3 Die natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.
L. Kronecker[1]

1. Axiome für die natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen kann man als eine Menge mit bestimmten Eigenschaften charakterisieren: Sie bilden eine Menge $\mathbb{N}$, auf der eine Funktion $(\ )^+$ definiert ist, so dass gilt:

P1 $0 \in \mathbb{N}$,
P2 $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \in \mathbb{N}$,
P3 $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \neq 0$,
P4 $m, n \in \mathbb{N} \wedge m^+ = n^+ \Rightarrow m = n$,
P5 ist $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit $0 \in M$, so dass gilt: $n \in M \Rightarrow n^+ \in M$, so ist $M = \mathbb{N}$.

Die Funktion $(\ )^+$ nennt man die *Nachfolgerfunktion.* An dieser Stelle ist 0 nur ein Symbol für ein Element der Menge $\mathbb{N}$. Statt 0^+ schreibt man dann 1, usw. Diese Axiome heißen die *Peano*[2]*-Axiome.*

Bemerkung: Diese Beschreibung der natürlichen Zahlen durch ein Axiomensystem ist ein Beispiel einer für die Mathematik fundamentalen Vorgehensweise: Man trifft einige Grundannahmen, deren Wahrheitswerte willkürlich auf „wahr" gesetzt werden; solche Annahmen nennt man **Axiome**. Mit anderen Worten, Axiome sind nicht weiter zu begründende (oder zu bezweifelnde) Sätze. Ein anderes Beispiel ist die im Anhang des vorherigen Kapitels beschriebene axiomatische Mengenlehre: heutzutage wird das System ZFC von den meisten als Grundlage der Mengenlehre (und damit der Mathematik) akzeptiert. Ausgehend von diesen Axiomen beweist man neue Sätze nach den Spielregeln der Logik.
Dabei stellt sich aber das Problem der Widerspruchsfreiheit: kann es sein, dass man aus einem Axiomensystem sowohl eine Aussage A als auch $\neg A$ ableiten kann? In diesem Fall ist das Axiomensystem natürlich unbrauchbar. Diese Frage hat die Mathematik lange beschäftigt, bis schließlich Gödel bewies, dass dies für jedes Axiomensystem, das die elementare Arithmetik enthält, unmöglich ist!

Die Menge
$$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots\}$$
erfüllt die Peano-Axiome, so dass man über ein Modell der natürlichen Zahlen innerhalb der Mengenlehre verfügt. (Tatsächlich sind die Peano-Axiome schon im System ZFC versteckt ...)

Das Axiom **P5** heißt auch as **Induktionsaxiom** und ist eines der grundlegenden Prinzipien der Mathematik. Mit Worten ausgedrückt besagt es:

> *Jede Menge natürlicher Zahlen, die die Null enthält und mit jedem Element auch dessen Nachfolger, ist die Menge der natürlichen Zahlen.*

Man nutzt dieses Prinzip aus, wenn man es mit einer Situation zu tun hat, in der es für jede natürliche Zahl n eine Aussage $A(n)$ gibt, die man beweisen möchte:

[1] Leopold Kronecker, deutscher Mathematiker, 1823–1891; erbitterter Gegner von Georg Cantor.
[2] nach dem italienischen Mathematiker Giuseppe Peano, 1858–1932.

Satz 1.1 (Vollständige Induktion)**.** *Sei A eine Eigenschaft in $\mathbb{N}$. Wenn $A(0)$ und $A(n) \Rightarrow A(n^+)$ gilt, so gilt A für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Definiere die Menge $M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n)\}$. Nach Voraussetzung gilt $0 \in M$ sowie $n \in M \Rightarrow n^+ \in M$. Mit **P5** folgt daher $M = \mathbb{N}$. □

Das Induktionsprinzip erlaubt auch sogenannte *induktive Definitionen*: Möchte man für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element a_n einer Menge A definieren, so kann man dies tun, indem man a_0 festlegt und eine Vorschrift angibt, wie man für beliebiges $n \geq 0$ das Element a_{n^+} aus dem Element a_n gewinnt. Formal ausgedrückt bedeutet dies:

Satz 1.2 (Induktive Definition)**.** *Sei M eine Menge, $f\colon \mathbb{N} \times M \to M$ eine Abbildung und $a \in M$. Durch*

$$\phi(0) := a \text{ und } \phi(n^+) := f(n, \phi(n))$$

ist eine eindeutig bestimmnte Funktion $\phi\colon \mathbb{N} \to M$ definiert.

