Übung (2)

1. Berechnen Sie $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, indem Sie ausgiebig das Cavalieri-Prinzip verwenden, so dass fast nichts mehr zu tun bleibt.

2. Drücken Sie jeweils die Determinante in der verlangten Form aus - nutzen Sie die algebraischen Eigenschaften von det:

   (a) Betrachten Sie (hier steht die Matrix als Folge von drei Spaltenvektoren) $\det\left(\vec{\mathbf{a}}_1 + \vec{\mathbf{a}}_2, 2\vec{\mathbf{a}}_1 + 3\vec{\mathbf{a}}_3, 4\vec{\mathbf{a}}_2 - 5\vec{\mathbf{a}}_3\right)$, $\vec{\mathbf{a}}_i \in \mathbb{R}^3$ für $i = 1, 2, 3$. (Vereinfachen Sie zu einem Ausdruck in $\det\left(\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \vec{\mathbf{a}}_3\right)$.)

   (b) Es sei $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ und $\det(A) = d$. Berechnen Sie möglichst schnell, d.h. drücken Sie in d aus:

   $$\det\begin{pmatrix} b_1 - 2c_1 & b_2 - 2c_2 & b_3 - 2c_3 \\ 2c_1 - 3a_1 & 2c_2 - 3a_2 & 2c_3 - 3a_3 \\ 5a_1 + 2b_1 & 5a_2 + 2b_2 & 5a_3 + 2b_3 \end{pmatrix}.$$

   Hinweis: Es ist zweckmäßig, letztere Determinante in der Form wie bei Aufg. 2a aufzuschreiben, verwenden Sie $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ für die Spaltenvektoren von A und ggfs. $\vec{\mathbf{a}}^T$ usw.

3. (a) Berechnen Sie folgende Determinante (vereinfachen Sie stark mit Cavalieri und Herausziehen von Faktoren (!)):

   $$\det\begin{pmatrix} \sin(t) & -\cos(t) \\ 1 + \tan^2(t) - \sin(t) & \tan(t)\left(1 + \tan^2(t)\right) + \cos(t) \end{pmatrix}$$

   Für welche Werte von t wird der Wert der Determinante Null, und für welche ist er nicht definiert?

   (b) Berechnen Sie ebenso praktisch (allg. Multilinearität - hier nur Bilinearität von det in den Spalten):

   $$\det\begin{pmatrix} \sin(t) + \cos(t) & -2\cos(t) \\ \cos(t) + 2\sin(t) & -4\sin(t) \end{pmatrix}.$$

   Für welche Werte von t erhält diese Determinante den Wert Null?

4. (a) Wie können Sie fast ohne Rechnung erkennen, dass die Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ nicht diagonalisierbar ist? Was kann man sofort über die Diagonalisierbarkeit von $U = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sagen? ('Fast ohne Rechnung' heißt: Die Eigenwerte liest man zusamt ihren algebraischen Vielfachheiten nur ab, die geometrischen Vielfachheiten liest man über die Ränge der betreffenden Matrizen ebenfalls direkt ab.)

   (b) i. Für welche Werte von $b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A_b = \begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ / diagonalisierbar über $\mathbb{C}$, aber nicht über $\mathbb{R}$ / nicht diagonalisierbar? Hinweis: Sie sollten natürlich zu einer geeigneten Fallunterscheidung bzgl. b gelangen.

   ii. Führen Sie die Diagonalisierung in den funktionierenden Fällen auch durch, d.h. geben Sie dafür jeweils eine Diagonalmatrix D_b sowie eine Transformationsmatrix T_b an, so dass $D_b = T_b^{-1} A_b T_b$.

   (c) Berechnen Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T, so dass $D = T^{-1}\begin{pmatrix} 1+j & j \\ -2 & 1+j \end{pmatrix} T$.

5. Betrachten Sie Formel zum Basiswechsel (in Matrixform abstrakt) $B = T^{-1}AT$. Benutzen Sie die Formel, um zu zeigen: Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar ist, so auch A^T. Können Sie auch die Eigenwerte von A^T aus denen von A gewinnen? Zusatzfrage: Wie weitgehend können Sie Analoges auch für A^* mit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ durchführen?