert p, so daß die Einbettung $Y_n \longrightarrow Y_{n+p}$ kompakt ist und über eine Raum faktorisiert, der die Ausdehnungseigenschaften für kompakte Abbildungen hat, z.B. $C(K)$, K kompakt. In analoger Weise läßt sich (4) verallgemeinern.

Weiter lassen sich Bedingungen an E angeben, die die stufenweise Fortsetzbarkeit aller $u \in L(Y,E)$ sichern, z.B. daß E sich aus ℓ^∞-Räumen (oder allgemeiner $C(K)$-Räumen, K total unzusammenhängend, z.B. L^∞) aufbaut, oder auch gemischte Bedingungen, z.B. kompakte Einbettungen zwischen den Y_n, und E baut sich aus $C(K)$-Räumen, K kompakt, auf.
Die für alle diese Fälle relevanten allgemeinen Ausdehnungs- und Liftingsätze für Abbildungen zwischen Banachräumen sind in der Literatur zu finden.

3

Es sollen nun hinreichende Bedingungen für die Zulässigkeit von (Q,E) angegeben werden. Q soll dabei stets ein quasivollständiger, bornologischer (DF)-Raum sein, induktiver Limes der Banachräume Q_n, E ein quasivollständiger lokalkonvexer Raum mit einem abzählbaren Fundamentalsystem $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ absolutkonvexer, beschränkter Mengen.

Lemma 3.1 *Ist $(\tilde{Q},E)$ zulässig und $Q \subset \tilde{Q}$ ein stufenweise projizierter Unterraum, so ist auch (Q,E) zulässig.*

Beweis: Zu jedem $\nu \in \mathbb{N}$ sei $\pi_\nu \in L(\tilde{Q},Q)$, so daß $\pi_\nu|_{Q_\nu} = \mathrm{id}_{Q_\nu}$. Es existiert dann zu jedem ν ein $m(\nu) \geq \nu$, so daß $\pi_\nu \in L(\tilde{Q}_\nu, Q_{m(\nu)})$. Da $(\tilde{Q},E)$ zulässig ist, existiert eine beschränkte Menge B in E, $\nu_0 \in \mathbb{N}$, sowie zu jedem $\nu \geq \nu_0$ ein $\tilde{O}n(\nu) \leq \nu$, $\tilde{n}(\nu) \nearrow +\infty$, so daß zu jedem $\tilde{\varphi} \in L(Q_{\tilde{n}(\nu)},E)$ ein $\tilde{\psi}$ mit den in Definition 2.1 geforderten Eigenschaften existiert. Wir setzen $k_0 = m(\nu_0)$ und für $k \geq k_0$: $\nu(k) = \max\{\nu \mid m(\nu) \leq k\}$, $n(k) = \tilde{n}(\nu(k))$. Sei $k \geq k_0$, $\varphi \in L(\tilde{Q}_k, E)$, $\varepsilon > 0$, dann ist $\varphi \circ \pi_{\nu(k)} \in L(\tilde{Q}_{\nu(k)}, E)$. Es existiert also ein $\tilde{\psi} \in L(\tilde{Q},E)$, so daß $(\varphi \circ \pi_{\nu(k)} - \tilde{\psi})\tilde{Q}_{n(k)} \subset E_B$ und $\sup\{||(\varphi \circ \tilde{\pi}_{\nu(k)} - \tilde{\psi})x||_B \mid x \in \tilde{Q}_{n(k)}, ||x||_{n(k)} \leq 1\} \leq \varepsilon$. Mit $\psi = \tilde{\psi}|_Q$ erhalten wir $\psi \in L(Q,E)$, $(q-\psi)Q_{n(k)} \subset E_B$ und $\sup\{||(\varphi - \psi)x||_B,\, x \in Q_{n(k)},\, ||x||_{n(k)} \leq 1\} \leq \varepsilon$. $\square$

Bemerkung 3.2 *Es sei daran erinnert, daß die stufenweise Projiziertheit von Q in vielen Fällen (s. 2.10) ohne weiteres erfüllt ist.*

Lemma 3.3 *Existiert eine absolutkonvexe, abgeschlossene, beschränkte Menge B in E, so daß zu jedem $n \geq 2$, $\varepsilon > 0$, $\varphi \in L(Q_n,E)$ ein $\psi \in L(Q_{n+1},E)$ existiert mit $(\varphi - \psi)Q_{n-1} \subset E_B$, $||\varphi - \psi||_{n-1,B} \leq \varepsilon$, dann ist (Q,E) zulässig. Hierbei ist $||\ ||_{n,B}$ die Norm in $L(Q_n,B)$.*

