Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen Topologie II   Sommersemester 2009

Blatt 9

Aufgabe 1: Sei K ein Körper. Berechnen Sie $\mathrm{Tor}_n^R(K, K)$ für

(a) $R = \Lambda(x)$ (die äußere Algebra über K auf einem Erzeugenden x)

(b) $R = K[x]$ (die Polynomalgebra über K)

(c) $R = K[x]/(x^r)$, $1 < r < \infty$.

Die R-Modulstruktur von K sei dabei in allen Fällen durch $\varepsilon\colon R \to K$, $\varepsilon(f) = f(0)$ gegeben.

Aufgabe 2: Sei $R = \mathbb{Z}[t]$. Dann induziert der durch $t \mapsto 1$ definierte Ringhomomorphismus $R \to \mathbb{Z}$ eine R-Modulstruktur auf $\mathbb{Z}$. Sei ferner $\mathbb{Z}/2$ vermöge $\varepsilon\colon R \to \mathbb{Z}/2$, $\varepsilon(f) = f(0) \bmod 2$, ein R-Modul. Berechnen Sie $\mathrm{Ext}_R^n(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z})$.

Aufgabe 3: Für ein $k \in \mathbb{N}$ sei $R = \mathbb{Z}[t]/(t^k - 1)$ und $\mathbb{Z}$ ein R-Modul vermöge des Ringhomomorphismus $\varepsilon\colon R \to \mathbb{Z}$, $t \mapsto 1$. Berechnen Sie $\mathrm{Tor}_n^R(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ und $\mathrm{Ext}_R^n(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

Aufgabe 4: Sei $(Y, \mathscr{Y})$ ein endliches Polyeder und $\pi\colon X \to Y = X/G$ eine normale k-blättrige Überlagerung mit zyklischer Decktransformationsgruppe $G = \mathbb{Z}/k$. Sei $\mathscr{X}$ die von $\mathscr{Y}$ induzierte Triangulierung von X, so daß G durch simpliziale Abbildungen operiert. Sei $T \in G$ ein Erzeugendes und $t = T_\#\colon C_*(\mathscr{X}) \to C_*(\mathscr{X})$ die indzuzierte Kettenabbildung. Dann ist $C_*(\mathscr{X})$ ein Modul über $R = \mathbb{Z}[t]/(t^k - 1)$. Zeigen Sie:

(a) π induziert einen Isomorphismus $\pi_*\colon C_*(\mathscr{X}) \otimes_R \mathbb{Z} \to C_*(\mathscr{Y})$ (wobei $\mathbb{Z}$ als trivialer R-Modul betrachtet wird).

(b) Ist $\tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}) = 0$ für $n < N$, so gilt

$$H_n(Y; \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Tor}_n^R(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$$

für $0 \leq n < N$.