Inhaltsverzeichnis

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen mehrerer Variabler

9.1 Integration über ebene Bereiche in kartesischen Koordinaten

Die Herleitung bestimmter Integrale über ebene Bereiche erfolgt in Analogie zur Herleitung bestimmter Integrale über Intervallen.
Dabei sind allerdings Einschränkungen an den betrachteten Bereich nötig.

9.1.1 Definition (Normalbereich)
Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich bzgl. der $\left\{ \begin{array}{c} x\text{-Achse} \\ y\text{-Achse} \end{array} \right\}$, wenn es stetige Funktionen $\left\{ \begin{array}{c} \varphi_1, \varphi_2 \\ \psi_1, \psi_2 \end{array} \right\}$ gibt, so dass gilt $\left\{ \begin{array}{ccc} G & = & \{(x,y):\, a \le x \le b,\, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\} \\ G & = & \{(x,y):\, c \le y \le d,\, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\} \end{array} \right\}$.

9.1.2 Beispiel
Ein achsenparalleles Rechteck läßt sich als Normalgebiet bzgl. der x-Achse mit $\varphi_1(x) = c$, $\varphi_2(x) = d$

$$G = \{(x,y):\, a \le x \le b,\, c \le y \le d\}$$

oder als Normalgebiet bzgl. der y-Achse mit $\psi_1(y) = a$, $\psi_2(y) = b$

$$G = \{(x,y) : c \le y \le d,\ a \le x \le b\}$$

darstellen.

9.1.3 Beispiel
Das Gebiet G sei durch die Parabel $y = x^2$, die Gerade $y = 1$ und die Gerade $x = 2$ begrenzt. Normalgebiet bzgl.der x-Achse:

$$G = \{(x,y) : 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le x^2\}$$

Normalgebiet bzgl. der y-Achse:

$$G = \{(x,y) : 1 \le y \le 4,\ \sqrt{y} \le x \le 2\}$$

9.1.4 Bemerkung
Für die folgenden Betrachtungen darf der Bereich aus endlich vielen Normalgebieten bzgl. der x-Achse oder der y-Achse zusammengesetzt sein, d.h.

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n\,,$$

wobei G_i, $i = 1, \ldots, n$ Normalbereiche bzgl. der x-Achse oder der y-Achse sind und höchstens an den Rändern übereinstimmen dürfen.

9.1.5 Beispiel
G sei begrenzt durch

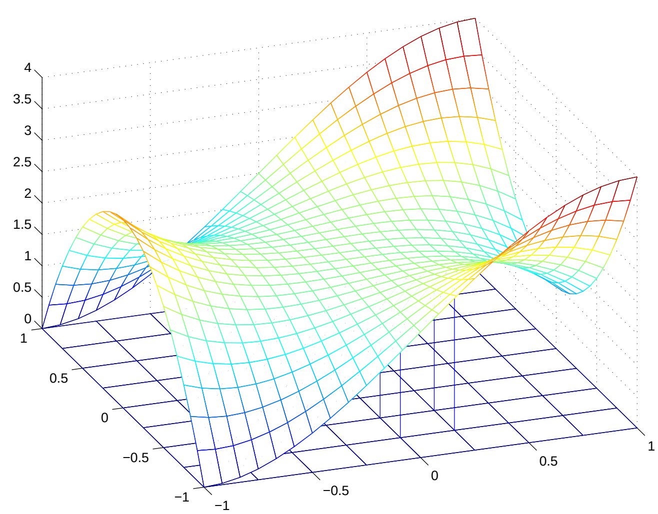
$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 = 1 \text{ mit } -1 \le x \le 0,\\
&y = -1,\\
&y^2 + (x-2)^2 = 1 \text{ mit } 2 \le x \le 3,\\
&y = x^2 + 1,\\
&y = (x-2)^2 + 1.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$, wobei

$$\begin{aligned}
G_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1,\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 0\} \\
G_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq x^2 + 1\} \\
G_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq (x-2)^2 + 1\} \\
G_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1,\ 2 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} + 2\}
\end{aligned}$$

Wir wollen nun das Volumen des Zylinders mit einer Grundfläche G in der xy-Ebene und oberer Begrenzung durch eine stetige Funktion $z = f(x,y)$ mit $f(x,y) \geq 0$ für alle $(x,y) \in G$ bestimmen. Dazu wird die xy-Ebene in achsenparallele Rechtecke der Fläche $\Delta x \cdot \Delta y$ eingeteilt. $R_1, \ldots, R_n$ seien diejenigen Rechtecke, die ganz in G liegen. Mit (x_i, y_i) bezeichnen wir einen beliebigen festen Punkt des Rechtecks R_i. Eine Näherung für das gesuchte Volumen ist dann die Summe der Volumina der über den Rechtecken R_i errichteten Säulen der Höhe $z_i = f(x_i, y_i)$, d.h.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \,.$$



9.1.6 Definition (Doppelintegral, Bereichsintegral)
Falls für $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n$ existiert, dann heißt $f(x,y)$ über G integrierbar. Der Grenzwert wird mit

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dG$$

bezeichnet und heißt Doppel- oder Bereichsintegral von $f(x,y)$ über G.

