Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen Topologie II Sommersemester 2009

Blatt 10

Aufgabe 1: Seien $\varepsilon\colon P_* \to M$ und $\eta\colon Q_* \to N$ projektive Auflösungen des Rechts-R-Moduls M bzw. des Links-R-Moduls N. Zeigen Sie: $\mathrm{id}\otimes\eta\colon P_*\otimes_R Q_* \to P_*\otimes_R N$ induziert einen Isomorphismus in Homologie

$$H_n(P_* \otimes_R Q_*) \cong H_n(P_* \otimes_R N)$$

und folglich einen Isomorphismus

$$H_n(P_* \otimes_R Q_*) \cong \mathrm{Tor}_n^R(M, N)\,.$$

[Hinweis: Definieren Sie $F^k \subset P_* \otimes_R Q_*$ als den von allen $P_i \otimes_R Q_j$, $i \leq k$, erzeugten Unterkomplex, sowie $G^k \subset P_* \otimes_R N$ als $\bigoplus_{j\leq k} P_j \otimes_R N$. Dann hat man Ketten von Inklusionen

$$\begin{aligned} 0 = F^{-1} \subset F^0 \subset F^1 \subset \cdots \subset P_* \otimes_R Q_*\,, \\ 0 = G^{-1} \subset G^0 \subset G^1 \subset \cdots \subset P_* \otimes_R N\,, \end{aligned}$$

und $\mathrm{id}\otimes\eta$ bildet F^k in G^k ab.
Dann gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} H_{n+1}(F^k/F^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H_n(F^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(F^k) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(F^k/F^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H_{n-1}(F^{k-1}) \arrow[d] \\ H_{n+1}(G^k/G^{k-1}) \arrow[r] & H_n(G^{k-1}) \arrow[r] & H_n(G^k) \arrow[r] & H_n(G^k/G^{k-1}) \arrow[r] & H_{n-1}(G^{k-1}) \end{tikzcd}$$

Schließen Sie nun per Induktion über k.]

Aufgabe 2: Sei R ein Hauptidealring und K ein Kettenkomplex über R. Zeigen Sie: Es gibt einen Kettenkomplex K' freier R-Moduln und eine surjektive Kettenabbildung $f\colon K' \to K$, die einen Isomorphismus in Homologie induziert.
[Hinweis: Schreiben Sie Z_n als Quotienten eines freien Moduls F_n. Sei R_{n+1} das Urbild von B_n in F_n; dann kann man K'_* mit $K'_n = F_n \oplus R_n$ zu einem Kettenkomplex machen und eine Kettenabbildung definieren, die das verlangte leistet.]

Aufgabe 3: Folgern Sie aus Aufgabe 2: Sei R ein Hauptidealring und seien K_*, L_* torsionsfreie Kettenkomplexe über R. Dann ist die Künneth-Sequenz spaltend exakt.