

Übungen Topologie II Sommersemester 2009

Blatt 2

Aufgabe 1: Zeigen Sie: Für jedes endliche Polyeder K ist $\pi_1(K)^{\text{ab}} \cong H_1(K; \mathbb{Z})$.

Aufgabe 2: Sei $(L, \mathfrak{L})$ ein simplizialer Komplex. Sei $(K, \mathfrak{K})$ der Kegel über L , d.h.

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_0 &= \mathfrak{L}_0 \cup \{\infty\}, \\ \mathfrak{K}_n &= \mathfrak{L}_n \cup \{\sigma^* \mid \sigma \in \mathfrak{L}_{n-1}\}, \quad \sigma^* = \sigma \cup \{\infty\}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie: $H_n(K; \mathbb{Z}) = 0$ für $n > 0$.

Aufgabe 3: Sei $m \geq 1$ eine natürliche Zahl und $\pi = \mathbb{Z}/m$. Definiere einen Kettenkomplex C_* durch

$$\begin{aligned}C_i &= 0 \quad \text{für } i < 0 \\ C_i &= \bigoplus_{j=0}^{m-1} \mathbb{Z}e_j^i \quad \text{für } i > 0 \\ \partial(e_j^{2i}) &= \sum_{k=0}^{m-1} e_k^{2i-1}, \quad i \geq 0, \quad 0 \leq j \leq m-1 \\ \partial(e_j^{2i+1}) &= e_j^{2i} - e_{j+1}^{2i}\end{aligned}$$

wobei untere Indizes der e_r^s modulo m zu nehmen sind.

- Berechnen Sie die Homologie von C_* .
- Konstruieren Sie einen Kettenkomplex D_* mit $D_i = \mathbb{Z}e^i$, $i \geq 0$, so daß die durch $e_j^i \mapsto e^i$ definierte Abbildung $C_* \rightarrow D_*$ ein Kettenhomomorphismus ist.
- Berechnen Sie die Homologie von D_* .

Aufgabe 4: Für Untermoduln eines R -Moduls A gilt:

- Ist $C \subset B \subset A$, so gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow B/C \rightarrow A/C \rightarrow A/B \rightarrow 0.$$

- Ist $B_1 \subset A_1$ und $B_2 \subset A_2$, so gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow (A_1 \cap A_2)/(B_1 \cap B_2) \rightarrow A_1/B_1 \oplus A_2/B_2 \rightarrow (A_1 + A_2)/(B_1 + B_2) \rightarrow 0.$$