Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften

# Übungen Topologie II  Sommersemester 2009

Blatt 3

---

**Aufgabe 1:** Sei $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von $R$-Moduln. Zeigen Sie: Genau dann existiert ein Homomorphismus $s\colon C \to B$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_C$, wenn es einen Homomorphismus $t\colon B \to A$ mit $t \circ i = \mathrm{id}_A$ gibt, und in diesem Fall gilt $B \cong A \oplus C$.

**Aufgabe 2:** Sei

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C'_* \arrow[r] \arrow[d] & C_* \arrow[r] \arrow[d] & C''_* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D'_* \arrow[r] \arrow[d] & D_* \arrow[r] \arrow[d] & D''_* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & E'_* \arrow[r] \arrow[d] & E_* \arrow[r] \arrow[d] & E''_* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen mit exakten Zeilen und Spalten. Zeigen Sie, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(E''_*) \arrow[r, "\partial^E_*"] \arrow[d, "\partial''_*"'] & H_n(E'_*) \arrow[d, "\partial'_*"] \\
H_n(C''_*) \arrow[r, "\partial^C_*"'] & H_{n-1}(C'_*)
\end{tikzcd}$$

antikommutativ ist ($\partial'_* \partial^E_* = -\partial^C_* \partial'_*$).

**Aufgabe 3:** Sei $f\colon C_* \to D_*$ ein Homomorphismus von Kettenkomplexen. Definiere graduierte Moduln $\Sigma C_*$ und $E_*$ durch $(\Sigma C_*)_n := C_{n-1}$ sowie $E_* := D_* \oplus \Sigma C_*$; sei $\sigma\colon C_{n-1} \xrightarrow{\cong} (\Sigma C_*)_n$ als Identität von $C_{n-1}$ erklärt. Zeigen Sie:

(a) Durch $d_n(\sigma x) := -\sigma d_{n-1}(x)$ wird $\Sigma C_*$ zu einem Kettenkomplex, und $H_{n-1}(C_*) \to H_n(\Sigma C_*)$, $[x] \mapsto [\sigma x]$ ist ein Isomorphismus.

(b) Durch $d_n(x, \sigma y) := (d_n(x) + f_{n-1}(y), -\sigma d_{n-1}(y))$ wird $E_*$ zu einem Kettenkomplex.

(c) Seien $i\colon D_* \to E_*$ und $j\colon E_* \to \Sigma C_*$ die Inklusion bzw. Projektion. Dann ist $0 \to D_* \xrightarrow{i} E_* \xrightarrow{j} \Sigma C_* \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen.

(d) Sei $\partial_*$ der verbindende Homomorphismus in der langen exakten Homologiesequenz der kurzen exakten Sequenz in (c). Dann ist $\partial_*$ die Komposition

$$H_{n+1}(\Sigma C_*) \cong H_n(C_*) \xrightarrow{f_*} H_n(D_*)\,.$$