Übungen Vorkurs Mathematik Wintersemester 2009/2010

Blatt 9

24.09.09

Aufgabe 1: Sei X eine Menge und seien A, B, C Teilmengen von X .

(a) Zeigen Sie:

$$(a1) (A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C).$$

$$(a2) A = B \Leftrightarrow A\Delta B = \emptyset.$$

$$(a3) (A\Delta B) = (A\Delta C) \Rightarrow B = C.$$

(b) Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ seien zwei Operationen $\oplus$ („Addition“) und $\odot$ („Multiplikation“) definiert durch

$$A \oplus B = A\Delta B$$

$$A \odot B = A \cap B$$

Untersuchen Sie diese Operationen auf die üblichen Rechengesetze (Assoziativität, Kommutativität, Distributivität, neutrale Elemente, Inverse).

Aufgabe 2: Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Durch $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ist eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

(b) Die Äquivalenzklassen aus (a) sind gerade die Urbildmengen $f^{-1}(y)$, $y \in Y$.

Aufgabe 3: Zeigen Sie: Sei R eine Äquivalenzrelation auf der Menge M . Dann gibt es eine Menge N und eine surjektive Abbildung $f: M \rightarrow N$, so dass die Äquivalenzklassen von R die Urbildmengen $f^{-1}(n)$, $n \in N$, sind.