Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen Topologie II   Sommersemester 2009

Blatt 4

Aufgabe 1: (a) Definieren Sie Kategorien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ mit folgenden Objekten:

$\mathbf{A}$: kurze exakte Sequenzen von Kettenkomplexen abelscher Gruppen;

$\mathbf{B}$: lange exakte Sequenzen abelscher Gruppen.

(b) Konstruieren Sie einen (nichttrivialen) Funktor $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

Aufgabe 2: Seien C und C' Objekte der Kategorie $\mathbf{C}$ und seien $F, F' \colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ die darstellbaren Funktoren mit $F(X) = \mathbf{C}(X, C)$ und $F'(X) = \mathbf{C}(X, C')$. Zeigen Sie: Es gibt eine kanonische Bijektion zwischen der Menge der natürlichen Transformationen von F in F' und der Menge der $\mathbf{C}$-Morphismen von C nach C'.

Aufgabe 3: Sei $\mathbf{C}$ die Kategorie mit Objekten $\underline{n} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ für $n \in \mathbb{N}$ (wobei $\underline{0} = \emptyset$) und Morphismen $\mathbf{C}(\underline{m}, \underline{n}) = \mathrm{Abb}(\underline{m}, \underline{n})$. Bezeichne $\mathbf{Set}_f$ die Kategorie der endlichen Mengen und $F \colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}_f$ den Inklusionsfunktor. Konstruieren Sie einen Funktor $G \colon \mathbf{Set}_f \to \mathbf{C}$ sowie natürliche Äquivalenzen $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ und $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{Set}_f}$.

Aufgabe 4: (a) Sei A ein Retrakt von X. Zeigen Sie: die lange exakte Homologiesequenz des Paares (X, A) zerfällt in spaltende kurze exakte Sequenzen.

(b) Sei A ein wegzusammenhängender Teilraum von X. Zeigen Sie, daß die Inklusion $(X, \emptyset) \to (X, A)$ einen Epimorphismus $H_1(X) \to H_1(X, A)$ induziert.