Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
PD Dr. Schuster

Übungen Mathematik C Wintersemester 2009/2010

Blatt 3

Aufgabe 11: Prüfen Sie, ob die auf ihrem natürlichen Definitionsbereich erklärten Vektorfelder Gradientenfelder sind und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion.

(a) $\mathbf{F}(x, y) = (\sin y + y \cos x, \sin x + x \cos y)^\top$

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{1}{r^3}(-xy, x^2 + z^2, -xz)^\top$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Aufgabe 12: Das Vektorfeld $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei in Abhängigkeit der Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + xy^2 + 2z)\mathbf{e}_1 + (x^2 y + \alpha z)\mathbf{e}_2 + (\beta x + y)\mathbf{e}_3\,.$$

(a) Berechnen Sie $\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ $(i = 1, 2)$ für die Kurven

$$C_1 : \ \mathbf{r}_1(t) = (2t, t^2, 3t)^\top \ (0 \le t \le 1) \quad \text{und} \quad C_2 : \ \mathbf{r}_2(t) = (2t, t, 3t)^\top \ (0 \le t \le 1)\,.$$

(b) Bestimmen Sie α und β, so dass $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ wegunabhängig wird und finden Sie eine Stammfunktion.

Aufgabe 13: Die Fläche S sei durch folgende Parameterdarstellung gegeben:

$$\mathbf{r}(u, v) := (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v)^\top\,, \ 0 \le u \le 2\pi\,, \ -1 \le v \le 1\,.$$

(a) Beschreiben Sie die Fläche S geometrisch und berechnen Sie das Normalenfeld $\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)$.

(b) Geben Sie für ein stetiges skalares Feld f bzw. ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{F}$ auf S Formeln an, die die Flächenintegrale $\int_S f\, dS$ bzw. $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ berechnen.

Aufgabe 14: Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kegelmantels

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le h\,, \ x^2 + y^2 = \frac{1}{2} z^2\}\,, \ h > 0\,.$$

Bestimmen Sie zudem den Schwerpunkt, wenn S homogen mit Masse belegt ist.

Aufgabe 15: Parametrisieren Sie das durch $z = x^2 + y^2$ und $0 \le z \le 1$ gegebene Paraboloid P so, dass die Flächennormale nach außen zeigt. Sei $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, z^2)^\top$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_P \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS\,.$$