Beweis. Sei $A(n)$ die Aussage „$\phi(n)$ ist eindeutig bestimmt“. Dann gilt $A(0)$, denn $\phi(0)$ ist durch a eindeutig festgelegt. Wenn $A(n)$ gilt, d.h. wenn $\phi(n)$ eindeutig bestimmt ist, dann ist $\phi(n^+)$ durch $f(n, \phi(n))$ festgelegt. Also ist $\phi(n)$ für alle natürlichen Zahlen eindeutig bestimmt. □

Jede natürliche Zahl $n \neq 0$ hat auch einen eindeutig bestimmten Vorgänger n^- hat, d.h. zu jedem $n \neq 0$ gibt genau ein $n^- \in \mathbb{N}$ mit $(n^-)^+ = n$: 1 hat einen Vorgänger, und wenn m einen hat, so auch m^+ (nämlich m). Also haben alle Zahlen ungleich 0 einen Vorgänger, der nach **P4** eindeutig bestimmt ist. Damit kann man die induktive Definition von ϕ umschreiben zu einer *rekursiven* Definition:

$$\phi(0) := a, \quad \phi(n) := f(n^-, \phi(n^-)) \text{ für alle } n \neq 0.$$

Man nennt eine solche Definition rekursiv, da der Wert an der Stelle n aus dem Wert des Vorgängers bestimmt wird.

Ausgehend von den Peano-Axiomen kann man alle arithmetischen Operationen der natürlichen Zahlen erklären und ihre Eigenschaften beweisen. Für $a \in \mathbb{N}$ definiere

$$\phi_a(0) := a\,, \quad \phi_a(n^+) := \phi_a(n)^+\,.$$

Nach obigem Satz definiert dies eine eindeutig bestimmte Funktion $\phi_a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die in üblicher Schreibweise

$$\phi_a(n) = a + n$$

lautet. Damit ist also ein Funktion

$$+\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

definiert, von der man nachweisen kann, dass sie die üblichen Rechenregeln (Assoziativgesetz, Kommutativgesetz) erfüllt.

Für die Multiplikation geht man nun wie folgt vor: Für ein $a \in \mathbb{N}$ setze

$$\psi_a(0) := 0 \text{ und } \psi_a(n^+) := \psi_a(n) + a\,.$$

Nach dem Induktionssatz definiert das wiederum eine Funktion $\psi_a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die die Multiplikation mit a repräsentiert:

$$\psi_a(n) = a \cdot n\,.$$

Durch vollständige Induktion weist man nach, dass die Abbildung

$$\cdot\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

kommutativ, assoziativ und distributiv bezüglich der Addition ist, wobei letzteres

$$k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$$

bedeutet. Insbesondere gilt $k \cdot 1 = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Schließlich definiert man auf $\mathbb{N}$ eine Totalordnung durch

$$\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq n \quad \wedge \quad \forall m, n \in \mathbb{N}_+\ (m \leq n \Leftrightarrow m^- \leq n^-)$$

wobei $\mathbb{N}_+$ die Menge der natürlichen Zahlen ungleich Null ist; diese Definition ist rekursiv.

Eine andere Folgerung aus dem Induktionsprinzip ist:

Satz 1.3. *Das Induktionsaxiom ist äquivalent zum Satz vom kleinsten Element: Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen besitzt ein kleinstes Element.*

Beweis. Durch Induktion. Sei $A(n)$ die Aussage „wenn M ein Element $\leq n$ enthält, so hat M ein kleinstes Element". Die Aussage $A(0)$ ist sicherlich wahr, denn enthält die Menge M die Zahl 0, so ist 0 das kleinste Element. Zu zeigen ist $A(n) \Rightarrow A(n+1)$. Sei also M eine Menge, die ein Element $\leq n+1$ enthält. Dann ist entweder $n+1$ das kleinste Element, oder es gibt noch ein kleineres, das dann aber $\leq n$ ist. Aber wegen $A(n)$ enthält dann M auch ein kleinstes Element.
Sei nun umgekehrt der Satz vom kleinsten Element vorausgesetzt, und es seien die Voraussetzungen der vollständigen Induktion erfüllt: $A(0)$ ist wahr und auch $A(n) \Rightarrow A(n^+)$. Definiere die Menge $M := \{n \in \mathbb{N} \mid \neg A(n)\}$. Wenn diese Menge nicht leer ist, hat sie ein kleinstes Element $n_0 \neq 0$. Der Vorgänger n_0^- muss dann ebenfalls in M liegen, da sonst aus $A(n_0^-)$ sofort $A(n_0)$ folgte. Aber dann ist n_0 kein kleinstes Element und die Menge M muss doch leer gewesen sein. □

