Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
PD Dr. Schuster

# Übungen Mathematik C   Wintersemester 2009/2010

Blatt 6

---

**Aufgabe 26:** Untersuchen Sie, in welchen Punkten der komplexen Ebene die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind und in welchen Gebieten sie holomorph sind.

$$\text{(a)}\quad f(z) = z\cos|z|\,, \qquad \text{(b)}\quad f(z) = (\operatorname{Re} z)^2\, z$$

**Aufgabe 27:** Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\oint f(z)\,dz$ für

(a) $f(z) = \overline{z}$ und $C$ der Kreisbogen von $-j$ nach $j$ in der rechten Halbebene, gefolgt von der Strecke von $j$ nach $-j$;

(b) $f(z) = |z|^2$ und $C$ die im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kanten des Quadrats mit Ecken 0, 1, $1+j$ und $j$;

(c) $f(z) = \overline{z} + 1$ und $C$ parametrisiert durch $\gamma(t) = \begin{cases} 2e^{2\pi jt} - 1 & \text{für } 0 \le t \le 1, \\ e^{2\pi jt} & \text{für } 1 \le t \le 2. \end{cases}$.

**Aufgabe 28:** Berechnen Sie $\displaystyle\oint_{|z|=1} e^z\,dz$ und benutzen Sie das Ergebnis, um zu zeigen:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t + t)\,dt = 0\,.$$

**Aufgabe 29:** Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel.

(a) $\displaystyle\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}$

(b) $\displaystyle\int_{|z+2j|=3} \frac{dz}{z^2+\pi^2}$

**Aufgabe 30:** Sei $f(z) := \dfrac{z^2}{z^4+1}$ für $|z| > 1$ und $C_R$ der durch $\gamma(t) := Re^{jt}$, $0 \le t \le \pi$ parametrisierte Halbkreisbogen, $R > 1$. Zeigen Sie:

(a) $|f(z)| \le \dfrac{R^2}{R^4-1}$ für alle $z$ auf dem Kreisbogen $C_R$.

(b) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| = 0.$

(c) Bestimmen Sie das reelle Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx.$