Übung (3)

1. Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Eigenwerte von A, und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist (ohne eine Diagonalisierung durchzuführen (!)). Achten Sie bei der Berechnung der Eigenwerte darauf, eine Null zu schaffen, Faktoren aus Determinanten hinauszusetzen und das charakteristische Polynom direkt in einen Linearfaktor (mal ein quadratisches Polynom) aufzuspalten.

2. (a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, allgemein für $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Für welche Werte von α ist A_α diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ / diagonalisierbar über $\mathbb{C}$, jedoch nicht über $\mathbb{R}$ / nicht diagonalisierbar? (Ihre Antworten sollten jeweils begründet werden.)

   (c) Geben Sie für die diagonalisierbaren Fälle jeweils allgemein D_α und T_α an, so dass $D_\alpha = T_\alpha^{-1} A_\alpha T_\alpha$. Hinweis: Schreiben Sie das auch für die Fälle der Diagonalisierbarkeit über $\mathbb{C}$ in Endform. Hinweis: Rechnen Sie für die benötigten Eigenvektoren abstrakt mit Eigenwert λ, setzen Sie dann erst in das allgemeine Resultat ein.

3. Wie können Sie recht schnell entscheiden, ob die Matrix $B = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & -j & 1+j \\ 0 & -1 & 1+j \end{pmatrix}$ diagonalisierbar ist? (Hinweis: Sie gelangen schnell zu den Eigenwerten - beachten Sie, dass Sie sofort einen Linearfaktor vom charakteristischen Polynom abspalten können. (Die Durchführung der Diagonalisierung ist nicht verlangt!)

4. Die folgende Matrix $B = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 58 & 20 & 4 \\ 20 & 67 & 5 \\ 4 & 5 & 43 \end{pmatrix}$ hat 1 als Eigenwert. (Benutzen Sie das natürlich.)

   (a) Berechnen Sie den Eigenraum zum Eigenwert 1 (vermeiden Sie Brüche im Gleichungssystem!), und geben Sie dafür eine Basis an. Auf welche Weise haben Sie damit noch einmal eine unabhängige Bestätigung, dass 1 ein Eigenwert von B ist?

   (b) Finden Sie unter Ausnutzen der Besonderheit von B eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von B, und finden Sie darüber auch einen zweiten Eigenwert (Hinweis: Sie können vom Vektorprodukt Gebrauch machen, um einen Eigenvektor außerhalb des Eigenraums zum Eigenwert 1 zu finden.) . Geben Sie damit eine orthogonale Matrix S und eine Diagonalmatrix D an, so dass $S^T BS = D$.

   (c) Geben Sie auch eine Transformationsmatrix T an, deren Spalten keine Orthogonalbasis bilden, so dass $D = T^{-1}BT$.

5. Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. In welcher Menge von Zahlen müssen reelle Eigenwerte von A liegen? Wie sähe das für etwaige komplexe Eigenwerte aus? (Stichwort: Gerschgorin-Kreise)

6. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar (man kann also eine Basis von Eigenvektoren benutzen). Sei α der maximal auftretende Betrag bei den Eigenwerten von A.Rechnen Sie nach, dass für jeden Vektor $\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^n$ gilt: $\left|A\overrightarrow{\mathbf{x}}\right| \leq \alpha \left|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right|$.

7. Sei A diagonalisierbar und invertierbar. Folgt daraus, dass auch A^{-1} diagonalisierbar ist? Kennt man auch sofort die Eigenwerte von A^{-1},wenn man die von A kennt? Findet man leicht eine Basis von Eigenvektoren, wenn man eine solche für A kennt?