9.1.7 Bemerkung
Wie beim eindimensionalen Integrationsbereich garantiert die Stetigkeit von f die Existenz des Bereichsintegrals, wenn zusätzlich G endliche Vereinigung von Normalbereichen ist.

Im folgenden befassen wir uns mit der praktischen Berechnung solcher Bereichsintegrale für Normalbereiche bzgl. der x- bzw. y-Achse.

a) Berechnung für Normalbereich bzgl. der x-Achse
Sei $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ mit stetigen Funktionen φ_1, φ_2
Man stellt sich nun vor, dass man für jedes feste x über das zugehörige y-Intervall $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ bzgl. der y-Variablen integriert und anschließend die „infinitesimal dünnen" Scheibchen für alle $x \in [a,b]$ aufsammelt, d.h.

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dG = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

1. Schritt: Integration für festes x über zugehöriges y-Intervall; liefert eine Funktion von x
2. Schritt: Integration des Ergebnisses des 1. Schritts bzgl. x für $x \in [a,b]$ liefert reelle Zahl.

Die Integration erfolgt immer von innen nach außen!!!

b) Berechnung für Normalbereich bzgl. der y-Achse
Sei $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$ mit stetigen Funktionen ψ_1, ψ_2.
Für jedes feste y integriert man nun über das zugehörige x-Intervall $[\psi_1(y), \psi_2(y)]$ bzgl. der x-Variablen und sammelt anschließend die „infinitesimal dünnen" Scheibchen in y-Richtung für $y \in [c,d]$ auf, d.h.

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dG = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy$$

1. Schritt: Integration für festes y über zugehöriges x-Intervall; liefert eine Funktion von y
2. Schritt: Integration des Ergebnisses des 1. Schritts bzgl. y für $y \in [c,d]$ liefert reelle Zahl.

Die Integration erfolgt immer von innen nach außen!!!

c) Allgemeine Gebiete zerlegt man in eine endliche Vereinigung von Normalbereichen. Das Integral ist dann die Summe der Integrale über die Teilbereiche.
Die Zerlegung ist nicht eindeutig, wohl aber das Endergebnis!

9.1.8 Beispiel
Sei $f(x,y) = x + y$ und $G = [1,2] \times [0,4] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4\}$.

G ist sowohl Normalgebiet bzgl. der x-Achse als auch bzgl. der y-Achse. Es gibt also zwei Möglichkeiten für die Berechnung von $\iint\limits_G f(x,y)\,dG$

$$\begin{aligned}\iint\limits_G f(x,y)\,dG &= \int_1^2 \left[\int_0^4 (x+y)\,dy\right] dx \\ &= \int_1^2 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \Big|_{y=0}^{y=4}\right] dx \\ &= \int_1^2 (4x+8)\,dx \\ &= 2x^2 + 8x \,\Big|_{x=1}^{x=2} \\ &= 14\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\iint\limits_G f(x,y)\,dG &= \int_0^4 \left[\int_1^2 (x+y)\,dx\right] dy \\ &= \int_0^4 \left[\frac{1}{2}x^2 + yx \Big|_{x=1}^{x=2}\right] dy \\ &= \int_0^4 (2+2y-\frac{1}{2}-y)\,dy \\ &= \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}y^2 \Big|_{y=0}^{y=4} \\ &= 14\end{aligned}$$

9.1.9 Beispiel
Sei $f(x,y) = 4xe^{y^2} + y$ und $G = \{(x,y) :\ 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 4\}$.
G ist Normalgebiet bzgl. der x-Achse. Wir müssen also

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dG = \int_0^2 \left[\int_{x^2}^4 (4xe^{y^2} + y)\,dy\right] dx$$

berechnen. e^{y^2} ist aber bzgl. y nicht elementar integrierbar.
Wir versuchen daher einen anderen Weg und stellen dazu G als Normalgebiet bzgl. der y-Achse dar, d.h. $G = \{(x,y) :\ 0 \le y \le 4,\ 0 \le x \le \sqrt{y}\}$. Damit erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\iint\limits_G f(x,y)\,dG &= \int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{y}} (4xe^{y^2} + y)\,dx\right] dy \\ &= \int_0^4 \left[2x^2e^{y^2} + yx \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{y}}\right] dy \\ &= \int_0^4 \left[2ye^{y^2} + y\sqrt{y}\right] dy \\ &= \int_0^4 2ye^{y^2}\,dy + \int_0^4 y^{\frac{3}{2}}\,dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{16} e^u\,du + \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \Big|_{y=0}^{y=4} \\
&\quad \text{mit der Substitution } u = y^2 \text{ im ersten Integral} \\
&\quad \text{d.h. } du = 2y\,dy \text{ und den Grenzen } u_1 = 0,\ u_2 = 16 \\
&= e^u \Big|_{u=0}^{u=16} + \frac{2}{5} \cdot 4^{\frac{5}{2}} \\
&= e^{16} - 1 + \frac{2}{5} \cdot 2^5 \\
&= e^{16} + \frac{59}{5}
\end{aligned}$$

