

Lösungen zu Übung (1)

Vorbemerkung: Erschrecken Sie nicht angesichts der Länge, ich habe noch viele Hinweise auf Varianten, geschickteres Rechnen und wesentliche vorgekommene Fehler untergebracht.

1. Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) $\dim(\text{Bild}(A)) = 2$. (Die ersten beiden Spalten sind offenbar linear unabhängig., und der Bildraum kann höchstens Dimension 2 haben, als Unterraum von $\mathbb{R}^2$.)
- (b) Also mit dem 'Dimensionssatz' ($\dim(\text{Kern}(A)) + \dim(\text{Bild}(A)) = \text{Spaltenzahl von } A$ (=Dimension des Urbildraums von A): $\dim(\text{Kern}(A)) = 3 - 2 = 1$
- (c) Wollen wir den Kern von A bestimmen, so genügt es nicht, die Dimension 1 zu wissen, allerdings brauchen wir mit b nur einen Basisvektor dafür auszurechnen, wir schreiben wir das LGS

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 0 \\ 3x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

1. Zeile minus 2*zweite Zeile ergibt

$$x + 4z = 0,$$

wir wählen den freien Parameter z (lieber als x , wieso?) und bekommen:

$$x = -4z,$$

Einsetzen in die erste Zeile oben:

$$-8z + y + 3z = 0,$$

also

$$y = 5z.$$

Daher

$$\text{Kern}(A) = \left\{ z \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

man schreibt auch gern parametrisierte Form :

$$\vec{x}(z) = z \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Wir können auch vorziehen, $z = 1$ zu setzen, um ein einziges Element aus dem Kern von A zu bestimmen, das nicht $\vec{0}$ ist. Dann findet man mit dem Vektor $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis für $\text{Kern}(A)$, und das genügt.

2. Es sei $\vec{x} = (1, 2, 3)^T$. Was ist $\vec{x}^e$ für die Basis $e = ((1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T)$? Wir suchen für die Basis $a = ((1, 0, 0)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 1, 1)^T)$ die Koordinatendarstellung $\vec{x}^a$ (also von $\vec{x}$ bezüglich der Basis a). Zunächst hat man

$$\vec{x}^e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (= \vec{x}),$$

(Hinweis: Hier wurde recht oft der Fehler gemacht,

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zu bilden, das ist aber}$$

$$\text{nicht etwa } \vec{x}^a, \text{ sondern der Vektor } \vec{y} \text{ mit } \vec{y}^a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.)$$

Vielmehr haben wir folgende Gleichung zu lösen:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Man sollte das möglichst nicht aufschreiben müssen, sondern sofort schreiben:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 1 \\ \beta + \gamma &= 2 \\ \gamma &= 3 \end{aligned}$$

und erhält schnell $\gamma = 3, \beta = -1, \alpha = -1$. Damit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^a = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Andererseits hat man

$$T_a^e = (T_e^a)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Das rechnet man leicht so aus (von erster Zeile die zweite abziehen, von zweiter Zeile die dritte):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

Damit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also erneut

$$\vec{x}^a = T_a^e \vec{x}^e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass man nun jegliche Koordinatenumrechnung (von e - Koordinaten in a - Koordinaten) sofort über Anwenden der inversen Matrix bekäme, also keine weiteren LGS mehr zu lösen hätte.)

3. Es sei die gebräuchlichste Basis $e = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ des $\mathbb{R}^2$ gegeben. Weiter $M^e(\vec{f}) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, also $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$.

- (a) $a = \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^2$, weil offensichtlich der erste Vektor $\neq \vec{\mathbf{0}}$ ist und der zweite kein Vielfaches des ersten. (Aber Vorsicht, im $\mathbb{R}^3$ genügt es nicht, wenn von drei Vektoren paarweise jeder kein Vielfaches eines anderen ist.)
- (b) Man hat

$$\begin{aligned} \left(\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{a}}_1) \right) &= \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{\mathbf{a}}_1, \\ \text{also } \left(\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{a}}_1) \right)^a &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ direkt abzulesen, man muss hier} \\ &\quad \text{kein Gleichungssystem lösen wie bei Aufg. 2,} \\ \left(\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{a}}_2) \right) &= \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{\mathbf{a}}_2, \\ \text{also } \left(\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{a}}_2) \right)^a &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ wieder direkt abzulesen.} \end{aligned}$$

nun nach dem '1. Rezept':

$$M^a(\vec{\mathbf{f}}) = \left(\left(\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{a}}_1) \right)^a, \left(\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{a}}_2) \right)^a \right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (c) Man hat

$$T_e^a = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ damit } T_a^e = (T_e^a)^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix},$$

also nach dem '2. Rezept':

$$\begin{aligned} M^a(\vec{\mathbf{f}}) &= T_a^e M^e(\vec{\mathbf{f}}) T_e^a \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Von einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sei bekannt: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Kern}(A)$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