Beweis: Sei $\varphi \in L(Q_n,E)$. Wir wählen induktiv eine Folge $\psi_\nu \in L(Q_{n+\nu},E)$. Dann setzen wir $\psi_0 = p \in L(Q_n,E)$. Ist ψ_ν gewählt, so existiert nach Voraussetzung ein $\psi_{\nu+1} \in L(Q_{n+\nu+1}, E)$, so daß $(\psi_\nu - \psi_{\nu+1})Q_{\nu-1} \subset E_B$ und

$$||\psi_\nu - \psi_{\nu+1}||_{n+\nu-1,B} \leq \varepsilon 2^{-\nu-1}.$$

Wie im Beweis von 2.3 folgt nun, daß für jedes $x \in Q$ der Grenzwert $\psi x = \lim_{\nu->+\infty} \psi_\nu x$ existiert und eine Abbildung $\psi \in L(Q, E)$ definiert. Für $x \in Q_{n-1}$ gilt $\psi x - \varphi x E_B$ und

$$||\psi x - \varphi x||_B \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} ||\psi_{\nu+1} x - \psi_\nu x||_B \leq \varepsilon ||x||_{n-1}.$$

$\square$

Mit Hilfe von 3.3 werden wir jetzt zunächst den Fall behandeln, daß Q ein Stufenraum ist. Auf allgemeinere Fälle können wir dann mit Hilfe von 3.1 schließen.
Sei $a = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ eine unendliche Matrix, $0 \leq a_{j,k} \leq a_{j,k+1}$, $\sup_k a_{j,k} > 0$ für alle j und k. Mit a_k bezeichnen wir die Folge $(a_{j,k}, a_{2,k}, \ldots)$. Mit $Q_k := \ell^1(a_k^{-1}) = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \mid ||\xi||_k = \sum_k |\xi_j| a_{j,k}^{-1} < +\infty\}$ (wobei die Summen über die j mit $a_{j,k} > 0$ erstreckt werden, und für die anderen j $\xi_j = 0$ sein soll) setzen wir $Q(a) = \bigcup_k Q_k = \bigcup_k \ell^1(a_k^{-1})$, versehen mit der induktiven Limestopologie.
Zu der folgenden Definition s. [4]. Die Klasse (A) ergab sich dort als Lösung eines Problems aus der vektorwertigen Distributionstheorie, bzw. als Klasse derjenigen (DF)-Räume E, so daß für die E-wertigen holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ der Satz von Mittag-Leffler gilt.

Definition 3.4 *E hat die Eigenschaft (A), falls folgendes gilt:*
Es existiert eine absolutkonvexe, abgeschlossene, beschränkte Menge B in E, so daß es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $p \in \mathbb{N}$ und $C > 0$ gibt mit

$$B_k \subset rB + \frac{C}{r} B_{k+p}$$

für alle $r > 0$.

Das folgende Ergebnis liefert uns zusammen mit 3.1 die wichtigsten Fälle zulässiger Paare.

Proposition 3.5 *Hat E die Eigenschaft (A) und genügen die $a_{j,k}$ der Bedingung $(*)$ $a_{j,k}^2 \geq a_{j,k-1} a_{j,k+1}$ für alle j und alle $k \geq 2$, dann ist $(Q(a), E)$ zulässig.*

Wir werden dieses Resultat sofort in einer allgemeinen Version beweisen. 3.5 ist dann der Spezialfall $f(r) = r$ der folgenden Proposition 3.7.
Sei im folgenden $f\colon |0, +\infty| \longrightarrow |0, +\infty|$ eine monoton wachsende Funktion, $f(+\infty) = +\infty$. Wir machen die übliche Konvention für das Rechnen mit $+\infty$, d.h. für $a > 0$ ist $\frac{a}{0} = +\infty$, $a \cdot (+\infty) = +\infty$, $0 \cdot (+\infty) = 0$ usw.

Definition 3.6 *E hat die Eigenschaft (A_f), falls folgendes gilt:*
Es existiert eine absolutkonvexe, abgeschlossene, beschränkte Menge B in E, so daß es zu jedem $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ ein $p \in \mathbb{N}$, $C > 0$ gibt mit

$$B_k \subset \varepsilon f(r) B + \frac{C}{r} B_{k+p}$$

für alle $r > 0$.

Die verallgemeinerte Version von 3.5 lautet dann:

Proposition 3.7 *Hat E die Eigenschaft (A_f), und genügen die $a_{j,k}$ der Bedingung*

$$(*_f) \qquad C_k \frac{a_{j,k}}{a_{j,k-1}} \geq f\Big(\frac{a_{j,k+1}}{a_{j,k}}\Big) \text{ für alle } j \text{ und } k \geq 2 \text{ mit geeignetem } C_k,$$

dann ist $(Q(a), E)$ zulässig.