9.1.10 Satz (Flächeninhalte)
Der Flächeninhalt von G ist gleich

$$\left| \iint\limits_G 1\,dG \right|$$

denn: $\left| \iint\limits_G 1\,dG \right|$ ist nach Definition das Volumen des Zylinders mit Grundfläche G und Höhe 1, d.h. Grundfläche mal 1, also gleich der Grundfläche.

9.1.11 Beispiel
Wir suchen den Inhalt der von $xy = 4$, $y = x$, $x = 4$, $y = 0$ berandeten Fläche.
Es gilt $G = G_1 \cup G_2$ mit

$$\begin{aligned}
G_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x\} \\
G_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2 \le x \le 4,\ 0 \le y \le \frac{4}{x}\}
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\iint\limits_G 1\,dG &= \int_0^2 \int_0^x 1\,dy\,dx + \int_2^4 \int_0^{4/x} 1\,dy\,dx \\
&= \int_0^2 \left(y\big|_{y=0}^{y=x} \right) dx + \int_2^4 \left(y\big|_{y=0}^{y=4/x} \right) dx \\
&= \int_0^2 x\,dx + \int_2^4 \frac{4}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=0}^{x=2} + 4 \ln|x| \Big|_{x=2}^{x=4} \\
&= 2 + 4 \ln 2
\end{aligned}$$

9.2 Integration über ebene Bereiche in Polarkoordinaten

Je nach Gestalt von G ist die Berechnung von

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dG$$

mit Hilfe von Polarkoordinaten einfacher.
Statt des kartesischen Flächenelementes $dx\,dy$ hat man nun das Flächenelement in Polarkoordinaten:

$$r \cdot dr\, d\varphi$$

Mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ berechnet man somit $\iint\limits_G f(x,y)\, dG$ für

a) Bereiche zwischen zwei festen Winkeln, d.h.
$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x = r\cos\varphi,\, y = r\sin\varphi,\, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,\, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\}$

$$\iint\limits_G f(x,y)\, dG = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r\, dr \right] d\varphi$$

b) Bereiche zwischen zwei festen Radien, d.h.
$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi,\, r_1 \leq r \leq r_2,\, \varphi_1(r) \leq \varphi \leq \varphi(r)\}$

$$\iint\limits_G f(x,y)\, dG = \int_{r_1}^{r_2} \left[\int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi \right] \cdot r\, dr$$

9.2.1 Beispiel
Sei $f(x,y) = x \cdot y$ und G die Achtelkreisfläche $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : r\cos\varphi,\, y = r\sin\varphi,\, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},\, 0 \leq r \leq 2\}$.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_G x \cdot y\, dG &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 (r\cos\varphi)(r\sin\varphi) r\, dr\, d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin\varphi\cos\varphi \frac{1}{4} r^4 \Big|_{r=0}^{r=2} \right] d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} u\,du \\
&= 2u^2 \Big|_{u=0}^{u=\frac{1}{2}\sqrt{2}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

9.2.2 Beispiel

Inhalt der von der Cardioide (Herzlinie) berandeten Fläche; Polarkoordinatendarstellung $r(\varphi) = 1 + \cos\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, d.h.

$$
\begin{aligned}
\iint_G 1\,dG &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} r\,dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \Big|_{r=0}^{r=1+\cos\varphi} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^2\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi + \frac{1}{2}(\cos 2\varphi + 1))\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2}(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \\
&= \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}
$$

9.3 Integration über ebene Bereiche in allgemeinen Koordinaten

9.3.1 Satz („Substitutionsregel")
Ist $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ und $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(u,v),\, y = y(u,v),\, a \leq u \leq b,\, g_1(u) \leq v \leq g_2(u)\}$ so gilt:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dG \quad = \quad \int_a^b \left[\int_{g_1(u)}^{g_2(u)} f(x(u,v),\, y(u,v)) \cdot \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{array} \right| \right] dv\,du$$

9.3.2 Beispiel (Polarkoordinaten)
Für $x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi$, $y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi$ ist:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\varphi) & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(r,\varphi) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\varphi) & \frac{\partial y}{\partial \varphi}(r,\varphi) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{array} \right| = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

Also

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dG = \iint\limits_G f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi) \cdot r\,dr\,d\varphi$$

