

Übungen Topologie II Sommersemester 2009

Blatt 8

Aufgabe 1: Sei (X, \mathcal{X}) und (Y, \mathcal{Y}) endliche CW-Komplexe. Zeigen Sie:

- (a) $e(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \# \mathcal{X}_i$.
- (b) $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$.

Aufgabe 2: Sei R ein kommutativer Ring und $(N_i, \nu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein gerichtetes System von R -Moduln und R -Homomorphismen. Zeigen Sie:

- (a) Seien $(N'_i, \nu'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(N''_i, \nu''_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zwei weitere gerichtete Systeme von R -Moduln und $(f_i: N'_i \rightarrow N_i)$ sowie $(g_i: N_i \rightarrow N''_i)$ Familien von R -Homomorphismen, so daß $\nu_i f_i = f_{i+1} \nu'_i$ und $\nu''_i g_i = g_{i+1} \nu_i$ für jedes i gilt.

Dann induzieren (f_i) und (g_i) eindeutig bestimmte Homomorphismen

$$f: \varinjlim N'_i \rightarrow \varinjlim N_i \quad \text{und} \quad g: \varinjlim N_i \rightarrow \varinjlim N''_i,$$

und ist jede Sequenz $0 \rightarrow N'_i \xrightarrow{f_i} N_i \xrightarrow{g_i} N''_i \rightarrow 0$ exakt, so auch die resultierende Sequenz

$$0 \rightarrow \varinjlim N'_i \rightarrow \varinjlim N_i \rightarrow \varinjlim N''_i \rightarrow 0.$$

- (b) Sei M ein R -Modul. Dann gibt es kanonische Isomorphismen

$$M \otimes \varinjlim N_i \cong \varinjlim (M \otimes N_i)$$

und

$$\mathrm{Tor}^R(M, \varinjlim N_i) \cong \varinjlim \mathrm{Tor}^R(M, N_i).$$

- (c) Ist jedes N_i flach, so auch $\varinjlim N_i$.