Beweis: Sei $\varphi \in L(Q_k, E)$, $\varepsilon > 0$, dann existiert ein k' und C', so daß mit $D_k = \{x \in Q_k \mid ||x||_k \leq 1\}$ gilt

$$\varphi(D_k) \subset C' B_{k'}.$$

Zu k' existiert ein K und $C'' > 0$, so daß

$$B_{k'} \subset \frac{\varepsilon}{C_k C'} f(r) B + \frac{C''}{r} B_K$$

für alle $r > 0$ oder auch

$$(1) \qquad \varphi(D_k) \subset \frac{\varepsilon}{C_k} f(r) B + \frac{C''}{r} B_K$$

für alle $r > 0$.
Ist $e_j = (\delta_{j,\nu})_{\nu=1,2,\ldots}$ der j-te Einheitsvektor in Q, so ist $e_j \in Q_k$ für alle $j \in J_k = \{j \mid a_{j,k} \neq 0\}$. Für $j \in J_k$ setzen wir $x_j = \varphi e_j$ und erhalten

$$a_{j,k} x_j \in \varphi(D_k), \quad \varphi(\xi) = \sum_{j \in J_k} \xi_j x_k$$

für alle $j \in J_k$, bzw. $\xi \in Q_k$.
Für $j \in J_k$ wenden wir (1) auf $a_{j,k}x_j$ an mit $r = \frac{a_{j,k+1}}{a_{j,k}}$ und erhalten ein

$$y_j \in C'' \frac{a_{j,k}}{a_{j,k+1}} B_K$$

mit

$$a_{j,k}x_j - y_j \in \frac{\varepsilon}{C_k} f(\frac{a_{j,k+1}}{a_{j,k}})B.$$

Wir setzen für $\xi \in Q_{k+1}$

$$\psi\xi := \sum_{j \in J_k} \frac{|\xi_j|}{a_{j,k}} y_j$$

Wegen

$$\sum_{j \in J_k} \frac{|\xi_j|}{a_{j,k}} ||y_j||_{B_K} \leq C'' \sum_{j \in J_k} \frac{|\xi_j|}{a_{j,k+j}} \leq C'' ||\xi||_{k+1}$$

ist $\psi \in L(Q_{k+1}, E_{B_K}) \subset L(Q_{k+1}, E)$.
Für $\xi \in Q_{k-1}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} ||\varphi\xi - \psi\xi||_B \leq \quad & \textstyle\sum_{j \in J_{k-1}} \frac{|\xi_j|}{a_{j,k}} ||a_{j,k}x_j - y_j||_B \\ \leq \quad & \textstyle\frac{\varepsilon}{C_k} \sum_{j \in J_{k-1}} \frac{1}{a_{j,k}} f(\frac{a_{j,k+1}}{a_{j,k}}) \\ \leq \quad & \textstyle\varepsilon \sum_{j \in J_{k-1}} \frac{|\xi_j|}{a_{j,k-1}} = \varepsilon ||\xi||_{k-1}. \end{aligned}$$

□

Um nun den Satz 2.3 in geeigneter Weise anwenden zu können und so den Fortsetzungssatz für (DF)-Räume von Typ (A) (bzw. (A_f)) zu formulieren, benötigen wir noch das folgende Lemma:

Lemma 3.8 *Ist* $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \xrightarrow{q} Q \longrightarrow 0$ *wie in §2 gegeben und* Q *stufenweise projiziert in einem Raum* $Q(a)$, *so ist* X *stufenweise projiziert in* Y.

Beweis: Zu gegebenem n existiert m und M, so daß $Q_n \subset \ell^1(a_m^{-1}) \cap Q \subset Q_M$ mit stetigen Einbettungen. Sei $\pi_m \in L(\ell^1(a_m^{-1}), Q)$ die auf Grund der stufenweisen Projiziertheit von Q existierende Abbildung. Durch Definition auf den Einheitsvektoren von $\ell^1(a_m^{-1})$ zeigt man, daß eine Abbildung $\tilde{R}_n \in L(\ell^1(a_m^{-1}), Y)$ existiert mit $q \circ \tilde{R}_n = \pi_m$. Wir setzen $R_n = \tilde{R}_n|_{Q_n} \in L(Q_n, Y)$ und $P_n y = y - R_n(qy)$.
Wegen $qp_n y = qy - \pi_m qy = 0$ für $y \in Y_n$ ist $P_n \in L(Y_n, X)$ es ist $P_n y = y$ für $y \in X_n$. □

Wir können nun mit Hilfe der Ergebnisse von§2 und §3 den folgenden Satz formulieren, den konkreten Fortsetzungssatz für Räume der Klasse (A) (bzw. (A_f)).

Satz 3.9 *Ist* $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ *eine exakte Sequenz vollständiger, bornologischer (DF)-Räume, ist Q stufenweise projizierter Unterraum eines Raumes $Q(a)$, wo $a = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ die Bedingung $(*)$ (bzw. $(*_f)$) erfüllt, ist weiter E ein quasivollständiger (DF)-Raum der Klasse (A) (bzw. (A_f)), dann ist jede lineare Abbildung $\varphi \in L(X,E)$ fortsetzbar zu einem $\psi \in L(Y,E)$.*

Beweis: X ist nach 3.8 stufenweise projiziert in Y, also ist φ nach 2.8 stufenweise fortsetzbar. Da wegen 3.1 und 3.5 (bzw. 3.7) das Paar (Q,E) zulässig ist, ist nach 2.3 φ zu $\psi \in L(Y,E)$ fortsetzbar. □