9.3.3 Beispiel
Zur Berechnung des Flächeninhalts der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, d.h.
$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(r,t) = a \cdot r \cdot \cos t,\, y = y(r,t) = b \cdot r \sin t,\, 0 \leq t \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1\}$
benötigen wir

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial r}(r,t) & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(r,t) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,t) & \frac{\partial y}{\partial \varphi}(r,t) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} a \cdot \cos t & -a \cdot r\sin t \\ b \cdot \sin t & b \cdot r\cos t \end{array} \right| = a \cdot b \cdot r(\cos^2 t + r\sin^2 t) = a \cdot b \cdot r$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \iint\limits_G 1\,dG &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 a \cdot b \cdot r\,dr\,dt \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} a \cdot b \cdot r\,dt\,dr \\ &= \int_0^1 a \cdot b \cdot r\,t \Big|_{t=0}^{t=2\pi} dr \\ &= \int_0^1 2\pi \cdot a \cdot b \cdot r\,dr \\ &= \pi \cdot a \cdot b \cdot r\,\Big|_{r=0}^{r=1} \\ &= \pi \cdot a \cdot b \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt der Ellipse beträgt also: $\pi \cdot a \cdot b$

9.3.4 Beispiel
Das Volumen eines Zylinders mit der Grundfläche $G = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Ellipse), der nach oben durch die Fläche $f(x,y) = b^2x^2 + a^2y^2 + 1$ begrenzt ist, beträgt

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dG \quad = \quad \int_0^{2\pi} \int_0^1 (b^2a^2r^2\cos^2 t + a^2b^2r^2\sin^2 t + 1)abr\,dr\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(b^3 a^3 r^3 + abr\right) dr\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} a^3 b^3 r^4 + \frac{1}{2} abr^2\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} a^3 b^3 + \frac{1}{2} ab\right) dt \\
&= \left(\frac{1}{4} a^3 b^3 + \frac{1}{2} ab\right) \cdot 2\pi \\
&= (\frac{1}{2} a^2 b^2 + 1) \cdot ab\pi
\end{aligned}
$$

9.4 Anwendungsbeispiel: Flächenschwerpunkte

Der Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) einer ebenen Fläche (Platte) mit Massendichte $m(x,y)$ ist gegeben durch die Schwerpunktkoordinaten

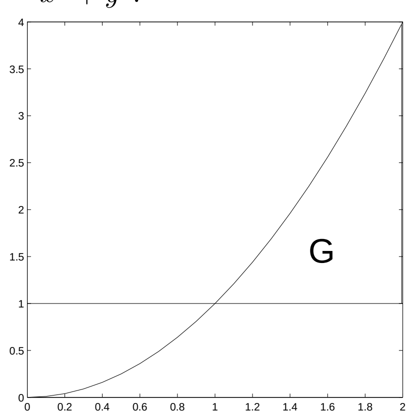
$$x_s = \frac{1}{M} \iint_G x \cdot m(x,y)\, dG\,, \quad y_s = \frac{1}{M} \iint_G y \cdot m(x,y)\, dG$$

mit der Gesamtmasse

$$M = \iint_G m(x,y)\, dG$$

Ist speziell $m(x,y) = 1$ (homogene Massendichte), dann ist M der Flächeninhalt von G und (x_s, y_s) sind die Koordinaten des geometrischen Flächenschwerpunktes.

9.4.1 Beispiel
Schwerpunkt der von den Geraden $x = 2$, $y = 1$ und dem Parabelbogen $y = x^2$ begrenzten Platte mit ebener Massendichte $m(x,y) = x^2 + y^2$.



Es gilt $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\, 1 \le y \le x^2\}$.

$$
\begin{aligned}
M &= \iint_G (x^2 + y^2)\, dG \\
&= \int_1^2 \int_1^{x^2} (x^2 + y^2)\, dy\, dx
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 \left[yx^2 + \frac{1}{3}y^3 \Big|_{y=1}^{x^2} \right] dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^6 + x^4 - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \frac{1006}{105} \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_1^2 \int_1^{x^2} x(x^2+y^2)\, dy\, dx = \frac{135}{8}, \\ M_y &= \int_1^2 \int_1^{x^2} y(x^2+y^2)\, dy\, dx = \frac{2753}{126} \\ x_s &= \frac{1}{M} M_x = 1.761307\ldots, \\ y_s &= \frac{1}{M} M_y = 2.280484\ldots \end{aligned}$$

9.4.2 Beispiel
Geometrischer Schwerpunkt eines Viertelkreises mit Radius R. Mit $m(x,y) = 1$ gilt

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{4}\pi R^2 \text{ - Fläche} \\ x_s &= \frac{4}{R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r\cos\varphi \cdot r\, dr\, d\varphi \\ &= \frac{4R}{3\pi} \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt $y_s = x_s$.

9.5 Integration über dreidimensionale Bereiche

Verallgemeinerung der Definitionen und Erläuterungen der vorhergehenden Abschnitte.

