

Übungen Mathematik C Wintersemester 2009/2010

Blatt 4

Aufgabe 16: (a) Verifizieren Sie den Satz von Gauß für die Kugel um den Nullpunkt mit Radius R und das Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 \mathbf{x}$.

(b) Verifizieren Sie den Satz von Stokes für die Fläche S mit Parameterdarstellung

$$\mathbf{r}(s, t) = (s \cos t, s \sin t, t)^\top, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

und das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, x, y)^\top$.

Aufgabe 17: Sei S die Fläche, die durch $y = 1 - x^2 - z^2$, $y \geq 0$, gegeben ist, \mathbf{n} die Flächennormale, die in Richtung der xz -Ebene zeigt und $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $\mathbf{F} = yz^3 \mathbf{e}_1 + \sin(xyz) \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3$. Berechnen Sie $\int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$.

Aufgabe 18: Sei $R > 0$ und $V = \{\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| \leq R, z \geq 0\}$. Eine Ladungsverteilung im Inneren von V erzeuge ein elektrisches Feld mit Verschiebungsdichte $\mathbf{D}(x, y, z) = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + 2z \mathbf{e}_3$. Berechnen Sie die Gesamtladung in V .

Aufgabe 19: Das Vektorfeld $\mathbf{F}: B = \mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-Achse}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie \mathbf{F} , $\mathbf{div} \mathbf{F}$ und $\mathbf{rot} \mathbf{F}$ in Zylinderkoordinaten. Ist \mathbf{F} wirbelfrei? Wenn ja, geben Sie ein Potential auf B an.

Aufgabe 20: Das Vektorfeld $\mathbf{F}: B = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}.$$

Schreiben Sie \mathbf{F} , $\mathbf{div} \mathbf{F}$ und $\mathbf{rot} \mathbf{F}$ in Kugelkoordinaten. Ist \mathbf{F} wirbelfrei? Wenn ja, geben Sie ein Potential auf B an.