

Übungen Topologie II Sommersemester 2009

Blatt 5

Auf diesem Blatt bezeichne H_n singuläre Homologie mit Koeffizienten in \mathbb{Z} .

Aufgabe 1: (a) Berechnen Sie $H_n(\mathbb{R}^k)$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$.

(b) Berechnen Sie $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$.

Aufgabe 2: Sei $X = Y \times \mathbb{I}$ und $A = Y \times \{0, 1\} \subset X$.

(a) Konstruieren Sie einen Isomorphismus $H_n(A) \cong H_n(Y) \oplus H_n(Y)$.

(b) Berechnen Sie $H_n(X, A)$.

Aufgabe 3: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$

(a) Sei X_0 der Graph von f . Zeigen Sie: $H_0(X_0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

(b) Seien

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x)\} \cup \{0\} \times [-1, 1], \\ X_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq f(x)\} \cup \{0\} \times [-1, 1]. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß die Mayer-Vietoris-Sequenz für das Paar (X_1, X_2) nicht exakt ist.

Aufgabe 4: (a) Sei $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ der Torus, $U \subset \mathbb{T}$ eine kleine offene Scheibe, $\mathbb{T}' = \mathbb{T} - U$ der gelochte Torus und $\partial\mathbb{T}'$ sein Rand. Berechnen Sie die Homologie von \mathbb{T}' sowie die Abbildung $H_1(\partial\mathbb{T}') \rightarrow H_1(\mathbb{T}')$.

(b) Sei M das Möbiusband und ∂M sein Rand. Berechnen Sie die Abbildung $H_1(\partial M) \rightarrow H_1(M)$.