9.5.1 Definition (Normalbereiche)
$V \subset \mathbb{R}^3$ heißt Normalbereich bzgl. der x-Achse, wenn sich V darstellen läßt als

$$\begin{aligned} V &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),\ \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\} \\ \text{bzw. } V &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ \psi_1(x) \le z \le \psi_2(x),\ \varphi_1(x,z) \le y \le \varphi_2(x,z)\} \end{aligned}$$

Normalbereiche bzgl. der y-Achse bzw. z-Achse werden analog definiert.

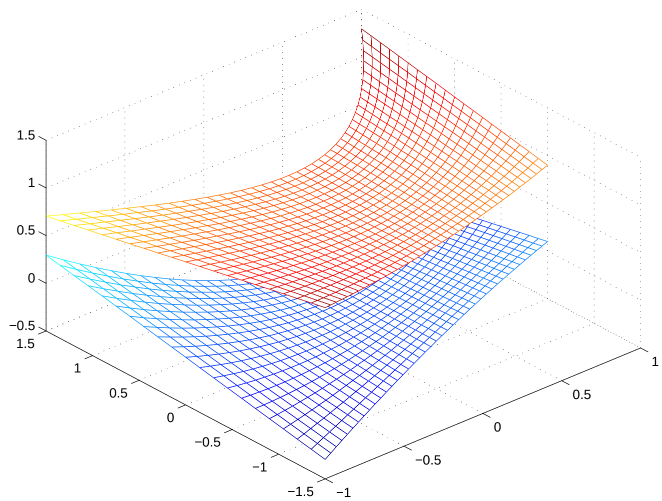
9.5.2 Beispiel

$$\begin{aligned} V = \Big\{ &(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \le x \le 1,\ \frac{1}{2}x - 1 \le y \le x^2 + \frac{1}{2}, \\ &\sin(-0.2 \cdot x \cdot y) \le z \le \sin(0.2 \cdot x \cdot y) + 1 \} \end{aligned}$$

Es gilt

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, -1 \leq x \leq 1, \, \frac{1}{2}x - 1 \leq y \leq x^2 + \frac{1}{2}\right\}$$

ist Normalgebiet bzgl. der x-Achse in der xy-Ebene. Man erhält daraus V, indem man jedem Punkt $(x_0, y_0) \in G$ eine „untere" z-Komponente $\sin(-0.2 \cdot x_0 \cdot y_0)$ und eine „obere" z-Komponente $\sin(0.2 \cdot x_0 \cdot y_0) + 1$ zuordnet.



9.5.3 Bemerkung
Der Bereich darf auch hier wieder aus endlich vielen Normalbereichen zusammengesetzt sein.

Für die Berechnung eines Integrals einer Funktion $f(x,y,z)$ über $V \subset \mathbb{R}^3$ wird der $\mathbb{R}^3$ in kleine Würfel zerlegt. $V_1, ..., V_n$ seien diejenigen Würfel, die ganz in V liegen mit Volumen $\Delta V_1, ..., \Delta V_n$. Eine Näherung für das gesuchte Integral ist

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(x_j, y_j, z_j) \Delta V_j$$

9.5.4 Definition
Falls für jede beliebige Zerlegung von V mit $\max_{j \in \{1,\dots,n\}} \Delta V_j \to 0 (n \to \infty)$ der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} S_n$$

existiert, dann heißt $f(x,y,z)$ über V integrierbar. Der Grenzwert wird mit

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\, dV$$

bezeichnet und heißt Dreifach- oder Volumenintegral von $f(x,y,z)$ über V.

Berechnung für Normalbereich bzgl. der x-Achse, d.h. $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, a \leq x \leq b, \, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \, \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)\}$.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\, dV = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right] dy \right\} dx$$

1. Schritt: Integration für festes x und festes y über zugehöriges z-Intervall; liefert eine Funktion von x und y.
2. Schritt: Integration des Ergebnisses des 1. Schritts für festes x über zugehöriges y-Intervall; liefert eine Funktion von x.
3. Schritt: Integration des Ergebnisses des 2. Schritts über zugehöriges x-Intervall; liefert eine reelle Zahl.
Die Integration erfolgt immer von innen nach außen!!!