4

Wir kehren zurück zu dem Problem der Exaktheit tensorierter Sequenzen. Sei $a = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ wieder eine unendliche Matrix mit $0 \le a_{j,k} \le a_{j,k+1}$, $\sup_k a_{j,k} > 0$ für alle j,k.
Wir setzen

$$\lambda(a) = \{(\xi_1,\xi_2,\ldots) \mid \sum_j |\xi_j| a_{j,k} < +\infty \text{ für alle } k\}$$
$$\mu(a) = \{(\xi_1,\xi_2,\ldots) \mid \lim_j |\xi_j| a_{j,k} = 0 \text{ für alle } k\}$$

Mit den Halbnormen $||\xi||_k = \sum_j |\xi_j| a_{j,k}$ bzw. $||\xi||_k = \sup_j |\xi_j| a_{j,k}$ versehen sind $\lambda(a)$ bzw. $\mu(a)$ (F)-Räume. Sie fallen zusammen genau dann, wenn einer von beiden (und damit beide) nuklear ist. Dies ist äquivalent zu dem folgenden Kriterium (Grothendieck-Pietsch- Kriterium): Zu jedem k existiert ein p, so daß
$$\sum_j \frac{a_{j,k}}{a_{j,k+p}} < +\infty.$$

Lemma 4.1 *Durch $< \eta, \xi >= \sum_j \eta_j \xi_j$ für $\eta \in Q(a)$, $\xi \in \mu(a)$ ist $\mu(a)'_b \cong Q(a)$.*

Beweis: Daß auf die genannte Weise ein algebraischer Isomorphismus hergestellt wird ist leicht zu sehen. Beide Topologien erzeugen dann dieselben beschränkten Mengen und sind bornologisch. $Q(a)$ nach Definition, $\mu(a)'_b$

nach [1, S. 401 und S. 403]. Hierbei wird benutzt, daß $\mu(a)'_b$ separabel ist. Dies folgt daraus, daß ersichtlich $Q(a)$ separabel ist und die Topologie von $Q(a)$ feiner ist als die von $\mu(a)'_b$. $\square$

Der folgende Satz enthält nun unser Hauptresultat über die Exaktheit der tensorierten Sequenz.

Satz 4.2 *Ist* $0 \longrightarrow F \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{q} H \longrightarrow 0$ *eine exakte Sequenz nuklearer* (F)*-Räume,* F *Quotient eines Raumes* $\mu(a)$*, wo* a *der Bedingung* $(*)$ *bzw.* $(*_f)$*, genügt, ist weiter* E *ein vollständiger lokalkonvexer Raum mit einem abzählbaren Fundamentalsystem beschränkter Mengen, das der Bedingung* (A) *(bzw.* (A_f)*) genügt, dann ist auch die Sequenz*

$$0 \longrightarrow F\hat{\otimes}_\pi E \xrightarrow{\iota\otimes\mathrm{id}} G\hat{\otimes}_\pi E \xrightarrow{q\otimes\mathrm{id}} H\hat{\otimes}_\pi E \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis: Nach Voraussetzung und 4.1 ist F' isomorph einem nuklearen Unterraum von $Q(a)$, der nach 2.10 (1) stufenweise projiziert ist. Die Sequenz

$$0 \longrightarrow H' \xrightarrow{q^\tau} G' \xrightarrow{i^\tau} F' \longrightarrow 0$$

erfüllt also die Voraussetzung von 3.9. Aus 3.9 und 1.1 erhalten wir die Behauptung. $\square$

Die Räume vom Typ (A) lassen sich darüber hinaus durch die Aussage von 4.2 charakterisieren, d.h. sie sind exakt diejenigen vollständigen (DF)-Räume (bzw. allgemeiner: vollständige lokalkonvexe Räume mit einem abzählbaren Fundamentalsystem beschränkter Mengen), die die in 4.2 beschriebenen Sequenzen bei Tensorierung exakt lassen. Dies folgt unter andererm aus [4, Satz 3.5]. Dort wird gezeigt, daß (A) für einen vollständigen (DF)-Raum E äquivalent ist zu der Lösbarkeit von $\frac{\partial}{\partial \bar z} f = g$ in $C^\infty(\mathbb{R}^2, E)$ für jede rechte Seite. Mit anderen Worten: (A) ist äquivalent dazu, daß die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial \bar z}} C^\infty(\mathbb{R}^2) \longrightarrow 0$$

bei Tensorierung mit E exakt bleibt.

Auf der Grundlage einer ähnlichen Beweisidee wie in [4, Satz 3.5], zeigen wir, daß eine ganze Klasse surjektiver Abbildungen q die Eigenschaft hat, daß aus der Surjektivität von $q \otimes \mathrm{id}_E$ die Eigenschaft (A) für E folgt. Wir verwenden dabei das folgende Lemma, das im wesentlichen in [4, (3.1 mit 3.1')] bewiesen ist, wobei eine leichte Abschwächung der Voraussetzung (existiert ... B in E und $\varepsilon > 0$) mit Hilfe des Schlusses (3) $\Longrightarrow$ (4) im Beweis von [4, 3.1] erhalten wird.

Lemma 4.3 *E hat die Eigenschaft (A) genau dann, wenn eine absolutkonvexe, beschränkte Menge B in E und $\varepsilon > 0$ existiert, so daß es zu jedem $x \in X$ ein $k \in \mathbb{N}$ und $C > 0$ gibt mit*

$$x \in rB + \frac{C}{r^{\varepsilon}} B_k$$

für alle $r > 0$.

