Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften

Klausur Vorkurs Mathematik

Wintersemester 2009/2010
2. Oktober 2009

Aufgabe 1: (a) (1 P) Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Definieren Sie den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.

(b) (1 P) Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Wann heißt f injektiv?

(c) (1 P) Was besagt der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie?

Lösung: (a) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

(b) f heißt injektiv, wenn für $a_1, a_2 \in A$ gilt: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

(c) Jede positive natürliche Zahl lässt sich bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.

Aufgabe 2: (a) (4 P) Untersuchen Sie die durch $f(x, y) = (x + y)(x - y)$ definierte Abbildung $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Injektivität und Surjektivität.

(b) (2 P) Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie: Ist f surjektiv und $g \circ f$ bijektiv, so ist g bijektiv.

Lösung: (a) f ist nicht injektiv, denn es ist $f(0, 0) = f(1, 1)$.

f ist surjektiv: sei $z \in \mathbb{R}$. Für $z \geq 0$ ist $(\sqrt{z}, 0)$ ein Urbild, und wenn $z < 0$ ist, ist $(0, \sqrt{-z})$ ein Urbild.

(b) Da f surjektiv ist, gibt es eine Abbildung $r\colon B \to A$ mit $f \circ r = \mathrm{id}_B$ (eine Rechtsinverse zu f), und da $g \circ f$ bijektiv ist, gibt es eine Inverse zu $g \circ f$, also eine Abbildung $h\colon C \to A$ mit $h \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_A$ und $(g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_C$. Insbesondere ist $f \circ h$ rechtsinvers zu g, also g schon einmal surjektiv. $f \circ h$ ist aber auch linksinvers zu g: Es gilt

$$(f \circ h) \circ g = f \circ h \circ g \circ \mathrm{id}_B = f \circ h \circ g \circ (f \circ r) = f \circ (h \circ g \circ f) \circ r = f \circ \mathrm{id}_A \circ r = f \circ r = \mathrm{id}_B$$

nach Definition von r. Folglich ist $f \circ h$ eine Inverse für g und g somit bijektiv.

Aufgabe 3: Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) (3 P) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)2^k = n2^{n+1}$

(b) (3 P) $11 \,\big|\, 3 \cdot 4^{2n+1} + 2 \cdot 5^{n+1}$

Lösung: (a) Beweis durch Induktion. Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist die Summe leer, also 0, und rechts steht ebenfalls 0.

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)2^k &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)2^k + (n+2)\cdot 2^{n+1} \\
&= n \cdot 2^{n+1} + (n+2)\cdot 2^{n+1} && \text{(nach Induktionsannahme)} \\
&= (2n+2)\cdot 2^{n+1} \\
&= (n+1)\cdot 2 \cdot 2^{n+1} = (n+1)\cdot 2^{n+2}
\end{aligned}$$

(b) Wegen $16 \equiv 5 \mod 11$ gilt

$$\begin{aligned}
3 \cdot 4^{2n+1} + 2 \cdot 5^{n+1} &= 3 \cdot 4 \cdot 16^n + 2 \cdot 5 \cdot 5^n \\
&\equiv 12 \cdot 5^n + 10 \cdot 5^n \mod 11 \\
&\equiv (10+12)\cdot 5^n \equiv 22 \cdot 5^n \equiv 0 \mod 11
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: (4 P) Welche der folgenden vier Relationen auf der Menge $M = \{a, b, c\}$ sind Äquivalenz- bzw. Ordnungsrelationen?

(i) $R_1 = \varnothing$	(iii) $R_3 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(b,c)\}$
(ii) $R_2 = M \times M$	(iii) $R_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(c,a)\}$

Lösung: R_1 ist nicht reflexiv, denn etwa $(a,a) \notin R_1$. R_1 ist also weder eine Ordnungs- noch eine Äquivalenzrelation. Die übrigen Relationen sind alle reflexiv, denn sie enhtalten alle Paare der Form (x,x).

