Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
PD Dr. Schuster

Übungen Mathematik C Wintersemester 2009/2010

Blatt 2

Aufgabe 6: Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi(x, y, z) = x - y + z + 2$ und C die Strecke in $\mathbb{R}^3$, die die Punkte $(0, 1, 1)^\top$ und $(0, 1, 0)^\top$ verbindet. Bestimmen Sie $\displaystyle\int_C \varphi\, ds$.

Aufgabe 7: (a) Die Kurve C sei durch $\mathbf{r}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = (0, t^2 - 1, 2t)^\top$ parametrisiert und die Massendichte ρ gegeben durch $\rho(x, y, z) = \frac{3}{8}z$. Bestimmen Sie die Masse von C.

(b) Sei C parametrisiert durch $\mathbf{r}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = (\sin t, 2\cos t, \sqrt{3}\sin t)^\top$. Bestimmen Sie Länge und Schwerpunkt von C.

Aufgabe 8: Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine positive, stetig differenzierbare Funktion. Sei C die Kurve mit Parameterdarstellung

$$\mathbf{r}(t) := \begin{pmatrix} f(t)\cos t \\ f(t)\sin t \end{pmatrix}.$$

Drücken Sie die Länge von C durch f und f' aus.

Aufgabe 9: Sei C die durch $\mathbf{r}\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(u) = \begin{pmatrix} \cos^3 u \\ \sin^3 u \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve. Die Bogenlängefunktion $s\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$s(t) := L\big(\mathbf{r}|_{[0,t]}\big), \quad 0 \le t \le \pi/2,$$

wobei $\mathbf{r}|_{[0,t]}$ die Kurve sei, die durch die Einschränkung von $\mathbf{r}$ auf $[0, t]$ gegeben ist. Berechnen Sie $s(t)$ und zeigen Sie, dass $s\colon [0, \pi/2] \to [0, L(C)]$ eine Parametertransformation ist (also eine stetig differenzierbare Bijektion mit positiver Ableitung). Ist s^{-1} die Umkehrfunktion, so ist dann $\mathbf{r} \circ s^{-1}$ ebenfalls eine Parametrisierung von C. Bestimmen Sie diese Parameterdarstellung der Kurve („Parametrisierung über die Bogenlänge“).

Aufgabe 10: Das Vektorfeld $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, x^2)^\top$. Für eine positive reelle Zahl λ sei C_λ die Kurve, die den Nullpunkt mit dem Punkt $(1, 1)^\top$ entlang des Graphen von $y = x^\lambda$ verbindet; seien ferner C_0 bzw. C_∞ die Wege entlang der Kanten des Quadrats mit Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 1)$. Berechnen Sie $I_\lambda = \displaystyle\int_{C_\lambda} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, $0 \le \lambda \le \infty$. Für welche Kurven wird I_λ maximal bzw. minimal?