9.5.5 Bemerkung
Für Normalbereiche bzgl. der y- oder der x-Achse erfolgt die Berechnung entsprechend.

9.5.6 Beispiel
Sei $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le x-y\}$ und $f(x,y,z) = y \cdot e^z$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V ye^z\,dV &= \int_1^2 \int_0^x \int_0^{x-y} y \cdot e^z\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_1^2 \int_0^x \left(y \cdot e^z \Big|_{z=0}^{z=x-y}\right) dy\,dx \\
&= \int_1^2 \int_0^x (y \cdot e^{x-y} - y)\,dy\,dx \\
&= \int_1^2 \left\{ (-y-1)e^{x-y} - \frac{1}{2}y^2 \Big|_{y=0}^{y=x} \right\} dx \\
&= \int_1^2 \left\{ (-x-1) - \frac{1}{2}x^2 + e^x \right\} dx \\
&= -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{6}x^3 + e^x \Big|_{x=1}^{x=2} \\
&= -\frac{11}{3} + e^2 - e.
\end{aligned}$$

9.6 Integration über dreidimensionale Bereiche in allgemeinen Koordinaten

9.6.1 Satz („Substitutionsregel“)
Ist $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ und

$$\begin{aligned}
V = \{&(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w), \\
&a \le u \le b,\ g_1(u) \le v \le g_2(u),\ h_1(u,v) \le w \le h_2(u,v)\}
\end{aligned}$$

so gilt:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV =$$

$$\int_a^b \left\{ \int_{g_1(u)}^{g_2(u)} \left[\int_{h_1(u,v)}^{h_2(u,v)} f(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)) \cdot \left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{matrix} \right| \cdot dw \right] dv \right\} du$$

9.6.2 Beispiel (Zylinderkoordinaten)
Zylinderkoordinaten, d.h. in der xy-Ebene Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und „Höhe“ $z = z$.

$$\begin{aligned}
dV &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} dr\, d\varphi\, dz \\
&= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot dr\, d\varphi\, dz \\
&= (r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi) dr\, d\varphi\, dz \\
&= r\, dr\, d\varphi\, dz
\end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten eignen sich bei der Integration über (bzgl. der z-Achse) rotationssymmetrische Körper.

9.6.3 Beispiel (Kugelkoordinaten)
Für die Einführung von Kugelkoordinaten führen wir folgende Bezeichnungen ein.

r	-	Abstand von (x, y, z) zum Ursprung
ψ	-	Winkel zwischen der xy-Ebene und dem Ursprungsstrahl durch den Punkt (x, y, z); $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
φ	-	Winkel zwischen der x-Achse und dem Ursprungsstrahl durch die Projektion des Punktes (x, y, z) in die xy-Ebene; $\varphi \in [-\pi, \pi]$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\psi\cos\varphi \\
y &= r\cos\psi\sin\varphi \\
z &= r\sin\psi
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
dV &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix} dr\, d\varphi\, d\psi \\
&= \begin{vmatrix} \cos\psi\cos\varphi & -r\cos\psi\sin\varphi & -r\sin\psi\cos\varphi \\ \cos\psi\cos\varphi & r\cos\psi\cos\varphi & -r\sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{vmatrix} dr\, d\varphi\, d\psi \\
&= (r^2\cos^3\psi\cos^2\varphi + r^2\cos\psi\sin^2\varphi + r^2\sin\psi\cos\psi\cos^2\varphi + r^2\cos^3\psi\sin^2\varphi) dr\, d\varphi\, d\psi \\
&= (r^2\cos^3\psi + r^2\cos\psi\sin^2\psi) dr\, d\varphi\, d\psi \\
&= r^2\cos\psi\, dr d\varphi\, d\psi
\end{aligned}$$

9.6.4 Beispiel
Integration von $f(x, y, z) = 1$ über der Einheitskugel.

$$\begin{aligned}
V &= \{(x, y, z) : x = r\cos\psi\cos\varphi,\ y = r\cos\psi\sin\varphi,\ z = r\sin\psi; \\
&\quad -\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2},\ -\pi \le \varphi \le \pi,\ 0 \le r \le 1\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V 1 dV &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 1 \cdot r^2 \cos\psi\, dr\, d\varphi\, d\psi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{3} r^3 \Big|_{r=0}^{r=1} d\varphi\, d\psi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \frac{1}{3} 2\pi d\psi \\
&= \frac{1}{3} 2\pi \sin\psi \Big|_{\psi=-\frac{\pi}{2}}^{\psi=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{3} 4\pi
\end{aligned}$$

Dies ist (wie zu erwarten war) gerade das Volumen der Einheitskugel.

9.7 Anwendungsbeispiele

a) $|\iiint\limits_V 1\, dV|$ - Volumen des Körpers V

b) Volumenschwerpunkt bei gegebener Massendichte $m(x, y, z)$.
Schwerpunktkoordinaten

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{M} \iiint\limits_V x \cdot m(x, y, z)\, dV \\
y_s &= \frac{1}{M} \iiint\limits_V y \cdot m(x, y, z)\, dV
\end{aligned}$$

$$z_s = \frac{1}{M}\iiint\limits_V z \cdot m(x,y,z)\, dV$$

wobei

$$M = \iiint\limits_V m(x,y,z)\, dV \text{ die Gesamtmasse ist.}$$

9.7.1 Beispiel
Das Volumen des Rotationskörpers
$V = \{(x,y,z) : \ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z;\ 0 \le z \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le z^2\}$
beträgt