Alle vier Relationen sind transitiv: Für R_1 ist Transitivität eine leere Bedingung, für R_2 ist sie erfüllt, da R_2 alle Paare enthält. Für R_3 und R_4 ist es ebenfalls klar, da mit (x,x) und (x,y) stets auch (x,y) ein Element einer Relation ist, und die zu überprüfenden Bedingungen sind von dieser Form.

R_2 ist symmetrisch, da R_2 alle Paare enthält, aber nicht antisymmetrisch, da sowohl (a,b) als auch (b,a) in R_2 liegen. R_2 ist also eine Äquivalenzrelation, aber keine Ordnungsrelation.

R_3 ist nicht symmetrisch, denn es ist $(a,c) \in R_3$, aber $(c,a) \notin R_3$. R_3 ist antisymmetrisch, denn von jedem Paar mit verschiedenen Komponenten liegt höchstens eines in R_3. Also ist R_3 eine Ordnungsrelation, aber keine Äquivalenzrelation.

R_4 ist symmetrisch, aber nicht antisymmetrisch, denn es liegen sowohl (a,c) als auch (c,a) in R_4. Folglich ist R_4 eine Äquivalenzrelation, aber keine Ordnungsrelation.

Aufgabe 5: Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$\text{(a) (2 P) } \frac{2-i}{2-3i} \qquad \text{(b) (2 P) } \frac{1+i}{(1-i)^3} \qquad \text{(c) (2 P) } \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

Lösung: (a) $\frac{2-i}{2-3i} = \frac{(2-i)(2+3i)}{4-9i^2} = \frac{7}{13} + \frac{4}{13}i$; $\quad$ Re $= \frac{7}{13}$, Im $= \frac{4}{13}$.

(b) $\frac{1+i}{(1-i)^3} = \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3(1+i)^3} = \frac{1+4i+6i^2+4i^3+i^4}{(1-i^2)^3} = \frac{-4}{2^3} = -\frac{1}{2}$; $\quad$ Re $= -\frac{1}{2}$, Im $= 0$.

(c) $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}\big(1+i\sqrt{3}\big)^3 = -\frac{1}{8}\big(1+3\cdot i\sqrt{3}+3\cdot 3i^2+3i^3\sqrt{3}\big) =$

$\quad = -\frac{1}{8}\big(1+3\cdot i\sqrt{3}-3\cdot 3-3i\sqrt{3}\big) = -\frac{1}{8}\big(1-9\big) = 1$; $\quad$ Re $= 1$, Im $= 0$.

Aufgabe 6: (5 P) Es seien $n = 885$, $a = 39$ und $b = 119$. Untersuchen Sie, ob $\overline{a}$ und $\overline{b}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ invertierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls das Inverse.

Lösung: Der Euklidische Algoritmus lautet für $a = 39$ und $b = 119$:

$$\begin{aligned} 885 &= 22\cdot 39 + 27 \\ 39 &= 27 + 12 \\ 27 &= 2\cdot 12 \;\; + 3 \\ 12 &= 4\cdot 3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 885 &= 7\cdot 119 + 52 \\ 119 &= 2\cdot 52 \;\; + 15 \\ 52 &= 3\cdot 15 \;\; + 7 \\ 15 &= 2\cdot 7 \;\;\;\; + 1 \\ 7 &= 7\cdot 1 \end{aligned}$$

Es folgt: $(885, 39) = 3$ und $(885, 119) = 1$. Also ist $\overline{a}$ nicht invertierbar. Für b errechnet man rückwärts

$$\begin{aligned} 1 &= 15 - 2\cdot 7 \\ &= 15 - 2\cdot(52 - 3\cdot 15) && = 7\cdot 15 - 2\cdot 52 \\ &= 7\cdot(119 - 2\cdot 52) - 2\cdot 52 && = 7\cdot 119 - 16\cdot 52 \\ &= 7\cdot 119 - 16\cdot(885 - 7\cdot 119) && = 119\cdot 119 - 16\cdot 885 \end{aligned}$$

Es folgt $\overline{119}\cdot\overline{119} = \overline{1}$, also ist $\overline{119}$ sein eigenes Inverses.