# Lösungen zu Übung (2)

1. Wir berechnen

$$\det\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc} I & II & III & IV \end{array}\end{array} = \det\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & -1 & 4 \\ 4 & -11 & 7 & -2 \end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc} & II-2\cdot I & III+1 & IV-I \end{array}\end{array} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & -11 & 7 & 9 \end{pmatrix} = -45$$

2. Wir vereinfachen bzw. drücken wie vcrlangt aus:

   (a) Man hat (spaziere durch die Spalten-Summanden ohne Wiederholung, ziehe Faktoren heraus und ordne um mittels der alternierenden Eigenschaft)

$$\begin{aligned}\det\left(\vec{\mathbf{a}}_1+\vec{\mathbf{a}}_2, 2\vec{\mathbf{a}}_1+3\vec{\mathbf{a}}_3, 4\vec{\mathbf{a}}_2-5\vec{\mathbf{a}}_3\right) &= \det\left(\vec{\mathbf{a}}_1, 3\vec{\mathbf{a}}_3, 4\vec{\mathbf{a}}_2\right)+\det\left(\vec{\mathbf{a}}_2, 2\vec{\mathbf{a}}_1, -5\vec{\mathbf{a}}_3\right)\\ &= -12\det\left(\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \vec{\mathbf{a}}_3\right)+10\det\left(\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \vec{\mathbf{a}}_3\right)\\ &= -2\det\left(\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \vec{\mathbf{a}}_3\right)\end{aligned}$$

   (Hier könnte man noch die Zusatzfrage anbringen, welche Matrix man ablesen kann, deren Determinante den Vorfaktor zu $\det\left(\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \vec{\mathbf{a}}_3\right)$ergibt.) Dazu: $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} = -2$, und man hat den Multiplikationssatz.

   (b) Es sei $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ und $\det(B) = d$. Dann hat man mit den Bezeichnungen $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ für die Spaltenvektoren von $B$:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\left(A^T\right) = \det\left(\vec{\mathbf{b}}-2\vec{\mathbf{c}}, 2\vec{\mathbf{c}}-3\vec{\mathbf{a}}, 5\vec{\mathbf{a}}+2\vec{\mathbf{b}}\right)\\ &= 10\det\left(\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{a}}\right)+12\det\left(\vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right) =^{*} 22\det\left(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}\right) = 22d.\end{aligned}$$

   $^{*}$) Man beachte jeweils das positive Vorzeichen der Permutationen zur Reihenfolge $\left(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}\right)$.

3. (a) Man hat

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} \sin(t) & -\cos(t) \\ 1+\tan^2(t)-\sin(t) & \cos(t)+\tan(t)\left(1+\tan^2(t)\right)\end{pmatrix} &= \det\left(\begin{pmatrix} \sin(t) & -\cos(t) \\ 1+\tan^2(t) & \tan(t)\left(1+\tan^2(t)\right)\end{pmatrix}\right)\\ &= \left(1+\tan^2(t)\right)\det\begin{pmatrix} \sin(t) & -\cos(t) \\ 1 & \tan(t)\end{pmatrix}\\ &= \left(1+\tan^2(t)\right)\left(\cos(t)+\frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}\right)\\ &= \frac{1+\tan^2(t)}{\cos(t)}\left(=\frac{1}{\cos^3(t)}\right)\end{aligned}$$

   Das wird nirgends Null, ist undefiniert für die Nullstellen von cos, also die Stellen $x(k) = \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **Bemerkung: Hier werden oft nicht alle Stellen genannt. Außerdem sollte man nicht unsicher sein bei der Unterscheidung 'Wert ist Null - Wert ist nicht definiert'.**

(b) Ebenso mit der Bilinearität von $\det_2$ in den Spalten:

$$\begin{aligned}
& \det\begin{pmatrix} \sin(t)+\cos(t) & -2\cos(t) \\ \cos(t)+2\sin(t) & -4\sin(t) \end{pmatrix} \\
& \left[= \det\begin{pmatrix} \sin(t) & -2\cos(t) \\ \cos(t) & -4\sin(t) \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \cos(t) & -2\cos(t) \\ 2\sin(t) & -4\sin(t) \end{pmatrix}\right] \\
= \; & = \det\begin{pmatrix} \sin(t) & -2\cos(t) \\ \cos(t) & -4\sin(t) \end{pmatrix} \text{ (am besten im Kopf von der ersten Zeile hierher)} \\
= \; & -4\sin^2(t)+2\cos^2(t) = 6\cos^2(t)-4
\end{aligned}$$

Für welche Werte von $t$ erhält diese Determinante den Wert Null? Für diese Frage können wir mit beiden letzten Ausdrücken arbeiten, also (mit dem letzten):

$$\begin{aligned}
\cos^2(t) &= \frac{2}{3} \text{ hat die Lösungen} \\
x_{1,2}(k) &= \pm\arccos\left(\frac{1}{3}\sqrt{6}\right) + k\pi,\ k\in\mathbb{Z},
\end{aligned}$$

dazu mache man sich kurz die Gestalt des Graphen von $f(t)=\cos^2(t)-\frac{2}{3}$ und die Periodenlänge klar, mit dem vorletzten Ausdruck erhält man nach Division durch $\cos^2(t)$ (die Nullstellen von cos kommen nicht in Frage)

$$\begin{aligned}
\tan^2(t) &= \frac{1}{2}, \text{ mit den Lösungen (mit dem noch einfacheren Graphen)} \\
y_{1,2}(k) &= \pm\arctan\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Tatsächlich ist sogar $y_{1,2}=x_{1,2}$, das ist also nicht einmal eine Umparametrisierung derselben Lösungsmenge.