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V 1 dV &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{z^2} 1 \cdot r\, dr d\varphi\, dz \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}r^2 =\right]_{r=0}^{z^2} d\varphi\, dz \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}z^4\, d\varphi\, dz \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} z^5 \,\big|_0^2 \\ &= \frac{\pi}{5} \cdot 32\end{aligned}$$

Schwerpunkt bei homogener Massendichte $m(x,y,z) = 1$, d.h.

$$M = \iiint\limits_V 1\, dV = \frac{32}{5}\pi\,.$$

Aus Symmetriegründen gilt $x_s = y_s = 0$.

$$\begin{aligned}z_s &= \frac{1}{32\pi/5} \cdot \iiint\limits_V z\, dV \\ &= \frac{5}{32\pi} \cdot \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{z^2} z\, r\, dr\, d\varphi\, dz \\ &= \frac{5}{32\pi} \cdot \frac{32}{3}\pi \ = \ \frac{5}{3},\end{aligned}$$

d.h. der Schwerpunkt hat die Koordinaten $(0, 0, \frac{5}{3})$

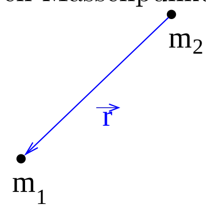
9.7.2 Beispiel (Gravitationskraft)
Zwei Massenpunkte mit Massen m_1, m_2 und Abstand r ziehen sich nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz an mit einer Kraft

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (\gamma\text{: Gravitationskonstante}).$$

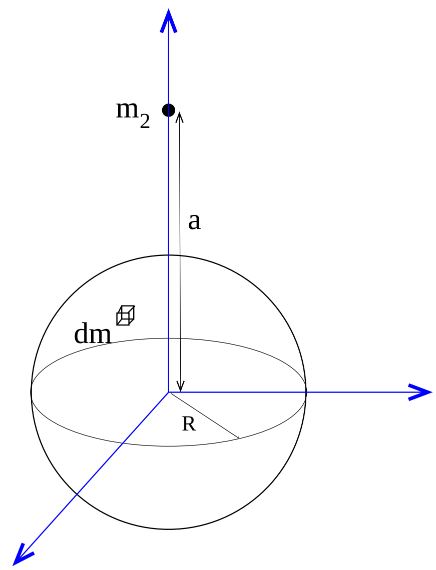
Berücksichtigt man auch die *Richtung* der Kraft, so lautet das Gesetz

$$\vec{F} = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r},$$

wobei $\vec{r}$ denVektor vom einen zum anderen Massenpunkt darstellt.



Zwischen Erde und Mensch (z.B.) wirkt auch die Gravitationskraft (Gewicht), aber die Erde ist kein Massen*punkt*! Wir berechnen die Gravitationskraft über ein Volumenintegral.
Erde als Ursprungskugel K mit Radius R, Massenpunkt mit Masse m_2 (Mensch) an Position $(0,0,a)$ mit $a \geq R$.



Beitrag zur Gravitationskraft durch ein Massenelement dm an der Stelle $\vec{x} = (x, y, z)$ innerhalb der Kugel:

$$d\vec{F} = \gamma \cdot \frac{dm \cdot m_2}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} \quad \text{mit } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - a \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet $\rho(\vec{x})$ die Dichte der Kugel an Position $\vec{x}$, so ist

$$dm(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) dV,$$

also

$$d\vec{F} = \gamma \cdot \frac{\rho(\vec{x}) \cdot m_2}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r}\, dV.$$

Zur Vereinfachung nehmen wir jetzt $\rho(\vec{x})$ als konstant an, $\rho(\vec{x}) = \rho$. Für die drei Komponenten der Gesamtanziehungskraft $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned} F_x &= \gamma \rho m_2 \iiint_K \frac{x}{(x^2 + y^2 + (z-a)^2)^{3/2}}\, dV \\ F_y &= \gamma \rho m_2 \iiint_K \frac{y}{(x^2 + y^2 + (z-a)^2)^{3/2}}\, dV \end{aligned}$$

$$F_z = \gamma\rho m_2 \iiint\limits_K \frac{z-a}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{3/2}}\,dV$$

Aus Symmetriegründen ist $F_x = F_y = 0$.
Wir berechnen F_z mit Hilfe von Zylinderkoordinaten. In Zylinderkoordinaten (r,φ,z) ist die Kugel gegeben durch $0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\sqrt{R^2-r^2} \le z \le +\sqrt{R^2-r^2}$, und es ist $dV = r\,d\varphi\,dz\,dr$.