Die Ordnung auf den natürlichen Zahlen ist also eine Wohlordnung. Eine Anwendung des Satzes vom kleinsten Element ist folgende Verallgemeinerung des Induktionsprinzips:

Satz 1.4 (Prinzip der vollständigen Induktion)**.** *Sei $p \in \mathbb{N}$ und A eine Aussage über natürliche Zahlen, so dass $A(p)$ gilt sowie die Aussage:*

$$\Big(\forall p \leq m \leq n \ A(m)\Big) \ \Rightarrow A(n^+)$$

Dann gilt die Aussage $A(n)$ für alle $n \geq p$.

Beweis. Definiere

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid n < p \ \vee \ \forall m \ (p \leq m \leq n \ \Rightarrow A(m))\}\,.$$

M enthält alle $n \leq p$, und wenn sie $n \geq p$ enthält, so auch n^+. Damit erfüllt M die Voraussetzungen von **P5**; es gilt also $M = \mathbb{N}$ und die Behauptung folgt. □

In der Folge soll dieser axiomatische Standpunkt nicht weiter verfolgt werden. (Insbesondere schreiben wir jetzt wieder $n+1$ anstelle von n^+.) Angesichts der intuitiven Vorstellung von den natürlichen Zahlen, in der die Axiome **P1** bis **P5** unmittelbar einsichtige Eigenschaften sind, kann er wie eine fruchtlose logische Spielerei erscheinen. Die Bedeutung dieser Überlegungen liegt auch nicht in einem rechnerischen Nutzen, sondern darin, dass sie zeigen, wie die gesamte Arithmetik auf die fünf Axiome von Peano reduziert werden kann.

2. Einige Beispiele für Induktionsbeweise

Um noch einmal zusammenzufassen, die Vorgehensweise beim Induktionsbeweis ist die folgende:

1. **Induktionsanfang:** Nachweis der Aussage $A(p)$ für ein $p \in \mathbb{N}$.
2. **Induktionsschluss:** Nachweis der Implikation $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$ für $n \geq p$; hierbei nennt man die Aussage $A(n)$ die Induktionsvoraussetzung oder Induktionsannahme.

Hat man diese beiden Nachweise geführt, folgt, dass die Aussage für alle $n \geq p$ gilt. Oft nimmt man $p = 0$ oder $p = 1$, aber dies ist nicht zwingend.

Bevor einige Beispiele ür Induktionsbeweise präsentiert werden können, soll noch die Summen- und Produktnotation eingeführt werden. Sei $(a_i)_{i\in I}$ eine endliche Familie von Zahlen. Dann bezeichnet man mit

$$\sum_{i\in I} a_i \quad \text{bzw.} \quad \prod_{i\in I}$$

die Summe bzw. das Produkt aller dieser Zahlen a_i. Für eine endliche Familie $\{a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n\}$ und $m \leq j \leq k \leq n$ schreibt man auch

$$\sum_{i=j}^{k} a_i = a_j + a_{j+1} + \cdots + a_k \quad \text{sowie} \quad \prod_{i=j}^{k} a_i = a_j \cdot a_{j+1} \cdot \ldots \cdot a_k$$

für Summe und Produkt der Zahlen $a_j, a_{j+1}, \ldots, a_k$. Der „Laufindex" i kann dabei durch ein beliebiges anderes Symbol ersetzt werden; das muss dann allerdings überall dort geschehen, wo i auftritt:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + i \cdot a_{i+1}) = \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu + \nu \cdot a_{\nu+1})$$

Ebenfalls gebräuchlich ist folgende Notation: Sei A eine endliche Menge von Zahlen, dann ist

$$\sum_{a \in A} a \quad \text{bzw.} \quad \prod_{a \in A} a$$

die Summe bzw. das Produkt aller Elemente von A; das kann man so schreiben, da es auf die Reihenfolge der Summation bzw. Multiplikation nicht ankommt.