Ist $a = (a_{j,k})_{j,k \in \mathbb{N}}$ unendliche Matrix wie oben, so setzen wir

$$\lambda(a, E) = \{(x_1, x_2, \ldots) \in E^{\mathbb{N}} \mid \quad \forall\, k \;\; \exists\, \nu(k) : \sum_j ||x_j||_{\nu(k)} a_{j,k} < +\infty\}.$$

Die $||\ ||_{\nu}$ sind hier wieder die Normen zu $B_\nu \subset E$, wo die B_ν ein Fundamentalsystem beschränkter Mengen in E bilden.
Wir bezeichnen a als Typ $(\underline{\mathrm{A}})$-Matrix, falls ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß es zu jedem $k \geq k_0$ ein $p \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $C > 0$ gibt mit

$$a_{j,k}^{1+\varepsilon} \leq C a_{j,k_0}^{\varepsilon} a_{j,k+p}$$

a ist eine Typ $(\underline{\mathrm{A}})$-Matrix genau dann, wenn $\lambda(A)$ die Eigenschaft $(\underline{\mathrm{DN}})$ (s. [6], [8]) hat. Können die $\varepsilon = 1$ gewählt werden, so hat $\lambda(a)$ die Eigenschaft (DN) und $\lambda'(a)$ die Eigenschaft (A) (s. [4], [5]).

Lemma 4.4 *Existiert eine Typ $(\underline{\mathrm{A}})$-Matrix (a) sowie Koeffizienten $\lambda_{j,}$, $j, k = 1, 2, \ldots$, so daß zu jedem n ein $\mu(n)$ und $C > 0$ existiert mit $|\lambda_{j,k}| \leq C a_{j,\mu(k)}$ für alle j und so daß die durch $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (\sum_j \lambda_{j,k} x_j)_{j=1,2,\ldots}$ definierte Abbildung von $\lambda(a, E)$ nach $E^{\mathbb{N}}$ surjektiv ist, dann hat E die Eigenschaft* (A)*.*

Beweis: Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß (in den vorangegangenen Bezeichnungen) $k_0 = 1$ und $a_{j,k_0} = 1$ für alle j. In diesem Falle existiert ein k_1, so daß $\sup_j a_{j,k_1} = +\infty$, denn andernfalls wäre $\lambda(a) = \ell^1$. aus der Voraussetzung folgt jedoch, daß die $\lambda_{j,k}$ eine stetige surjektive, lineare Abbildung $\lambda(a) \to \omega$ ($\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ der Skalarkörper) definieren. ω wäre Quotient des Banachraums ℓ^1. Dies ist ein Widerspruch. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $k_1 = 2$ ist.
Zu jedem n wählen wir $\mu(n)$ und $C_{1,n}$, so daß $|\lambda_{j,n}| \leq C_{1,n} a_{j,\mu(n)}$ für alle j, so dann zu $\mu(n)$ ein $p(n)$, $\varepsilon(n)$, $C_{2,n}$, so daß $a_{j,\mu(n)}^{1+\varepsilon(n)} \leq C_{2,n} a_{j,\mu(n)+p(n)}$.

Angenommen, E wäre nicht vom Typ (A). Dann könnte keines der B_n (mit keinem $\varepsilon > 0$) die für B in 4.3 geforderten Eigenschaften haben. Zu jedem n gäbe es also ein $y_n \in \mathbb{E}$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$, $C > 0$ gilt:

$$y_n \notin \bigcap_{r>0} (rB_n + \frac{C}{r^{\varepsilon(n)}} B_k)$$

Nach Voraussetzung existiert zur Folge $(y_1, y_2, \ldots) \in E^{\mathbb{N}}$ eine Folge $(x_1, x_2, \ldots) \in \lambda(a, E)$, so daß

$$y_n = \sum_j \lambda_{j,n} x_j$$

für alle n.
Wir wählen nun ein festes n, so daß $\sum_{j=1}^{\infty} ||x_j||_n =: M_1 < +\infty$ und setzen $\mu = \mu(n)$, $C_1 = C_{1,n}$, $p = p(n)$, $\varepsilon = \varepsilon(n)$, $C_2 = C_{2,n}$. Weiter finden wir k, so daß $\sum_{j=1}^{\infty} ||x_j||_k a_{j,\mu+p} =: M_2 < +\infty$.
Wir setzen für $r > 0$: $J'_r = \{j \mid a_{j,\mu} < r\}$, $J''_r = \{j \mid a_{j,\mu} \geq r\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
||y_n - \sum_{j \in J'_r} \lambda_{j,n} x_j||_k &\leq \sum_{j \in J''_r} ||x_j||_k |\lambda_{j,n}| \\
\leq C_1 \sum_{j \in J''_r} a_{j,\mu} &\leq \frac{C_1}{r^{\varepsilon}} \sum_j ||x_j||_k a_{j,\mu}^{1+\varepsilon} \\
&\leq \frac{C_1 C_2}{r^{\varepsilon}} \sum_j ||x_j||_k a_{j,\mu+p} \\
&\leq \frac{C_1 C_2 M_2}{r^{\varepsilon}}, \\
|| \sum_{j \in J'_r} \lambda_{j,n} x_j||_n &\leq \sum_{j \in J'_r} ||x_j||_n |\lambda_{j,n}| \\
\leq C_1 \sum_{j \in J'_r} ||x_j||_n a_{j,\mu} &\leq r C_1 \sum_j ||x_j||_n \\
&\leq r C_1 M_1.
\end{aligned}$$

