

Übungen Vorkurs Mathematik Wintersemester 2009/2010

Blatt 7

22.09.09

Die folgenden Aufgaben sind eine Auswahl von Übungen zur vollständigen Induktion.

Aufgabe 1: Zeigen Sie:

$$(a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

$$(b) \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}.$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

$$(b) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2.$$

$$(c) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}k = \frac{1}{4}(1 + (-1)^{n-1}(2n+1)).$$

$$(d) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$(e) \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

$$(f) \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2-1).$$

$$(g) \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$

$$(b) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$