Für eine leere Indexmenge ist die Summe per Definition gleich 0 und das Produkt gleich 1. Erfahrungsgemäß Schwierigkeiten bereitet das Umindizieren einer Summe oder eines Produkts. Damit ist folgendes gemeint: Ist $\sigma\colon I \to J$ eine bijektive Abbildung, so gilt offenbar

$$\sum_{j \in J} a_{\sigma(j)} = \sum_{i \in I} a_i \quad \text{bzw.} \quad \prod_{j \in J} a_{\sigma(j)} = \prod_{i \in I} a_i\,.$$

So ist zum Beispiel

$$\sum_{i=j-2}^{k-2} a_i = \sum_{i=j}^{k} a_{i-2}$$

durch Verschieben der Indexmenge um 2. Des weiteren kann man Summen und Produkte aufteilen: ist $I = I_1 \cup I_2$ mit $I_1 \cap I_2 = \varnothing$, so gilt

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i$$

und analog für Produkte. Zwei Beispiele:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \qquad \text{falls } 1 \leq m \leq n$$

$$\sum_{i=0}^{2n+1} a_i = \sum_{j=0}^{n} a_{2j} + \sum_{k=0}^{2n} a_{2k+1}$$

Etwas allgemeiner gilt, falls $I = I_1 \cup I_2$ (aber nicht notwendig $I_1 \cap I_2 = \varnothing$),

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i - \sum_{i \in I_1 \cap I_2} a_i\,.$$

Um den Fehler, der durch das zweimalige Addieren aller a_i, deren Index im Schnitt liegt, zu korrigieren, muss man die Summe über $I_1 \cap I_2$ wieder abziehen.

Nun zum eigentlichen Zweck dieses Abschnitts, den Beispielen. Das erste, das Problem der Summe der Zahlen von 1 bis n, hat Gauß[3] als Volksschüler gelöst:

Satz 2.1. *Für jede natürliche Zahl n gilt*

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2.1}$$

[3] Carl Friedrich Gauß, 1777 – 1855, einer der einflussreichsten Mathematiker überhaupt. Ein wenig schmeichelhaftes Porträt findet man in Daniel Kehlmanns Roman „Die Vermessung der Welt".

Beweis. Sei $A(n)$ die Behauptung für die Zahl n.
Induktionsanfang: Es gilt $A(0)$, denn für $n = 0$ sind beide Seiten der Gleichung (2.1) gleich 0.

Induktionsschluss: Wir nehmen an, $A(n)$ sei wahr (Induktionsannahme). Zu zeigen ist, dass dann auch $A(n+1)$ gilt, also die Aussage

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2} .$$

Aber es ist

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} ,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Satz 2.2. *Es sei n eine natürliche Zahl und $q \neq 1$ eine reelle Zahl. Dann gilt*

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} . \tag{2.2}$$

Beweis. Sei $A(n)$ die Behauptung für die natürliche Zahl n, also die Aussage

$$\text{es gilt} \quad \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} .$$

Dann ist $A(0)$ offensichtlich, denn $q^0 = 1 = \frac{q-1}{q-1}$. Den Induktionsschluss führen wir wie folgt: Sei $A(n)$ wahr. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} q^i &= \left(\sum_{i=0}^{n} q^i\right) + q^{n+1} \\
&= \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} && \text{(Induktionsannahme)} \\
&= \frac{q^{n+1}-1+q^{n+1}(q-1)}{q-1} \\
&= \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} \\
&= \frac{q^{n+2}-1}{q-1}
\end{aligned}$$

und damit $A(n+1)$. □

Satz 2.3 (Bernoullische Ungleichung[4])**.** *Sei $x \geq -1$ eine reelle Zahl. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen*

$$1 + nx \leq (1+x)^n .$$

Beweis. Für eine natürliche Zahl n sei $A(n)$ die Aussage

$$\text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \geq -1 \text{ gilt die Ungleichung } 1 + nx \leq (1+x)^n.$$

Offenbar ist $A(0)$ wahr, denn $1 + 0x = 1 = (1+x)^0$ für jedes x.
Sei nun $A(n)$ als wahr angenommen (Induktionsvoraussetzung). Wegen $x \geq -1$ ist $1 + x \geq 0$, also folgt aus den Rechenregeln für Ungleichungen und der Induktionsvoraussetzung

$$(1+x)(1+nx) \leq (1+x)(1+x)^n = (1+x)^{n+1} .$$

[4] nach Jakob Bernoulli (der Ältere), Schweizer Mathematiker, 1655–1705.