Es ist also

$$y_n \in r(C_1 M_1) B_n + \frac{C_1 C_2 M_2}{r^{\varepsilon}} B_k$$

für alle $r > 0$ oder auch, da $\varepsilon = \varepsilon(n)$ war,

$$y_n \in \bigcap_{r>0} (rB_n + \frac{C}{r^{\varepsilon(n)}} B_k)$$

mit $C = C_1^{1+\varepsilon} C_2 M_1^{\varepsilon} M_2$. Das steht im Widerspruch zur Wahl von y_n. $\square$

Eine wichtige Klasse von Typ ($\underline{\mathrm{A}}$)-Matrizen bilden die zu Potenzreihenräumen gehörigen, d.h. die Matrizen der Form $a_{j,k} = \alpha_j \, \rho_k$, wo $\rho \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ $0 < \rho_1 < \rho_2 \ldots \nearrow \rho$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ mit $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \nearrow +\infty$. Der zugehörige Raum $\lambda(a)$ heißt Potenzreihenraum (von endlichem Typ für $\rho < +\infty$, von unendlichem Typ für $\rho = +\infty$) und wird mit $\Lambda_\rho(\alpha)$ bezeichnet. In dem folgenden Satz könnte statt $\Lambda_\rho(\alpha)$ auch ein beliebiger nuklearer Raum $\lambda(a)$ mit Typ ($\underline{\mathrm{A}}$)-Matrix stehen, wir formulieren jedoch den wichtigsten Spezialfall.

Proposition 4.5 *Existiert ein nuklearer Potenzreihenraum $\Lambda_\rho(\alpha)$ und eine stetige, surjektive, lineare Abbildung $u \colon \Lambda_\rho(\alpha) \longrightarrow \omega$, so daß auch $u \otimes \mathrm{id}_E \colon \Lambda_\rho(\alpha) \hat{\otimes}_\pi E \longrightarrow \omega \hat{\otimes}_\pi E$ surjektiv ist, so hat E die Eigenschaft* (A).

Beweis: Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus 4.4, wenn man beachtet, daß u in der in 4.4 beschriebenen Weise durch eine Matrix $\lambda_{j,n}$ gegeben wird, daß unter der Nuklearitätsvoraussetzung an $\lambda(a) = \Lambda_\rho(\alpha)$ gilt $\lambda(a) \hat{\otimes}_\pi E \cong \lambda(a, E)$ und immer $\omega \hat{\otimes} E \cong E^{\mathbb{N}}$ und daß bei diesem Isomorphismus $u \otimes \mathrm{id}_E$ der durch die Matrix $\lambda_{j,n}$ gegebenen Abbildung entspricht. $\square$

Die folgende Definition faßt die in 4.2 genannten Voraussetzungen an die Sequenz in einem Begriff zusammen. Zu einer Diskussion dieses Begriffs siehe §5.

Definition 4.6 *Eine $(*)$-Sequenz ist eine exakte Sequenz*
$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$ *nuklearer (F)-Räume, so daß F Quotient eines Raumes $\mu(a)$ ist, wo $a = (a_{j,k})$ der Bedingung*

$$(*) \qquad a_{j,k}^2 \geq a_{j,k-1} a_{j,k+1}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ genügt.

Wir erhalten dann

Satz 4.7 *Ein vollständiger lokalkonvexer Raum mit abzählbarem Fundamentalsystem beschränkter Mengen hat genau dann die Eigenschaft* (A), *wenn für jede $(*)$-Sequenz $0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$ die tensorierte Sequenz $0 \longrightarrow F \hat{\otimes}_\pi E \longrightarrow G \hat{\otimes}_\pi E \longrightarrow H \hat{\otimes}_\pi E \longrightarrow 0$ exakt ist.*

Beweis: Die eine Richtung ist 4.2, die andere folgt aus 4.5 unter Beachtung der Tatsache, daß eine $(*)$-Sequenz

$$0 \longrightarrow s \longrightarrow s \longrightarrow \omega \longrightarrow 0$$

existiert (s. [5]). Hierbei ist $s = \Lambda_\infty(\alpha)$ mit $a_j = \log j$. $\square$

