Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen Topologie II   Sommersemester 2009

Blatt 11

Aufgabe 1: Sei (C_*, d_*) ein nichtnegativer freier Kettenkomplex mit $H_q(C_*) = 0$ für alle q. Zeigen Sie: C_* ist kettenhomotopieäquivalent zum Nullkomplex N_* mit $N_k = 0$ für alle k.

Aufgabe 2: Seien (K_*, d_*^K) und (L_*, d_*^L) nichtnegative freie Kettenkomplexe und sei $f\colon K_* \to L_*$ eine Kettenabbildung. Folgern Sie aus Aufgabe 2: Ist $H_*(f)$ ein Isomorphismus, so ist f eine Kettenhomotopieäquivalenz.
[Hinweis: Betrachten Sie den Abbildungskegel C_* von f mit $C_n = L_n \oplus K_{n-1}$; siehe Blatt 2, Aufgabe 3.]

Aufgabe 3: (a) Seien X, Y wegzusammenhängend mit Basispunkten x_0 bzw. y_0. Zeigen Sie, daß für die von den Inklusionen $i_1\colon X \to X \times Y$ und $i_2\colon Y \to X \times Y$ in Homologie induzierten Abbildungen gilt:

$$\begin{aligned} i_{1*}(u) &= u \times 1 \quad , \quad u \in H_*(X)\,; \\ i_{2*}(v) &= 1 \times v \quad , \quad v \in H_*(Y)\,. \end{aligned}$$

Unter $1 \in H_0$ verstehen wir dabei die Homologieklasse eines beliebigen Punktes.

(b) Der Torus $T = S^1 \times S^1$ ist eine topologische Gruppe mit Multiplikationsabbildung

$$\mu\colon T \times T \to T\,.$$

Berechnen Sie die von μ in $H_*(\ \ ;\mathbb{Z})$ induzierte Abbildung.

Aufgabe 4: Seien X und Y endliche CW-Komplexe und $f\colon X \to X$ sowie $g\colon Y \to Y$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie, daß für die Lefschetz-Zahl Λ gilt:

$$\Lambda(f \times g) = \Lambda(f)\Lambda(g)\,.$$