Andererseits gilt immer $nx^2 \geq 0$, folglich

$$1 + (n+1)x \leq 1 + (n+1)x + nx^2 = 1 + x + nx + nx^2 = (1+nx)(1+x)\,,$$

also (wegen Transitivität von $\leq$) zusammengenommen $A(n+1)$. $\square$

Aus der Bernoullischen Unlgeichung erhält man mittels Induktion auch die sogenannte AGM-Ungleichung, die besagt, dass das arithmetische Mittel stets größer oder gleich dem geometrischen Mittel ist: es heißt

$$A(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

das arithmetische Mittel der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und

$$G(b_1, \ldots, b_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i} = \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n}$$

das geometrische Mittel der nichtnegativen Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Satz 2.4 (AGM-Ungleichung)**.** *Sei n eine natürliche Zahl und seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nichtnegative reelle Zahlen. Dann gilt*

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n \geq x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n\,.$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn alle x_i gleich sind.

Beweis. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei $A(n)$ die Aussage, dass die Ungleichung für n nichtnegative reelle Zahlen gilt (Induktionsvoraussetzung). Seien nun $x_1, \ldots, x_{n+1}$ reelle Zahlen; sie seien so numeriert, dass x_{n+1} das Maximum der Menge dieser Zahlen ist. Sei weiterhin $a = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ das arithmetische Mittel von $x_1, \ldots, x_n$. Dann gilt $x_{n+1} - a \geq 0$. Aus der Bernoullischen Ungleichung folgt

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{(n+1)\cdot a}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x_{n+1} - a}{(n+1)\cdot a}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{x_{n+1} - a}{a} = \frac{x_{n+1}}{a}\,.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt dann

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = a^{n+1}\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{(n+1)\cdot a}\right)^{n+1} \geq a^{n+1}\frac{x_{n+1}}{a} = a^n \cdot x_{n+1} \geq x_1 \cdots x_n x_{n+1}\,,$$

also gerade die Aussage $A(n+1)$.

Für die zweite Aussage ist die eine Richtung klar: wenn alle x_i gleich sind, stimmen arithmetisches und geometrisches Mittel offenbar überein. Die andere Richtung folgt wieder per Induktion: Sei $B(n)$ die Aussage: gilt $A(x_1, \ldots, x_n) = G(x_1, \ldots, x_n)$ für n Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, so sind alle x_i gleich (Induktionsvoraussetzung). Seien nun $x_1, \ldots, x_{n+1}$ Zahlen, so dass arithmetisches und geometrisches Mittel übereinstimmen. Dann müssen in der obigen Rechnung beide Ungleichungen Gleichungen sein. Nun gilt in der Bernoullischen Ungleichung $(1+x)^m \geq 1 + mx$ Gleichheit nur dann, wenn $x = 0$ ist. Es folgt also $x_{n+1} = a$ und $a^n = x_1 \cdots x_n$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt daher $x_1 = \ldots = x_n$ und dann auch $x_{n+1} = x_1$. $\square$

3. Elementare Kombinatorik

Kombinatorik ist die mathematische Disziplin, die sich mit dem Studium der endlichen Mengen beschäftigt. Nun könnte man sagen, viel gebe es über endliche Mengen nicht zu entdecken, aber es kommt auf die Fragestellung an. Typische Probleme der Kombinatorik betreffen Fragen der Art: wieviele mögliche Anordnungen von n Objekten gibt es? Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einem Topf mit 49 Kugeln 6 Kugeln zu ziehen? Und wenn ich die einmal gezogenen Kugeln wieder zurückwerfe? Manchmal sind solche kombinatorischen Probleme mit arithmetischen verknüpft: wieviele Möglichkeiten gibt es, eine ganze Zahl n als Summe von m positiven ganzen Zahlen zu schreiben?