5

Die Praktikabilität und Anwendbarkeit des Tensorierungssatzes 4.2 bzw. 4.7 beruht im wesentlichen darauf, daß viele in der Analysis auftretenden Abbildungen zwischen nuklearen (F)-Räumen zu $(*)$-Sequenzen führen. Dies motiviert die (in 4.7 gelöste) Problemstellung, die Klasse derjenigen (DF)-Räume zu bestimmen, welche $(*)$-Sequenzen bei Tensorierung exakt lassen. Daß viele in der Analysis auftretenden exakte Sequenzen $(*)$-Sequenzen sind, hängt wiederum damit zusammen, daß sehr viele bekannte nukleare (F)-Räume Quotienten von s, des Raumes der schnell fallenden Folgen sind. Es bestand daher eine Zeitlang die Vermutung (*Martineausche Vermutung*, s. [2]), daß alle nuklearen (F)-Räume Quotienten von s seien. Diese Vermutung wurde inzwischen negativ entschieden (s. [7]), die Quotienten von s (in [7]) durch interne Bedingungen charakterisiert. Aus diesen folgt unter anderem, daß jeder nukleare (F)-Raum, der Quotient eines $\lambda(a)$, a erfüllt $(*)$, ist, auch Quotient von s ist.
Nicht alle exakten Sequenzen nuklearer (F)-Räume sind also $(*)$-Sequenzen. Es bleibt zu klären, welche (DF)-Räume alle exakten Sequenzen nuklearer (F)-Räume bei Tensorierung exakt lassen. Das folgende Verfahren ist analog zu [7, §3].
Sei dazu wieder $f\colon |0,+\infty| \longrightarrow |0,+\infty|$ eine monoton wachsende Funktion mir $f(r) > 0$ für $r > 0$ und $\lim_{r\to+\infty} f(r) = +\infty$. Eine Matrix $a = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$, $0 \le a_{j,k} \le a_{j,k+1}$, $\sup_k a_{j,k} > 0$ nennen wir Typ (A_f)-Matrix, falls ein k_0 existiert, so daß $a_{j,k_0} > 0$ für alle j und so daß es zu jedem $k > k_0$ ein p und $C > 0$ gibt mit

$$f(\frac{a_{j,k}}{a_{j,k_0}}) \le C\frac{a_{j,k+p}}{a_{j,k}}.$$

Wir modifizieren Definition 3.6: Der vollständige bornologische (DF)-Raum E hat die Eigenschaft (a_f), wenn eine absolutkonvexe, beschränkte Menge B in E existiert, so daß es zu jedem k ein p und $C > 0$ gibt mit

$$B_k \subset C(rB + \frac{1}{f(r)}B_{k+p})$$

für alle $r > 0$.

(A_f) implizert (a_f) und für $f(x) = x$ stimmen die Bedingungen überein. Wir benötigen das folgende Analogon zu 4.3, das auch genauso bewiesen wird.

Lemma 5.1 *E hat die Eigenschaft (a_f), genau dann, wenn eine absolut-konvexe, beschränkte Menge B in E existiert, so daß es zu jedem $x \in E$ ein $k \in \mathbb{N}$, $C > 0$ gibt mit*

$$x \in C(rB + \frac{1}{f(r)} B_k)$$

für alle $r > 0$.

Wir erhalten dann analog zu 4.4:

Lemma 5.2 *Existiert eine Typ (A_f)-Matrix a, sowie Koeffizienten $\lambda_{j,k}$, $j, k = 1, 2, \ldots$, so daß zu jedem n ein $\mu(n)$ und $C > 0$ existiert mit $|\lambda_{j,n}| \leq C a_{j,\mu(n)}$ für alle j und so daß die durch $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (\sum_j \lambda_{j,k} x_j)_{k \in \mathbb{N}}$ definierte Abbildung $\lambda(a, E) \longrightarrow E^{\mathbb{N}}$ surjektiv ist, dann hat E die Eigenschaft (a_f).*

Beweis: Man verfährt wie in 4.4 mit folgenden Modifikationen:

1. Zu $\mu(n)$ wird $p(n)$, $C_{2,n}$ so gewählt, daß $f(a_{j,\mu(n)}) \leq C_{2,n} \frac{a_{j,\mu(n)+p(n)}}{a_{j,\mu(n)}}$
2. Für alle $k \in \mathbb{N}$, $C > 0$ gilt:
$$y_n \notin C \bigcap_{r>0} (rB + \frac{1}{f(r)} B_k)$$
3. Man beachte, daß für $j \in J''_r : a_{j,\mu} \leq \frac{1}{f(r)} a_{j,\mu} f(a_{j,\mu}) \leq \frac{C}{f(r)} a_{j,\mu+p}$.

□

Die für das folgende benötigten Testsequenzen bzw. Testräume liefert uns das folgende Lemma.

Lemma 5.3 *Zu jedem f existiert eine Typ (A_f)-Matrix a, so daß $\sum_j \frac{a_{j,k}}{a_{j,k+1}} < +\infty$ für alle k.*

Beweis: Wir setzen $a_{j,1} = 1$ für alle j. Ist $a_1, \ldots, a_k$ gewählt, $a_k = (a_{j,k})_{j \in \mathbb{N}}$, so bestimmen wir die $a_{j,k+1}$ dergestalt, daß

(1) $a_{j,k} f(a_{j,k}) \leq a_{j,k+1}$ für alle j

(2) $\sum_j \frac{a_{j,k}}{a_{j,k+1}} < +\infty$.

