

Lösungen zu Übung (3)

1. Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Wir bilden das charakteristische Polynom von A :

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & \lambda-2 \\ 2 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \quad (\text{nun entwickeln:}) \\ &= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & \lambda-2 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda-2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &\quad (\text{nun Faktor } \lambda-2 \text{ aus beiden Determinanten hinaus}) \\ &= (\lambda-2) \left[(1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= (\lambda-2) ((1-\lambda)(\lambda-3+2) + 9) \\ &= (\lambda-2)(8+2\lambda-\lambda^2) \end{aligned}$$

Wir lesen 2 als ersten Eigenwert ab, mit den Lösungen von

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda - 8 &= 0, \\ \lambda_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3 \end{aligned}$$

haben wir die weiteren Eigenwerte $-2, 4$ und wissen, dass A diagonalisierbar ist, über $\mathbb{R}$ (mit den lauter reellen Eigenwerten); damit haben alle Eigenwerte algebraische Vielfachheit 1, und es kann keine kleinere geometrische Vielfachheit geben.

2. (a) Wir berechnen die Eigenwerte von $A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} p_{A_\alpha}(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & \alpha \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)^2 - 2\alpha, \text{ die Nullstellen sind natürlich} \\ \lambda_{1,2}(\alpha) &= -1 \pm \sqrt{2\alpha} \text{ (hoffentlich haben Sie nicht ausmultipliziert), nun ergibt sich} \\ &\quad \text{die Fallunterscheidung:} \end{aligned}$$

1. Fall : $\alpha > 0$, dann hat man zwei verschiedene reelle Nullstellen $-1 \pm \sqrt{2\alpha}$
2. Fall : $\alpha = 0$, dann hat man nur eine Lösung, -1
3. Fall : $\alpha < 0$, dann bekommt man die komplexen Nullstellen $-1 \pm j\sqrt{-2\alpha}$

(b) Im 1. Fall ist A_α über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar, im 3. Fall über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, nicht jedoch über $\mathbb{R}$. Den Fall $\alpha = 0$ haben wir noch zu prüfen:

$$\begin{aligned} \text{Rang}(A_0 - (-1)E) &= \text{Rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 1, \\ \text{also } \dim \text{Kern}(A_0 + E) &= 1, \text{ also hat der algebraisch doppelte Eigenwert} \\ &\quad -1 \text{ von } A_0 \text{ nur geometrische Vielfachheit 1,} \\ &\quad \text{und } A_0 \text{ ist nicht diagonalisierbar.} \end{aligned}$$

Übrigens hätte man in $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ auch sofort unser Standardbeispiel für Nichtdiagonalisierbarkeit erkennen können.

- (c) Für T_α , $\alpha \neq 0$, rechnen wir nur mit der zweiten Zeile des LGS $(A_\alpha - \lambda E) \vec{x} = \vec{0}$ (warum lieber mit der zweiten?)

$$2x - (1 + \lambda)y = 0$$

und bekommen die Eigenvektoren (setze $y = 2$, damit $x = 1 + \lambda$) im Fall 1:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2\alpha} \\ 2 \end{pmatrix} \text{ Eigenvektor zu } \lambda_1(\alpha),$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2\alpha} \\ 2 \end{pmatrix} \text{ Eigenvektor zu } \lambda_2(\alpha),$$

im Fall 3 entsprechend

$$\begin{pmatrix} j\sqrt{-2\alpha} \\ 2 \end{pmatrix} \text{ Eigenvektor zu } \lambda_1(\alpha),$$

$$\begin{pmatrix} -j\sqrt{-2\alpha} \\ 2 \end{pmatrix} \text{ Eigenvektor zu } \lambda_2(\alpha),$$

Insgesamt haben wir so:

$$\text{Fall 1 } (\alpha > 0) : D_\alpha = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2\alpha} & 0 \\ 0 & -1 - \sqrt{2\alpha} \end{pmatrix}, T_\alpha = \begin{pmatrix} \sqrt{2\alpha} & -\sqrt{2\alpha} \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{Fall 3 } (\alpha < 0) : D_\alpha = \begin{pmatrix} -1 + j\sqrt{-2\alpha} & 0 \\ 0 & -1 - j\sqrt{-2\alpha} \end{pmatrix}, T_\alpha = \begin{pmatrix} j\sqrt{-2\alpha} & -j\sqrt{-2\alpha} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Die Matrix $B = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & -j & 1+j \\ 0 & -1 & 1+j \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom

$$(j - \lambda) \det \begin{pmatrix} -j - \lambda & 1+j \\ -1 & 1+j - \lambda \end{pmatrix} = (j - \lambda) (-(j + \lambda)(j + 1 - \lambda) + 1 + j)$$

$$= (j - \lambda) (\lambda^2 - \lambda + 2),$$

also lauten die Eigenwerte $\lambda_1 = j$,

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}j.$$

Also ist die Matrix diagonalisierbar, wieder mit dem schon öfter angewandten Satz, da wir drei paarweise verschiedene Eigenwerte haben.