Wie üblich müssen erst einmal einige Vokabeln eingeführt werden:

Definition 3.1. (a) *Für $n \in \mathbb{N}$ sei $n!$ rekursiv definiert durch*

$$0! = 1 \quad \textit{und} \quad (n+1)! = n! \cdot (n+1)\,.$$

(b) *Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \le n$ sei*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\,.$$

$n!$ nennt man n Fakultät und $\binom{n}{k}$ heißt der Binomialkoeffizient n über k.

Es ist also

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i}\,.$$

Bemerkung. In dieser letzten Form kann man die Binomialkoeffizienten verallgemeinern: für $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\binom{x}{k} = \begin{cases} \prod_{i=1}^{k} \frac{x-i+1}{i} = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!} & \text{falls } k \ge 0, \\ 0 & \text{falls } k < 0. \end{cases}$$

Damit erhält man insbesondere $\binom{n}{k} = 0$ falls $n, k \in \mathbb{Z}$ und $n < k$.

Lemma 3.2. *Für natürliche Zahlen $1 \le k \le n$ gilt*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}\,.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \cdot \left(\frac{n-k+1}{k} + 1\right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \cdot \frac{n+1}{k} \\ &= \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Diese Formel gilt auch für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$.

Mit Hilfe dieses Lemmas kann man leicht eine Liste von Binomialkoeffizienten in einem *Pascalschen Dreieck* anfertigen: in jeder Zeile stehen die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}, \ldots \binom{n}{n}$, und die nächste Zeile erhält man, indem man je zwei aufeinanderfolgende Einträge addiert und zwischen diesen beiden

Zahlen (eine Zeile tiefer) plaziert.

n							$\binom{n}{k}$						
0							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		6		1

Dieses Schema zeigt eine Spiegelsymmetrie, aber das ist auch nicht verwunderlich: aus der Definition sieht man unmittelbar

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun folgende Verallgemeinerung der binomischen Formeln beweisen:

Satz 3.3 (Binomischer Lehrsatz)**.** *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}.$$

Für $n = 2$ ergibt sich die erste binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Es sei $A(n)$ die Behauptung des Satzes für n; die Aussage $A(0)$ ist klar. Es gelte nun $A(n)$, dann rechnen wir für den Fall $n+1$ unter Verwendung von $A(n)$ und Lemma 3.2 nach:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}\cdot b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n-k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}\cdot b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n-k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k\cdot b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n-k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1} n\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)a^k\cdot b^{n-k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k\cdot b^{n-k+1} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k\cdot b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

□

Zwischen endlichen Mengen X und Y kann es nur endlich viele verschiedene Abbildungen geben, und diese kann man leicht zählen: sind n und m die Elementanzahlen von X beziehungsweise Y, so kann man jedes der n Elemente von X auf jedes der m Elemente von Y schicken, das ergibt n^m Möglichkeiten, also n^m verschiedene Abbildungen. Ebenso kann man bijektive Abbildungen (zwischen notwendigerweise gleichmächtigen Mengen) zählen:

Satz 3.4. *Seien X und Y endliche Mengen mit $\#X = \#Y = n$.*

(a) *Es gibt $n!$ bijektive Abbildungen von X nach Y.*
(b) *Die Anzahl der Anordnungen von X ist $n!$.*
(c) $\#\mathscr{P}(X) = 2^n$.

Beweis. (a) Im Fall $n = 0$ ist nichts zu zeigen; im Fall $n = 1$ gibt es genau eine Abbildung $X \to Y$, und diese ist trivialerweise bijektiv. X habe nun $n + 1$ Elemente und sei $x \in X$ fest gewählt. Wir setzen $X' = X - \{x\}$, die Induktionsannahme ist, dass es $n!$ bijektive Abbildungen von X' in eine n-elementige Menge gibt. Sei nun $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung. Dann gibt es genau ein $y \in Y$ mit $f(x) = y$; die Abbildung f definiert also eine bijektive Abbildung $f' : X' \to Y - \{y\} = Y'$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $n!$ bijektive Abbildungen $X' \to Y'$ und damit $n!$ bijektive Abbildungen $X \to Y$, die x auf y schicken. Da es für y genau $(n+1)$ Möglichkeiten gibt, existieren $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$ bijektive Abbildungen $X \to Y$, was zu zeigen war.

(b) folgt aus (a), denn eine Anordnung ist gerade eine Bijektion $\{1, \ldots, n\} \to X$.