- (a) Das Bild von A ist mindestens zweidimensional, weil die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, und weil der Kern mindestens eindimensional ist, hat man $\text{Rang}(A) = 2$, also $\dim(\text{Kern}(A)) = 1$, und mit den Angaben hat man:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &\text{ ist eine Basis für } \text{Kern}(A) \\ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) &\text{ ist eine Basis für } \text{Bild}(A) \text{ (klar?)} \end{aligned}$$

- (b) A ist mit den Angaben eindeutig bestimmt, weil

$$a = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis für $\mathbb{R}^3$ bildet und die Bildvektoren dieser Basisvektoren gegeben sind. (Hinweis: Ein lineares $n \times n$ -Gleichungssystem mit n Unbestimmten und n Gleichungen kann durchaus keine Lösung oder unendlich viele Lösungen haben, das sagt also noch gar nichts.)

- (c) Sei $\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x}$. Dann hat man mit der Basis a aus Aufgabenteil b sofort

$$M^a(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Man sich daran gewöhnen, $M^a(\vec{f})$ nach den Angaben oben direkt zu sehen. Trotzdem hier noch einmal der ganze Vorgang ausführlich: In $M^a(\vec{f})$ stehen der Reihe nach die Koordinatendarstellungen der Basisvektoren von a bezüglich der Basis a , und wir haben

$$\begin{aligned} \left(\vec{f} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^a &= \vec{0}^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \text{also } \left(\vec{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^a &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (Koeffizienten in der LK ablesen!)}, \text{ analog} \\ \left(\vec{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)^a &= \left(-2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (d) Das gesuchte Matrizenprodukt ist (mit der folgenden ersten Zeile war die Aufgabe erledigt):

$$\begin{aligned} A &= M^e(\vec{f}) = T_e^a M^a(\vec{f}) T_a^e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -5 \end{pmatrix} \text{ (Letzteres wollten wir nicht von Hand ausrechnen.)} \end{aligned}$$

5. Sei die $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ -Matrix gegeben: $B = \begin{pmatrix} 1+j & 4j-1 \\ 2+4j & -7+11j \end{pmatrix}$.

- (a) Der Rang (über $\mathbb{C}$, nicht über $\mathbb{R}$ (!)) von B ist nur 1, weil

$$\frac{4j-1}{1+j} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}j = \frac{-7+11j}{2+4j},$$

natürlich kann man auch ausrechnen, dass die Determinante Null ist (was für diesen Teil praktischer wäre, weil man nur zwei Multiplikationen benötigt), aber die Version oben ist praktischer im Blick auf b.

- (b) Für den Kern schreiben wir nur (die zweite Zeile ist linear abhängig von der ersten, sagt also nichts mehr dazu)

$$(1+j)x + (4j-1)y = 0,$$

wir setzen zweckmäßig $y = 1$ (besser als $x = 1$ - klar?) und bekommen

$$x = \frac{-4j+1}{1+j} = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}j,$$

also ist

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}j \\ 1 \end{pmatrix} \text{ eine Basis für } \text{Kern}(B).$$

Ein Hinweis: Späterhin wird es vielfach nützlich sein, Brüche zu vermeiden, in diesem Sinne würde man lieber stattdessen $\begin{pmatrix} -3-5j \\ 2 \end{pmatrix}$ als Basis angeben.