$$\begin{aligned}
F_z &= \gamma\rho m_2 \iiint\limits_K \frac{z-a}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{3/2}}\,dV \\
&= \gamma\rho m_2 \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{+\sqrt{R^2-r^2}} \int_0^{2\pi} \frac{z-a}{(r^2+(z-a)^2)^{3/2}} r\,d\varphi\,dz\,dr \\
&= 2\pi\gamma\rho m_2 \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{+\sqrt{R^2-r^2}} \frac{z-a}{(r^2+(z-a)^2)^{3/2}} r\,dz\,dr \\
&= 2\pi\gamma\rho m_2 \int_0^R \frac{-1}{(r^2+(z-a)^2)^{1/2}}\Bigg|_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{+\sqrt{R^2-r^2}} r\,dr \\
&= 2\pi\gamma\rho m_2 \int_0^R \frac{r}{\left(r^2+(-\sqrt{R^2-r^2}-a)^2\right)^{1/2}} - \frac{r}{\left(r^2+(\sqrt{R^2-r^2}-a)^2\right)^{1/2}}\,dr \\
&= 2\pi\gamma\rho m_2 \int_0^R \frac{r}{\left(2a\sqrt{R^2-r^2}+R^2+a^2\right)^{1/2}} - \frac{r}{\left(-2a\sqrt{R^2-r^2}+R^2+a^2\right)^{1/2}}\,dr.
\end{aligned}$$

Das Integral über den ersten Term erledigen wir mit der Substitutionsregel:

$$\begin{aligned}
s &= 2a\sqrt{R^2-r^2}+R^2+a^2 \implies \sqrt{R^2-r^2} = \frac{1}{2a}\cdot(s-R^2-a^2) \\
ds &= \frac{-2ar}{\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{-2ar}{s-R^2-a^2}\cdot 2a\,dr,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^R \frac{r}{\left(2a\sqrt{R^2-r^2}+R^2+a^2\right)^{1/2}}\,dr \\
&= \frac{1}{4a^2}\int_{(R+a)^2}^{R^2+a^2} \frac{-s+R^2+a^2}{\sqrt{s}}\,ds.
\end{aligned}$$

Für den zweiten Term erhalten wir entsprechend mit der Substitution

$$\begin{aligned}
s &= -2a\sqrt{R^2-r^2}+R^2+a^2 \implies \sqrt{R^2-r^2} = \frac{-1}{2a}\cdot(s-R^2-a^2) \\
ds &= \frac{-2ar}{\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{-2ar}{s-R^2-a^2}\cdot 2a\,dr,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^R \frac{r}{\left(-2a\sqrt{R^2-r^2}+R^2+a^2\right)^{1/2}} \\
&= \frac{1}{4a^2}\int_{(R-a)^2}^{R^2+a^2} \frac{-s+R^2+a^2}{\sqrt{s}}\,ds.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$
\begin{aligned}
F_z &= 2\pi\gamma\rho m_2(I_1 - I_2) \\
&= 2\pi\gamma\rho m_2 \frac{1}{4a^2} \int_{(R+a)^2}^{(R-a)^2} \frac{-s + R^2 + a^2}{\sqrt{s}}\, ds \\
&= 2\pi\gamma\rho m_2 \frac{1}{4a^2} \left[-\frac{2}{3} s^{3/2} + 2 \cdot (R^2 + a^2) s^{1/2} \right] \Bigg|_{(R+a)^2}^{(R-a)^2} \\
&= (\text{Beachte: } R - a \le 0, \text{ also } \sqrt{(R-a)^2} = a - R) \\
&= 2\pi\gamma\rho m_2 \frac{1}{4a^2} \left[-\frac{2}{3}(a-R)^3 + 2(R^2+a^2)(a-R) + \frac{2}{3}(R+a)^3 - 2(R^2+a^2)(R+a) \right]; \\
&= 2\pi\gamma\rho m_2 \frac{1}{4a^2} \left[\frac{2}{3}((R+a)^3 - (a-R)^3) - 4(R^2+a^2)R \right] \\
&= (\text{verwende: } (R+a)^3 = R^3 + 3R^2a + 3Ra^2 + a^3,\ (a-R)^3 = a^3 - 3a^2R + 3aR^2 - R^3) \\
&= 2\pi\gamma\rho m_2 \frac{1}{4a^2} \left[\frac{4}{3}(R^3 + 3a^2R) - 4(R^2+a^2)R \right] \\
&= -2\pi\gamma\rho m_2 \frac{1}{4a^2} \frac{8}{3} R^3 \\
&= -\gamma(\rho \frac{4\pi}{3} R^3) m_2 \frac{1}{a^2}.
\end{aligned}
$$

Hierin ist $\frac{4\pi}{3}R^3$ das Volumen der Kugel, also $\rho\frac{4\pi}{3}R^3 = m_1$ die Masse der Kugel. Wir erhalten so das bemerkenswerte Resultat:

> Die Gravitationskraft für die (ausgedehnte) Kugel mit Masse m_1 ist identisch zu der für einen im Schwerpunkt (= Kugelmittelpunkt) angebrachten Massen*punkt* mit Masse m_1.