(c) Die Behauptung ist wieder klar für $n = 0$. Sei also $\#X = n + 1$ und $x \in X$ fest gewählt; wir setzen $X' = X - \{x\}$. Sei nun $T \subset X$ eine Teilmenge, dann ist entweder (i) $T \subset X'$ oder (ii) $T = T' \cup \{x\}$ mit $T' \subset X'$. Für beide Fälle gibt es nach Induktionsvoraussetzung jeweils 2^n Möglickeiten, also zusammen $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. □

Satz 3.5. *Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$.*

Beweis. Durch vollständige Induktion über n. Für $n = 0$ ist dies klar: die leere Menge hat nur sich selbst als Teilmenge, andererseits ist $\binom{0}{0} = 1$.
Sei also X eine Menge mit $(n + 1)$ Elementen $(n \geq 0)$; die Induktionsannahme ist, dass jede Teilmenge von X mit n Elementen $\binom{n}{k}$ Teilmengen der Mächtigkeit k hat, und wir müssen die k-elementigen Teilmengen von X zählen. Für $k = 0$ ist $\varnothing$ die einzige k-elementige Teilmenge, die Behauptung stimmt also für $k = 0$ und wir können $k > 0$ annehmen. Sei $x \in X$ ein fest gewähltes Element und $Y = X - \{x\}$. Die k-elementigen Teilmengen von X zerfallen in zwei Klassen:

I: k-elementige Teilmengen von Y,
II: Teilmengen, die x enthalten; letztere sind von der Form $A \cup \{x\}$ für eine $(k-1)$-elementige Teilmenge A von Y.

Nach Induktionsvoraussetzung besteht die Klasse I aus $\binom{n}{k}$ und die Klasse II aus $\binom{n}{k-1}$ Teilmengen; die Behauptung folgt nun aus Lemma 3.2. □

Beispiel (Zahlenlotto)**.** Das Tippen von 6 Zahlen zwischen 1 und 49 entspricht der Wahl einer 6-elementigen Teilmenge einer Menge mit 49 Elementen. Es gibt also $\displaystyle\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ verschiedene Möglichkeiten, 6 Zahlen aus 49 auszuwählen.

Wie sieht jedoch die Situation bei 4 Richtigen aus, also wieviele Möglichkeiten gibt es, dass von den 6 getippten Zahlen 4 unter den 6 gezogenen Zahlen vorkommen? Dieses Problem entspricht der Auswahl einer 4-elementigen Teilmenge einer 6-elementigen Menge und andererseits (unabhängig davon) der Auswahl einer 2-elementigen Teilmenge (den Nieten) aus einer 43-elementigen Menge (den nicht gezogenen Zahlen). Man erhält somit

$$\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 13\,545$$

Möglichkeiten.

Korollar 3.6. *Sei $\#X = n$ und $\#K = k$. Dann gibt es $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ injektive Abbildungen $f : K \to X$.*

Beweis. Das Bild B einer solchen injektiven Abbildung ist eine k-elementige Teilmenge von X. Andererseits gibt es nach Satz 3.4(a) genau $k!$ bijektive Abbildungen $K \to B$, also $\binom{n}{k} \cdot k!$ injektive Abbildungen $K \to X$. □

Der Satz 3.5 lässt sich verallgemeinern: angenommen wir wollen eine Gruppe von Personen auf Räume so verteilen, dass jeder Raum eine vorgegebene Anzahl von Personen enthält. Wieviele Möglihkeiten es dafür gibt, sagt us der folgende Satz:

Satz 3.7. *Sei $k = k_1 + \cdots + k_n$. Die Anzahl der Möglichkeiten, k Personen auf n Räume zu verteilen, so dass sich im i-ten Raum k_i Personen befinden, ist der Multinomialkoeffizient*

$$\binom{k}{k_1, \ldots, k_n} = \frac{k!}{k_1! k_2! \ldots k_n!}.$$

Bemerkung. Für $n = 2$ ist $\binom{k}{k_1, k_2} = \binom{k}{k_1} = \binom{k}{k_2}$ und allgemeiner

$$\binom{k}{k_1, \ldots, k_n} = \binom{k_1}{k_1} \cdot \binom{k_1 + k_2}{k_2} \cdot \ldots \cdot \binom{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}{k_n} = \prod_{i=1}^{n} \binom{\sum_{j=1}^{i} k_i}{k_i}.$$