4. (a)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

hat den direkt abzulesenden algebraisch dreifachen Eigenwert 2. (Wir wiederholen och einmal: Determinante von Dreiecksmatrizen, $B-\lambda E$ ist auch eine solche, also ist das charakteristische Polynom $p_B(\lambda)=(2-\lambda)^3$.) Aber die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts ist nur 1, weil

$$\begin{aligned}
\mathit{Rang}(B-2E) &= \mathit{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2, \text{ also} \\
\text{geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 2} &= \dim\mathcal{E}_2(B) = \dim(\mathit{Kern}(B-2E)) = 1.
\end{aligned}$$

(Man hätte auch so sehen können: Wäre die geometrische Vielfachheit gleich 3, so müsste jeder Vektor $\neq \vec{\mathbf{0}}$ Eigenvektor sein, was offensichtlich nicht so ist.) Also ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 2 kleiner als die algebraische, die Matrix daher nicht diagonalisierbar (Nach bekanntem Satz!).
Für

$$U = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sieht man wie soeben die Eigenwerte 2 (algebraisch einfach) und $-2$ (algebraisch doppelt). Daher kann die Diagonalisierbarkeit von $U$ nur noch daran scheitern, das $-2$ geometrische Vielfachheit $<2$ (also nur 1) hätte, wir prüfen:

$$\mathit{rang}(U-(-2)E) = \mathit{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 1,$$

also ist 2 die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes $-2$ (warum?), daher ist $U$ diagonalisierbar. Man hätte bei Hinsehen auch bemerkt, dass $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2 \in \mathcal{E}_{-2}(U)$, damit wäre man schneller bei demselben Resultat.

(b) i. Wir betrachten

$$A_b = \begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \ b \in \mathbb{R},$$

und finden über

$$p_{A_b}(\lambda) = (b-\lambda)(2-\lambda) + 1 = \lambda^2 - (2+b)\lambda + 2b + 1$$

die Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}(b) &= \frac{2+b}{2} \pm \sqrt{\frac{(2+b)^2}{4} - 2b - 1} \\ &= \frac{2+b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4b+b^2}. \end{aligned}$$

Nun treten folgende Fälle auf:

$$\begin{aligned} \text{1. Fall} &: && b^2 - 4b > 0, \text{ d.h. } b < 0 \text{ oder } b > 4: \\ & && \text{Dann sind } \lambda_{1,2}(b) \text{ verschiedene reelle Eigenwerte,} \\ & && \text{also ist dann } A_b \text{ über } \mathbb{R} \text{ diagonalisierbar (zug. Satz?)} \\ \text{2. Fall} &: && b = 0 \text{ oder } b = 4, \text{ dann ist } \lambda(b) = \frac{2+b}{2} \text{ einziger Eigenwert,} \\ A_0 - \lambda(0)E &= && \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ hat Rang 1,} \\ A_4 - \lambda(4)E &= && \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ hat auch Rang 1,} \\ \text{also ist } A_b \text{ für } b &= && 0 \text{ oder } b = 4 \text{ nicht diagonalisierbar.} \\ \text{3. Fall} &: && 0 < b < 4, \text{ dann hat } A_b \text{ die komplexen (nicht reellen)} \\ \text{Eigenwerte } \lambda_{1,2}(b) &= && \frac{2+b}{2} \pm \frac{1}{2} j\sqrt{4b-b^2} \text{ mit } \lambda_1(b) \neq \lambda_2(b), \\ & && \text{ist also über } \mathbb{C} \text{ diagonalisierbar, nicht über } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ii. **Im Fall 1** ($b < 0$ oder $b > 4$) haben wir:

$$D_b = \begin{pmatrix} \frac{2+b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-4b+b^2} & 0 \\ 0 & \frac{2+b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-4b+b^2} \end{pmatrix},$$

nun schreiben wir allein die Gleichung (!)

$$(b-\lambda)x + y = 0$$

und erhalten die folgenden Eigenvektoren, indem wir $x = 1$ setzen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1(b) - b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2-b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-4b+b^2} \end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor zu } \lambda_1(b), \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2(b) - b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2-b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-4b+b^2} \end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor zu } \lambda_2(b). \end{aligned}$$

