Übung (1)

Bitte, beachten Sie, dass noch etwas auf der zweiten Seite steht.

1. Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Bestimmen Sie möglichst einfach $\dim(Bild(A))$.

   (b) Was folgt für $\dim(Kern(A))$? (Ziehen Sie ausdrücklich einen aus der Vorlesung bekannten Satz heran.)

   (c) Geben Sie $Kern(A)$ an, in Mengenschreibweise und in der Form $\mathbb{R}\vec{\mathbf{a}}_1(+...)$ (Warum ist hier mehr gefragt als in b? Bestätigt sich das Resultat von b unabhängig erneut?) Hinweis: Eliminieren Sie für die Berechnung ein wenig geschickt.

2. Es sei $\vec{\mathbf{x}} = (1,2,3)^T$. Was ist $\vec{\mathbf{x}}^e$ für die Basis $e = \left((1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\right)$? Berechnen Sie nun für die Basis $a = \left((1,0,0)^T, (1,1,0)^T, (1,1,1)^T\right)$ die Koordinatendarstellung $\vec{\mathbf{x}}^a$ (also von $\vec{\mathbf{x}}$ bezüglich der Basis a). Schreiben Sie dazu ein passendes lineares Gleichungssystem auf, und lösen Sie es. Anschließend rechnen Sie eine nützliche inverse Matrix aus (in diesem Falle sehr einfach!) und bestätigen Ihr Resultat damit.

3. Es sei die gebräuchlichste ('kanonische') Basis $e = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2\right)$ des $\mathbb{R}^2$ gegeben. Weiter $M^e\left(\vec{\mathbf{f}}\right) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, also $\vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\vec{\mathbf{x}}$ für alle $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Sei die neue Basis $a = \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2\right)$ des $\mathbb{R}^2$ gegeben. (Warum ist das eine Basis?) Berechnen Sie $\left(\vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{a}}_1\right)\right)^a$ und $\left(\vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{a}}_2\right)\right)^a$, und bestimmen Sie damit die Matrix $M^a\left(\vec{\mathbf{f}}\right)$.

   (b) Berechnen Sie $M^a\left(\vec{\mathbf{f}}\right)$ erneut unter Verwendung von T_e^a und T_a^e (die Sie natürlich angeben sollten). Schreiben Sie dazu eine Gleichung auf, welche erlaubt, $M^a\left(\vec{\mathbf{f}}\right)$ aus $M^e\left(\vec{\mathbf{f}}\right)$ als Produkt von Matrizen auszurechnen, und rechnen Sie dies Matrizenprodukt auch aus.

4. Von einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei bekannt: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Kern(A)$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

   (a) Welchen Rang hat A? Geben Sie eine Basis für $Kern(A)$ und eine Basis für $Bild(A)$.

   (b) Warum ist A mit den Angaben oben bereits eindeutig bestimmt?

   (c) Sei $\vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = A\vec{\mathbf{x}}$. Geben Sie eine Basis a an, so dass Sie $M^a\left(\vec{\mathbf{f}}\right)$ sofort ablesen können.

   (d) Schreiben Sie nunmehr $A(= M^e\left(\vec{\mathbf{f}}\right)$ (!)) als Matrizenprodukt, ohne dies auszurechnen. (Schön wäre es, wenn Sie mittels eines Computerprogramms A ausrechnen könnten.)

5. Sei die $\mathbb{C}^{2\times 2}-$ Matrix gegeben: $B = \begin{pmatrix} 1+j & 4j-1 \\ 2+4j & -7+11j \end{pmatrix}$.

   (a) Welchen Rang (über $\mathbb{C}$, nicht über $\mathbb{R}$ (!)) hat B?

   (b) Geben Sie eine Basis für $Kern(B)$ an. Hinweis: Dazu müssen Sie nur eine (!) Gleichung hinschreiben, eine der Unbestimmten setzen Sie dann mit Wert 1 an, Sie können diese Unbestimmte auch noch geschickt auswählen.

6. Betrachten Sie die Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-j \\ 1+j & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} j & -j \\ 1+j & 1-j \end{pmatrix}$. Berechnen Sie (sehen Sie dabei, was man sofort sehen kann, und rechnen Sie so wenig wie möglich) folgende Matrizen: A^*, B^*, BA, A^*B^*, B^{-1}, $(B^*)^{-1}$. **Beachten Sie: Unsere Definitionen von $\overline{C}$ und C^* sind die allgemein üblichen**, also wird $\overline{C}$ aus C gebildet, indem man jeden Eintrag konjugiert, und $C^* = \left(\overline{C}\right)^T \left(\left[= \left(\overline{C^T}\right)\right]\right.$. Bitte achten Sie auf Endform, also sollte j nirgends in einem Nenner stehen.

7. Zeigen Sie mittels Indexkalküls, dass $\overline{A}\ \overline{B} = \overline{AB}$. Zeigen Sie auch im abstrakteren Matrizenkalkül (der nur mit Buchstaben für ganze Matrizen arbeitet), dass $(AB)^* = B^*A^*$, unter Benutzung von $(AB)^T = B^TA^T$.

8. Koordinatendarstellungen benutzt man nicht nur für Vektoren des $\mathbb{R}^n$ bzw $\mathbb{C}^n$ sondern ebenso in allgemeineren Vektorräumen über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Betrachten Sie den Raum B der Funktionen, die über $\mathbb{C}$ linear erzeugt werden von $f_0(t) = 1,\ f_1(t) = e^{jt},\ f_2(t) = e^{2jt},\ t \in [0, 2\pi)$.

   (a) Beschreiben Sie B als Menge.

   (b) Zeigen Sie, dass die drei genannten Funktionen eine Basis für B bilden. (Hinweis: Zeigen Sie, dass diese Funktionen paarweise orthogonal sind bezüglich des Skalarproduktes $\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\, dt$. Beachten Sie auch, dass für reelle Funktionen $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ gilt: $\int_a^b (x(t) + jy(t)\, dt) = \int_a^b x(t)\, dt + j\int_a^b y(t)\, dt$.). Wie ergibt sich aus den genannten Orthogonalitätseigenschaften die Basiseigenschaft von (f_0, f_1, f_2)?

   (c) Geben Sie die Matrix der Ableitung im Raum B bezüglich der Basis (f_0, f_1, f_2). (Welche Eigenschaft der Ableitung sichert die Existenz dieser Matrix? - Übrigens sind die Ableitungsregeln im Komplexen dieselben wie im Reellen.)