Beweis des Satzes. Induktion über n. Der Fall $n = 1$ ist trivial und der Fall $n = 2$ gerade Satz 3.5. Seien also $(n+1)$ Räume und $(n+1)$ natürliche Zahlen $k_1, \ldots, k_{n+1}$ gegeben mit $k = k_1 + \cdots + k_{n+1}$. Die Anzahl der Möglichkeiten, k_{n+1} Personen (für Raum Nummer $n + 1$) auszuwählen, beträgt $\binom{k}{k_{n+1}}$ nach Satz 3.5. Die Anzahl der Möglichkeiten, $k - k_{n+1}$ Personen auf (die übrigen) n Räume so zu verteilen, dass k_i Personen in Raum i sind, beträgt nach Induktionsvoraussetzung $\binom{k - k_{n+1}}{k_1, \ldots, k_n}$. Insgesamt erhält man also

$$\binom{k}{k_{n+1}} \cdot \binom{k - k_{n+1}}{k_1, \ldots, k_n} = \frac{k!}{k_{n+1}!(k - k_{n+1})!} \cdot \frac{(k - k_{n+1})!}{k_1! \ldots k_n!} = \frac{k!}{k_1! \ldots k_{n+1}!} = \binom{k}{k_1, \ldots, k_{n+1}}$$

Möglichkeiten wie behauptet. □

Beispiel. Ein Restaurant hat 4 Tische, einen mit zwei, zwei mit vier und einen mit sechs Plätzen. Herein kommen 16 Personen. Dann gibt es

$$\binom{16}{2, 4, 4, 6} = \frac{16!}{2! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 6!} = 25\,225\,200$$

verschiedene Tischordnungen.

Die Namensgebung Multinomialkoeffizient entstammt dem

Satz 3.8 (Multinomialsatz)**.** *Es seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(x_1 + x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n \\ k_1 + \cdots + k_n = k}} \binom{k}{k_1, \ldots, k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}.$$

Dabei soll die Notation bedeuten, dass über alle n-Tupel natürlicher Zahlen $(k_1, \ldots, k_n)$ mit $k_1 + \cdots + k_n = k$ summiert wird.

Beweis. Dies folgt per Induktion über n unter Benutzung des Binomischen Lehrsatzes (Satz 3.3). Zunächst ist die Behauptung wieder klar für $n = 1$: beide Seiten ergeben x_1^k; für $n = 2$ ist die Behauptung gerade Satz 3.3. Wir nehmen nun an, dass der Satz für n wahr ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}(x_1 + \cdots x_n + x_{n+1})^k &= \big(x_1 + x_2 + \cdots + (x_n + x_{n+1})\big)^k \\ &= \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_{n-1}, K \\ k_1 + \cdots + k_{n-1} + K = k}} \binom{k}{k_1, \ldots, k_{n-1}, K} x_1^{k_1} \ldots x_{n-1}^{k_{n-1}} (x_n + x_{n+1})^K\end{aligned}$$

nach Induktionsvoraussezung. Wendet man den Binomischen Lehrsatz auf den letzten Faktor an, erhält man

$$= \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_{n-1},K \\ k_1+\cdots+k_{n-1}+K=k}} \binom{k}{k_1,\ldots,k_{n-1},K} x_1^{k_1}\ldots x_{n-1}^{k_{n-1}} \sum_{k_n+k_{n+1}=K} \binom{K}{k_n,k_{n+1}} x_n^{k_n} x_{n+1}^{k_{n+1}}$$

$$= \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_{n-1},k_n,k_{n+1} \\ k_1+\cdots+k_{n-1}+k_n+k_{n+1}=k}} \binom{k}{k_1,\ldots,k_{n-1},k_n,k_{n+1}} x_1^{k_1}\ldots x_{n-1}^{k_{n-1}} x_n^{k_n} x_{n+1}^{k_{n+1}}$$

Der letzte Schritt folgt dabei aus

$$\binom{k}{k_1,\ldots,k_{n-1},K}\binom{K}{k_n,k_{n+1}} = \frac{k!}{k_1!\ldots k_{n-1}!K!}\cdot\frac{K!}{k_n!k_{n+1}!} = \frac{k!}{k_1!\ldots k_{n+1}!} = \binom{k}{k_1,\ldots,k_{n+1}}.$$

$\square$