4. Die folgende Matrix $B = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 58 & 20 & 4 \\ 20 & 67 & 5 \\ 4 & 5 & 43 \end{pmatrix}$ hat 1 als Eigenwert.

- (a) Für den Eigenraum zum Eigenwert 1 haben wir die Gleichungen (Brüche vermieden!)

$$\begin{aligned} 8x + 10y + 2z &= 0 \\ 20x + 25y + 5z &= 0 \\ 4x + 5y + z &= 0 \end{aligned}$$

Wir haben alle hingeschrieben, um zu sehen, ob vielleicht sogar nur eine stehenbleibt - das ist offensichtlich der Fall. Mit der letzten Gleichung finden wir sofort:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(B) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -4x - 5y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist (es würde durchaus genügen, aus der 'allgemeinen Lösung' $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -4x - 5y \end{pmatrix}$ des LGS diese Basis

für $\mathcal{E}_1(B)$ abzulesen) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis für $\mathcal{E}_1(B)$. Mit dem berechneten Eigenraum der

Dimension 2 haben wir natürlich auch unabhängig eine Bestätigung dafür, dass 1 ein Eigenwert der Matrix ist. Wir beobachten noch: Diese Vektoren der genannten Basis sind nicht einmal orthogonal zueinander (innerhalb der Eigenräume von Dimension >1 können wir auch bei symmetrischen Matrizen beliebige Basen finden!)

(b) Die Besonderheit von B ist deren Symmetrie, also muss $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ebenfalls ein

Eigenvektor sein. Wir rechnen aus: $\begin{pmatrix} \frac{29}{21} & \frac{10}{21} & \frac{2}{21} \\ \frac{10}{21} & \frac{67}{42} & \frac{5}{42} \\ \frac{2}{21} & \frac{5}{42} & \frac{43}{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$, also ist der zweite Eigenwert 2.

Da unsere gefundene Basis für $\mathcal{E}_1(B)$ keine Orthogonalbasis ist, genügt es nicht, nur zu normieren. Nun ist es bequem, auszurechnen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist ein (einfacherer!) Eigenvektor zum Eigenwert 1 und nach Konstruktion senkrecht zu $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, also ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

ein Orthogonalsystem von Eigenvektoren. Wir teilen den letzten noch durch 3 und erhalten (nach Normieren!)

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{2}{14}\sqrt{14} & \frac{4}{42}\sqrt{42} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{14}\sqrt{14} & \frac{5}{42}\sqrt{42} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{3}{14}\sqrt{14} & \frac{1}{42}\sqrt{42} \end{pmatrix}, \text{ damit}$$

$$S^T B S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Man hätte natürlich ebenso mit $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ arbeiten können, nur mit lästigerer Normierung

dann. Man beachte überhaupt: Hier gibt es viele Möglichkeiten. Man könnte auch das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die ersten beiden Vektoren anwenden und fände

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{20}{17} \\ 1 \\ -\frac{5}{17} \end{pmatrix},$$

zweckmäßig nähme man dann : $\begin{pmatrix} -20 \\ 17 \\ -5 \end{pmatrix}$, das ist derselbe Vektor, den man mit $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ bekäme.

(c) Wir haben zuvor bereits gefunden, dass man mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

ebenfalls eine Transformation von B auf Diagonalgestalt erreicht, nur eben keine orthogonale.

5. Reelle Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ müssen liegen in der Zahlenmenge:

$$[1; 5] \cup [-7, -1].$$

Für etwaige komplexe Eigenwerte hätte man

$$Kr(3, 2) \cup Kr(-4, 3),$$

also konkreter

$$\{3 + re^{jt} \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq t < 2\pi\} \cup \{-4 + re^{jt} \mid 0 \leq r \leq 3, 0 \leq t < 2\pi\}.$$

Allerdings sind im Beispiel die Eigenwerte reell.

6. Man hat für eine Basis $(\vec{\mathbf{a}}_1, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n)$ von Eigenvektoren von A , $\vec{\mathbf{a}}_k$ jeweils Eigenvektor zum Eigenwert λ_k , $1 \leq i \leq n$, dass jeder Vektor $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^n$ sich darstellen lässt als

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{\mathbf{a}}_k,$$

also

$$|A\vec{\mathbf{x}}| = \left| A \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{\mathbf{a}}_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k \vec{\mathbf{a}}_k \right| \leq \max_k |\lambda_k| \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{\mathbf{a}}_k \right| = \max_k |\lambda_k| |\vec{\mathbf{x}}|.$$

7. Nach Voraussetzung hat man

$$D = T^{-1}AT.$$

Invertieren auf beiden Seiten ergibt (da A invertierbar ist, hat man auf der rechten Seite eine invertierbare Matrix, und so existiert D^{-1}):

$$D^{-1} = (T^{-1}AT)^{-1} = T^{-1}A^{-1}T \quad ((T^{-1})^{-1} = T),$$

also ist auch A^{-1} diagonalisierbar, und die Eigenwerte sind einfach $1/\lambda$ für jeden Eigenwert λ von D (so muss D^{-1} aussehen!), weiter kann man dieselben Eigenvektoren wie zu A nehmen - die Transformationsmatrix T blieb erhalten.