Also

$$T_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2-b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-4b+b^2} & \frac{2-b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-4b+b^2} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $D_b = (T_b)^{-1} A_b T$, was wir allenfalls mit Computerhilfe prüfen würden.
**Im Fall 3** ($0 < b < 4$) hat man völlig analog (dafür braucht man nicht mehr dasselbe wie zum Fall 1 zu tun (!), sondern nur noch die beteiligten komplexen Zahlen angemessen zu schreiben:

$$\begin{aligned} D_b &= \begin{pmatrix} \frac{2+b}{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{4b-b^2} & 0 \\ 0 & \frac{2+b}{2} - \frac{1}{2}j\sqrt{4b-b^2} \end{pmatrix} \\ T_b &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2-b}{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{4b-b^2} & \frac{2-b}{2} - \frac{1}{2}j\sqrt{4b-b^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Wir diagonalisieren

$$A = \begin{pmatrix} 1+j & j \\ -2 & 1+j \end{pmatrix}.$$

Dazu berechnen wir zunächst die Eigenwerte über das charakteristische Polynom

$$p_A(\lambda) = (1+j-\lambda)^2 + 2j = \lambda^2 - 2(1+j)\lambda + 4j.$$

**Bemerkung: Grundsätzlich sollte man in deratigen Fällen nicht ausmultiplizieren, die vorletzte Form ist ja schon 'in quadratischer Ergänzung', arbeiten wir also zuerst mit**

$$\begin{aligned}
(1+j-\lambda)^2 + 2j &= 0, \text{ also} \\
\lambda_{1,2} &= 1+j \pm \sqrt{-2j} \\
&= 1+j \pm (1-j), \text{ also} \\
\lambda_1 &= 2, \ \lambda_2 = 2j
\end{aligned}$$

für $\sqrt{-2j}$ mache man sich geometrisch klar, dass

$$-j = e^{-j\pi/2}, \text{ also ist } e^{-j\pi/4}$$

**eine** Quadratwurzel davon, und man hat

$$\sqrt{2}e^{-j\pi/4} = \sqrt{2}\left(\cos(-\pi/4) + j\sin(-\pi/4)\right) = 1 - j.$$

**Mit** $pq-$ Formel bekommt man aus

$$\lambda^2 - 2(1+j)\lambda + 4j = 0$$

schnell dasselbe, aber man hat zwei überflüssige Schritte gemacht.
Mit unseren zwei verschiedenen Eigenwerten wissen wir bereits, dass die Matrix diagonalisierbar ist, und wie zuvor berechnen wir über

$$(1+j-\lambda)x + jy = 0$$

mit $x = j$ die Eigenvektoren

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} j \\ 1-j \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } \lambda_1 &= 2, \\
\begin{pmatrix} j \\ -1+j \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } \lambda_2 &= 2j,
\end{aligned}$$

haben damit insgesamt

$$\begin{aligned}
D &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2j \end{pmatrix}, \\
T &= \begin{pmatrix} j & j \\ 1-j & -1+j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5. Man hat: Wenn mit einer Diagonalmatrix $D$ und einer Transformationsmatrix $T$ für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

$$D = T^{-1}AT,$$

so erhält man, indem man auf beiden Seiten die Transponierte bildet:

$$D^T = \left(T^{-1}AT\right)^T,$$

nun ist klar $D^T = D$ und

$$\left(T^{-1}AT\right)^T = \left(T^T A^T \left(T^{-1}\right)\right)^T = T^T A^T \left(T^T\right)^{-1},$$

dabei benutzen wir $\left(B^{-1}\right)^T = \left(B^T\right)^{-1}$ für alle invertierbaren Matrizen $B$. Insgesamt also

$$D = T^T A^T \left(T^T\right)^{-1}.$$

Da die Einträge auf der Hauptdiagonalen von $D$ die Eigenwerte sowohl von $A$ als auch von $A^T$ sind, haben die Matrizen $A$ und $A^T$ also dieselben Eigenwerte. (Übrigens kann man auch unabhängig einsehen, dass $A$ und $A^T$ dasselbe charakteristische Polynom haben.)
Wir kommen zur Zusatzfrage: Mit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $A^*$ klappt (fast) alles analog, wir wenden nur $*$ an anstelle der Transposition und bekommen:

$$\overline{D} = D^* = \left(T^{-1}AT\right)^* = T^* A^* \left(T^{-1}\right)^* = T^* A^* \left(T^*\right)^{-1},$$

lediglich sind die Eigenwerte dabei konjugiert worden, die Diagonalisierbarkeit bleibt erhalten wie im Reellen.
**Noch ein paar Bemerkungen:** Die Argumentation für $*$ schließt die erste für die Transposition ein, es wäre nur die letzte Zeile nötig gewesen. Denn für den Spezialfall $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat man $A^* = A^T$, und die Eigenwerte kommen dann in konjugierten Paaren, so dass in diesem Spezialfall $D$ und $\overline{D}$ dieselben Eigenwerte haben, nur anders angeordnet, wenn es Eigenwerte aus $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gibt. Wenn man noch einmal so etwas wie $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ oder das Analogon für $*$ sehen möchte: Z.B.

$$\left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = E^T = E,$$

also ist $\left(A^{-1}\right)^T$ die Inverse von $A^T$, somit $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$. Völlig analog funktioniert dies für $*$.Bald werden wir noch eine tiefere Einsicht in den Sachverhalt bekommen, dass die Stern-Operation im Komplexen das Analoge zur Transposition im Reellen darstellt.