

Übung (5)

1. Betrachten Sie die quadratische Form $q(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - z^2 + 4xz$ und dazu die Quadrik Q , welche durch die Bestimmungsgleichung $q(x, y, z) = -1$ gegeben ist, also $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid q(x, y, z) = -1 \right\}$.

(a) Geben Sie eine symmetrische Matrix B an, so dass $\vec{x}^T B \vec{x} = q(x, y, z)$ für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von B . Schreiben Sie damit die Gleichung $q(x, y, z) = -1$ in den neuen Koordinaten $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ bezüglich eines entsprechenden Orthonormalsystems von Eigenvektoren von B (dazu benötigen Sie keine Kenntnis dieser Eigenvektoren(!)). Was können Sie nunmehr direkt über die geometrische Gestalt von Q sagen?

2. Welche der folgenden Matrizen sind positiv definit, negativ definit, indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

3. Es sei $A_p = \begin{pmatrix} -3 & p \\ p & -2 \end{pmatrix}$, $p \in \mathbb{R}$. Wir betrachten dazu folgende zwei Fragen: (i) Was für eine Art Quadrik ist $\vec{x}^T A_p \vec{x} = 1$? (ii) Liegt in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Extremum des Skalarfeldes $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A_p \vec{x}$ vor? **Hinweis:** Treffen Sie eine geeignete Fallunterscheidung, dann beantworten Sie jeweils für jeden der Fälle beide Fragen auf einen Schlag - was haben alle miteinander zu tun, und worauf allein kommt es an?

4. Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} + x^2 + y^2 + 2xy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Warum kommt $(0, 0)$ als Extremstelle von f in Betracht? Prüfen Sie nach, ob dort ein Extremum vorliegt.

(b) Warum ist $(0, 0)$ der einzige Kandidat für Extrema von f ?

5. Betrachten Sie die DGL $x''(t) + 4x'(t) + x(t) = 0$.

(a) Klassifizieren Sie die DGL.

(b) Führen Sie Reduktion auf 1. Ordnung durch.

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung der reduzierten DGL mittels Eigenwert-Eigenvektor-Methode. Schreiben Sie nunmehr auch die allgemeine Lösung der ursprünglichen Gleichung 2. Ordnung auf.

(d) Geben Sie die spezielle Lösung y mit $y(1) = 2$, $y'(1) = 2$. (Verfahren Sie geschickt, denken Sie daran, die allgemeine Lösung dafür bequemer zu parametrisieren.)

6. Betrachten Sie die DGL $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

(a) Klassifizieren Sie diese DGL.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung der DGL mittels Eigenwert-Eigenvektor-Methode.