Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen Topologie II Sommersemester 2009

Blatt 6

Auf diesem Blatt bezeichne H_n singuläre Homologie mit Koeffizienten im kommutativen Ring R.

Aufgabe 1: Für zwei stetige Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ sei

$$Z_{f,g} := Y \cup X \times I / \big((x,0) \sim f(x),\ (x,1) \sim g(x) \big)$$

der *doppelte Abbildungszylinder* von f und g. Sei weiterhin $i\colon Y \hookrightarrow Z$ die offensichtliche Inklusion.

(a) Zeigen Sie: es gibt eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{f_* - g_*} H_n(Y) \xrightarrow{i_*} H_n(Z_{f,g}) \longrightarrow H_{n-1}(X) \xrightarrow{f_* - g_*} H_{n-1}(Y) \longrightarrow \cdots$$

(b) Benutzen Sie diese exakte Sequenz, um die Homologie der Kleinschen Flasche zu berechnen.

Aufgabe 2: Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Räume, so daß x_0 ein Deformationsretrakt einer Umgebung U von x_0 ist, analog für Y. Sei ferner $Z = X \vee Y$ die Einpunktvereinigung von X und Y.

(a) Zeigen Sie: Die Inklusionen $i_1\colon X \hookrightarrow Z$ und $i_2\colon Y \hookrightarrow Z$ induzieren Isomorphismen $\widetilde{H}_n(X) \oplus \widetilde{H}_n(Y) \to \widetilde{H}_n(Z)$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $F\colon SX \to SX \vee SX$ gegeben durch

$$F([t,x]) := \begin{cases} i_1([2t,x]) & , \ 0 \le t \le 1/2\,, \\ i_2([2t-1,x]) & , \ 1/2 \le t \le 1\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Für $u \in H_n(SX)$ gilt $F_*(u) = (u,u)$ (mit dem Isomorphismus aus (a)).

(c) Seien $f\colon X \to W$ und $g\colon Y \to W$ zwei Abbildungen sowie $h = f \vee g\colon Z \to W$. Zeigen Sie: $h_*(u,v) = f_*(u) + g_*(v)$.

(d) Sei $r\colon S^n \to S^n$ die Spiegelung am Äquator. Zeigen Sie: $r_*\colon H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ ist die Multiplikation mit -1.

(e) Konstruieren Sie eine Abbildung $f\colon S^n \to S^n$, so daß $f_*\colon H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ die Nullabbildung ist.

Aufgabe 3: Sei $X = S^1 \times S^1$ und $Y = S^1 \vee S^1 \vee S^2$ die Einpunktvereinigung von S^2 und zwei Kopien von S^1.

(a) Zeigen Sie: $H_k(X) \cong H_k(Y)$ für alle k.

(b) Sei $\widetilde{X}$ die universelle Überlagerung von X. Zeigen Sie: $H_k(\widetilde{X}) = 0$ für $k > 0$.

(c) Sei $\widetilde{Y}$ die universelle Überlagerung von Y. Zeigen Sie: $H_2(\widetilde{Y}) \neq 0$.