6. Mit den Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-j \\ 1+j & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} j & -j \\ 1+j & 1-j \end{pmatrix}$ hat man

$$\begin{aligned} A^* &= A, \\ B^* &= \begin{pmatrix} -j & 1-j \\ j & 1+j \end{pmatrix}, \\ BA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3+j & 3-j \end{pmatrix}, \\ A^*B^* &= (BA)^* = \begin{pmatrix} 1 & 3-j \\ 1 & 3+j \end{pmatrix}, \\ B^{-1} &= \begin{pmatrix} j & -j \\ 1+j & 1-j \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{j(1-j) + j(1+j)} \begin{pmatrix} 1-j & j \\ -1-j & j \end{pmatrix} \\ (\text{Vorfaktor mit } j \text{ erweitert!}) &= \frac{-j}{2} \begin{pmatrix} 1-j & j \\ -1-j & j \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1-j & 1 \\ -1+j & 1 \end{pmatrix} \\ (B^*)^{-1} &= (B^{-1})^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1+j & -1-j \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7. Wir haben (die Gleichungen benutzen offenbar die Verträglichkeit der Konjugation mit Produkt und Summe bzw. die Vertauschbarkeit der Körperoperationen in $\mathbb{C}$ mit der Konjugation)

$$\overline{A \overline{B}} = \left(\sum_k \overline{a_{ik}} \overline{b_{kj}} \right)_{i,k} = \left(\sum_k \overline{a_{ik} b_{kj}} \right)_{i,k} = \left(\overline{\sum_k a_{ik} b_{kj}} \right)_{i,k} = \overline{AB},$$

daher weiter

$$(AB)^* = \overline{AB}^T = (\overline{A} \overline{B})^T = (\overline{B})^T (\overline{A})^T = B^* A^*.$$

*) Das dürfte benutzt werden. Natürlich kann man das Ganze mit Indexkalkül machen.

8. Es sei B der Raum der Funktionen, die über $\mathbb{C}$ linear erzeugt werden von $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = e^{jt}$, $f_2(t) = e^{2jt}$, $t \in [0, 2\pi)$.

(a)

$$B = \{ \alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \}$$

(b) Wir haben ($\overline{1} = 1$, $\overline{e^{jt}} = e^{-jt}$ usw.):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} 1 \cdot e^{jt} dt &= \int_0^{2\pi} (\cos(t) + j \sin(t)) dt = \int_0^{2\pi} \cos(t) dt + j \int_0^{2\pi} \sin(t) dt = 0 \\ &(\text{sofort graphisch klar!}), \\ \int_0^{2\pi} 1 \cdot e^{2jt} dt &= 0 \text{ (analog - nur } \cos(2t), \sin(2t) \text{)} \\ \int_0^{2\pi} e^{-jt} e^{2jt} dt &= \int_0^{2\pi} e^{jt} dt = 0 \text{ (oben schon gemacht),} \end{aligned}$$

Man sieht dann auch schon, dass man auch weiter gehen kann, mit höheren Potenzen. (Das tut man auch.) Weiter: Ein Orthogonalsystem von Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$, die alle $\neq \vec{0}$ sind, ist stets linear unabhängig, weil jeder davon erzeugte Vektor sich **eindeutig** als Linearkombination von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ schreiben lässt, mit

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^k \beta_i \vec{a}_i \implies \beta_i = \frac{1}{|\vec{a}_i|^2} \cdot \langle \vec{x}, \vec{a}_i \rangle \text{ für } 1 \leq i \leq k$$

(multipliziere $\vec{a}_i$ jeweils skalar an in der Gleichung). Man beachte, dass bereits nach Definition (f_0, f_1, f_2) ein Erzeugendensystem für B bildet, also mit der linearen Unabhängigkeit eine Basis für B .

(c) Die Matrix der Ableitung bezüglich der angegebenen Basis von B bekommt man so:

$$f'_0 = 0, \quad f'_1 = jf_1, \quad f'_2 = 2jf_1$$

(Beachte: Dies sind korrekt geschriebene Gleichungen für Elemente von B , die eben Funktionen sind - korrekt wäre auch etwa $f'_1(t) = je^{jt}$ zu schreiben, aber dann sollte man zur Gleichung zwischen Funktionen fortschreiten.) Nun verwenden wir das Rezept, dass die Matrix der Ableitung bezüglich der Basis $a = (f_0, f_1, f_2)$ entsteht, indem man die Koordinatendarstellungen der Bildvektoren (hier Bildfunktionen) bezüglich a als Spalten schreibt, also mit

$$\begin{aligned} f_0'^a &= \vec{0} \in \mathbb{R}^3, \\ f_1'^a &= (jf_1)^a = \begin{pmatrix} 0 \\ j \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f_2'^a &= (jf_2)^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daher ist die gesuchte Matrix, wenn wir mit D die Abbildung: 'Ableitung auf B ' bezeichnen:

$$M^a(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 2j \end{pmatrix}.$$