

Übungen Vorkurs Mathematik Wintersemester 2009/2010

Blatt 8

23.09.09

Aufgabe 1: Zeigen Sie:

- (a) $2^n \leq n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.
- (b) $n^2 \leq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 3$.
- (c) $(n+1)^2 \leq 3^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 1$.
- (d) Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $n^3 \leq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > k$.
- (e) $n! \leq n^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.

Aufgabe 2: Zeigen Sie durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

- (a)
$$\sum_{k=0}^n k \cdot (k!) = (n+1)! - 1$$
- (b)
$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = 4^n.$$
- (c)
$$\sum_{k=0}^n 2^{n-k} \binom{n+k}{k} = 4^n.$$
- (d)
$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Aufgabe 3: Sei M eine Menge mit n Elementen. Zeigen Sie:

- (a) Die Zahl der Paare (A, B) disjunkter Teilmengen A, B von M ist 3^n .
- (b) Die Zahl der m -Tupel paarweise disjunkter Teilmengen von M ist $(m+1)^n$.