

Übungen Topologie II Sommersemester 2009

Blatt 1

Sei $(L, \mathcal{L})$ ein endliches Polyeder und $p \in \mathcal{L}_0$. Der *Eckenstern* um p ist die Vereinigung der offenen Kerne aller Simplexes, die p enthalten:

$$\text{St}_{\mathcal{L}}(p) := \bigcup_{p \in \sigma \in \mathcal{L}} (\Delta(\sigma) - \partial\Delta(\sigma)).$$

Aufgabe 1: Sei $(L, \mathcal{L})$ ein endliches Polyeder und $\{p_0, \dots, p_m\} \subset \mathcal{L}_0$ eine Menge von Ecken. Dann sind äquivalent:

- (i) $\{p_0, \dots, p_m\} \in \mathcal{L}$ (definiert also ein Simplex),
- (ii) der Schnitt $\bigcap_i \text{St}_{\mathcal{L}}(p_i)$ der Sterne um die p_i ist nicht leer.

Aufgabe 2: Seien $(K, \mathcal{K})$ und $(L, \mathcal{L})$ endliche Polyeder. Zeigen Sie: Eine Abbildung $\psi: \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0$ definiert genau dann eine simpliziale Abbildung $g: K \rightarrow L$, wenn für jedes Simplex $\sigma = \{p_0, \dots, p_m\}$ der Schnitt der Sterne der Bilder nicht leer ist, d.h.

$$\bigcap_{0 \leq i \leq m} \text{St}_{\mathcal{L}}(\psi(p_i)) \neq \emptyset.$$

Aufgabe 3: Sei $(K, \mathcal{K})$ ein endliches Polyeder der Dimension d . Hat jedes Simplex von $(K, \mathcal{K})$ Durchmesser $\leq D$, so hat jedes Simplex der baryzentrischen Unterteilung $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ Durchmesser $\leq \frac{dD}{d+1}$.

(Hinweis: Der Durchmesser eines Simplex $\Delta(\sigma)$ stimmt mit der maximalen Länge eines eindimensionalen Teilsimplex von $\Delta(\sigma)$ überein.)

Aufgabe 4: Sei $(K, \mathcal{K})$ ein endliches Polyeder und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von K . Dann gibt es eine endliche Unterteilung $(K', \mathcal{K}')$ von $\mathcal{K}$, so daß jeder Eckenstern von $\mathcal{K}'$ in einer Überdeckungsmenge enthalten ist.