□

Wir formulieren die Eigenschaft (a_f) in elementarer Weise um (vgl. [4, 3.1']).

Bemerkung 5.4 *E hat die Eigenschaft* (a_f) *genau dann, wenn ein* $n \in \mathbb{N}$ *existiert, so daß es zu jedem* $k \in \mathbb{N}$ *ein* $p \in \mathbb{N}$ *gibt mit*

$$\sup_{r>0}(f(r) \sup_{y\in B_k} \inf_{x\in rB_n} ||x-y||_{k+p}) < +\infty$$

Wir erhalten also:

Lemma 5.5 *Ist E ein vollständiger lokalkonvexer Raum mit einem abzählbaren Fundamentalsystem beschränkter Mengen* $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$, *so daß kein* k_0 *existiert derart, daß es zu jedem k ein* $C_k > 0$ *gibt mit* $B_k \subset C_k B_{k_0}$, *dann gibt es ein f, so daß E die Eigenschaft* (a_f) *nicht hat.*

Beweis: Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß B_n nicht B_{n+1} absorbiert für alle n. Für $n, p \in \mathbb{N}$, $r > 0$ setzen wir

$$G_{n,p}(r) = \sup_{y\in B_{n+1}} \inf_{x\in rB_n} ||x-y||_{n+p}$$

Die $G_{n,p}$ sind strikt positive, monoton fallende Funktionen auf $(0, +\infty)$. Wir wählen eine monoton wachsende Funktion $f\colon [0, +\infty] \longrightarrow [0, +\infty]$, so daß für alle n, p $\sup_{r>0} f(r)G_{n,p}(r) = +\infty$. Nach obiger Bemerkung hat E nicht die Eigenschaft (a_f). $\square$

Mit Hilfe dieser Vorbereitungen können wir das zu Anfang dieses Abschnitts gestellte Problem lösen.

Satz 5.6 *Ist E ein vollständiger lokalkonvexer Raum mit einem abzählbaren Fundamentalsystem beschränkter Mengen. Dann sind äquivalent*

(1) Für jede exakte Sequenz $0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$ *nuklearer* (F)*-Räume ist auch die tensorierte Sequenz*
$0 \longrightarrow F\hat{\otimes}_\pi E \longrightarrow G\hat{\otimes}_\pi E \longrightarrow H\hat{\otimes}_\pi E \longrightarrow 0$ *exakt.*

(2) E besitzt eine absolutkonvexe beschränkte Menge die alle beschränkten Mengen absorbiert (d.h. ein Fundamentalsystem aus einer beschränkten Menge).

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (2): Wir nehmen an (2) wäre nicht erfüllt und wählen ein f gemäß 5.5, d.h. E hat die Eigenschaft (a_f) nicht. Zu f finden wir eine Typ (A_f)-Matrix a, so daß $\lambda(a)$ nuklear ist (s. 5.3), und eine surjektive Abbildung $\lambda(a) \longrightarrow \omega$. Nach Voraussetzung ist $\lambda(A)\hat{\otimes}_\pi E \longrightarrow \omega \otimes_\pi E$ surjektiv. Wir schließen dann wie im Beweis von 4.5 unter Verwendung von 5.2, daß E die Eigenschaft (a_f) hat. Dies widerspricht der Wahl von f.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Ist B diese beschränkte Menge, B abgeschlossen, dann ist als linearer Raum $E = E_B$. E_B ist Banachraum. Für den nuklearen (F)-Raum H gilt $L(H', E) = L(H', E_B)$, denn H' ist bornologisch. Die Behauptung folgt dann aus 1.1 und der Exaktheit der mit E_B tensorierten Sequenz. $\square$

Die in (2) genannte Bedingung bedeutet keineswegs, daß E ein Banachraum ist, wie das Beispiel $H^\infty(D)$ mit der strikten Topologie zeigt. Ist allerdings E zusätzlich etwa quasitonneliert, so ist E Banachraum.

Literatur

[1] G. Köthe, Topologische lineare Räume I, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966

[2] A. Martineau, Sur une propriété universelle de l'espace des distributions de M. Schwartz, C.R. Acad, Sci. Paris **259** (1964), 3162-3164

[3] A. Pietsch, Nukleare lokalkonvexe Räume, Berlin: Akademie-Verlag 1969

[4] D. Vogt, Vektorwertige Distributionen als Randverteilungen holomorpher Funktionen, manuscripta math. **17** (1975), 267–290

[5] D. Vogt, Charakterisierung der Unterräume von s, Math. Z. **155** (1977), 109–117

[6] D. Vogt, Charakterisierung der Unterräume eines nuklearen stabilen Potenzreihenraumes von endlichem Typ, Studia Math. **71** (1982), 251–270

[7] D. Vogt, M. J. Wagner, Charakterisierung der Quotienträume von s und eine Vermutung von Martineau, Studia Math. **67** (1980), 225–240

[8] M. J. Wagner, Unterräume und Quotienten von Potenzreihenräumen, Dissertation, Wuppertal 1977