Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen Topologie II   Sommersemester 2009

Blatt 12

Aufgabe 1: Zeigen Sie: $\mathbb{RP}^3 \not\simeq \mathbb{RP}^2 \vee S^3$.

Aufgabe 2: Sei $f\colon \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Sei n gerade. Dann hat f einen Fixpunkt.

(b) Sei n ungerade. Hat f keinen Fixpunkt, so gilt $f^*(x) = -x$ für ein Erzeugendes $x \in H^2(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Z})$.

[Hinweis: Benutzen Sie die Lefschetz-Zahl.]

Aufgabe 3: Die Koeffizientensequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z}/4 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

ist exakt. Für einen topologischen Raum X ist dann

$$0 \to S^*(X;\mathbb{Z}/2) \longrightarrow S^*(X;\mathbb{Z}/4) \longrightarrow S^*(X;\mathbb{Z}/2) \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Zeigen Sie, daß der zugehörige Randoperator

$$\beta\colon H^n(X;\mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^{n+1}(X;\mathbb{Z}/2)$$

eine *Derivation* bezüglich des cup-Produkts ist, d.h. daß für je zwei homogene Elemente $x, y \in H^*(X;\mathbb{Z}/2)$ gilt: $\beta(x \cup y) = \beta(x) \cup y + x \cup \beta(y)$.

Aufgabe 4: Der Raum X sei die Vereinigung von n offenen, zusammenziehbaren Teilmengen $U_1, \dots, U_n$. Zeigen Sie, daß dann jedes n-fache Produkt $x_1 \cup \dots \cup x_n$ von Elementen $x_i \in H^{k_i}(X;R)$ mit $k_i \geq 1$, $i = 1, \dots, n$, verschwindet.

[Hinweis: Betrachten Sie die relativen Gruppen $H^*(X, U_i)$.]