

Übung (4)

1. Berechnen Sie $\left| \begin{pmatrix} 1+j \\ 2-j \\ 3+j \end{pmatrix} \right|$. Stellen Sie fest, ob $\begin{pmatrix} 1+j \\ 2-j \\ 3+j \end{pmatrix}$ senkrecht zu $\begin{pmatrix} -3+j \\ 0 \\ 1-j \end{pmatrix}$ steht.
2. Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$.
 - (a) Berechnen Sie auch eine Diagonalmatrix D und eine Transformationsmatrix T , so dass $D = T^{-1}AT$. (Kontrolle: Einen Eigenwert kann man direkt sehen, denken Sie an A^T , welchen?)
 - (b) Nutzen Sie die Gleichung $D = T^{-1}AT$, um leicht A^n allgemein für $n \in \mathbb{N}$ auszurechnen. Hinweis: Lösen Sie die Gleichung nach A auf, und denken Sie daran, dass D^n leicht auszurechnen ist.
 - (c) Bestimmen Sie mit $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$. Hinweis: Eine Folge von Matrizen konvergiert gegen eine Grenzmatrix genau dann, wenn sie das für jede einzelne Komponente tut. Außerdem gilt wegen der Stetigkeit der Matrizenmultiplikation: $\lim_{n \rightarrow \infty} (UB_nV) = U(\lim_{n \rightarrow \infty} B)V$ für feste Matrizen U, V .
 - (d) *) Deuten Sie den Limes aus c wahrscheinlichkeits-theoretisch - denken Sie sich ein System von Objekten, die jeweils in genau einem von zwei Zuständen sind und innerhalb einer festen Zeitspanne vom Zustand i ($i = 1, 2$) mit der Wahrscheinlichkeit a_{ji} in den Zustand j ($j = 1, 2$) wechseln. - Welche Fragestellung liegt dann nahe?
3. (a) Warum sind die Eigenwerte der Matrix $C = \begin{pmatrix} 2 & 1+j \\ 1-j & -1 \end{pmatrix}$ reell? Geben Sie die Antwort ohne Kenntnis der Eigenwerte. Was wissen Sie noch vorab über die Diagonalisierbarkeit von C ?
 - (b) Rechnen Sie eine Diagonalmatrix D und eine unitäre Transformationsmatrix S aus, so dass $D = S^*AS$.
 - (c) Gibt es auch nicht unitäre Transformationsmatrizen T , so dass $D = T^{-1}AT$?
4. Betrachten Sie die Matrix $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{6}j & \frac{1}{6}\sqrt{6} + \frac{1}{3}\sqrt{6}j \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} - \frac{1}{3}\sqrt{6}j & \frac{1}{6}\sqrt{6}j \end{pmatrix}$.
 - (a) Wie kann man sofort sehen, dass U nicht Hermitesch ist?
 - (b) Rechnen Sie nach, dass U unitär ist.
 - (c) Berechnen Sie $\det(U)$ - welche Werte kommen von vornherein dafür nur in Frage?
 - (d) Wie kann man sofort die Inverse von U angeben? (Tun Sie das auch.)
5. Betrachten Sie die quadratische Form $q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 - 2y^2 + 4xy$ und dazu die Quadrik Q , welche durch die Bestimmungsgleichung $q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 1$ definiert ist. Also $Q = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid q(\vec{x}) = 1 \}$
 - (a) Beschreiben Sie q durch eine symmetrische Matrix B (so dass also $\vec{x}^T B \vec{x} = q(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$) - Hinweis: B können Sie direkt am Ausdruck für q ablesen.
 - (b) Berechnen Sie die Eigenwerte von B , schreiben Sie die Gleichung für Q in neuen Koordinaten bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis auf, die man nicht einmal kennen muss, und entscheiden Sie damit, welche geometrische Gestalt Q hat.
 - (c) Berechnen Sie auch eine Basis von Eigenvektoren von B . Was können Sie nunmehr zusätzlich zur Lage von Q sagen? (Wie liegt die Achse von Q in der xy -Ebene?)
6. Zeigen Sie, dass $A^T A$ stets nur positive Eigenwerte hat. Hinweis: Benutzen Sie den 'Wälzmechanismus', damit ist das sehr einfach.