

## Übungen Topologie II Sommersemester 2009

### Blatt 7

---

Auf diesem Blatt bezeichne  $H_n$  singuläre Homologie mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ .

**Aufgabe 1:** Sei  $X$  ein  $(T_0)$ -Raum und  $x \in X$ . Die  $k$ -te lokale Homologie von  $X$  bei  $x$  sei definiert durch

$$H_k^{\text{loc}}(X; x) := H_k(X, X - \{x\}).$$

Zeigen Sie:

- (a) Sei  $U$  eine Umgebung von  $x$  in  $X$ . Dann induziert die Inklusion  $U \hookrightarrow X$  Isomorphismen  $H_k^{\text{loc}}(U; x) \cong H_k^{\text{loc}}(X; x)$ .
- (b) Ist  $X$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, so gilt

$$H_k^{\text{loc}}(X; x) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (c) Sei  $X = S^1 \vee S^1$  und  $x \in X$  der Doppelpunkt. Berechnen Sie  $H_k^{\text{loc}}(X; x)$ .

**Aufgabe 2:** Sei  $f: S^n \rightarrow S^n$  eine stetige Abbildung ( $n > 0$ ) und  $y \in S^n$  ein Punkt mit endlichem Urbild, etwa  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$ . Seien  $U_1, \dots, U_m$  disjunkte Umgebungen der  $x_i$  und  $V$  eine Umgebung von  $y$  mit  $f(U_i) \subset V$ . Definiere den lokalen Grad  $\text{grad}(f; x_i)$  von  $f$  bei  $x_i$  als Bild der 1 unter der Komposition

$$\mathbb{Z} = H_n(S^n) \xrightarrow{\cong} H_n^{\text{loc}}(S^n; x_i) \xleftarrow{\cong} H_n^{\text{loc}}(U_i; x_i) \xrightarrow{f_*} H_n^{\text{loc}}(V; y) \xrightarrow{\cong} H_n^{\text{loc}}(S^n; y) \xleftarrow{\cong} H_n(S^n) = \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie:

$$\text{grad}(f) = \sum_{i=1}^m \text{grad}(f; x_i).$$

**Aufgabe 3:** Sei  $f \in \mathbb{C}[z]$  ein Polynom vom Grad  $d$  und  $\hat{f}: S^2 \rightarrow S^2$  die Erweiterung von  $f$  auf die Einpunktkompaktifizierung  $S^2$  von  $\mathbb{C}$ . Zeigen Sie:

- (a)  $\text{grad}(\hat{f}) = d$ .
- (b) Der lokale Grad von  $\hat{f}$  bei  $p$  ist die Vielfachheit von  $p$  als Nullstelle von  $f$ .