

## Übungen Vorkurs Mathematik Wintersemester 2009/2010

Blatt 12

29.09.09

**Aufgabe 1:** Finden Sie den größten gemeinsamen Teiler von 1113 und 819, und stellen Sie ihn in der Form  $s \cdot 1113 + t \cdot 819$  dar.

**Aufgabe 2:** (a) Seien  $n, k \in \mathbb{N}_+$  teilerfremd. Zeigen Sie, dass  $\binom{n}{k}$  durch  $n$  und  $\binom{n-1}{k-1}$  durch  $k$  teilbar ist.

(Hinweis: es gilt  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ .)

(b) Sei  $p$  eine Primzahl. Zeigen Sie: Für  $i$  mit  $0 < i < p$  ist  $p$  ein Teiler von  $\binom{p}{i}$ .

(Hinweis: Betrachten Sie die Primfaktorzerlegung von  $i! \binom{p}{i}$ .)

**Aufgabe 3:** Gibt es unendlich viele Primzahlen  $p$  mit  $p \equiv 2 \pmod{3}$ ?

**Aufgabe 4:** Seien  $n, m \in \mathbb{N}_+$  teilerfremd. Die Folge  $a_0, a_1, a_2, \dots$  sei rekursiv definiert durch  $a_0 = n$ ,  $a_{k+1} = a_0 \cdots a_k + m = (a_k - m)a_k + m$ . Zeigen Sie, dass die Zahlen  $a_k$  paarweise teilerfremd sind.