

## Übungen Mathematik C Wintersemester 2009/2010

### Blatt 1

---

**Aufgabe 1:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  das Flächenstück, das von den Graphen der durch  $f(x) = x^4 - x^2 + 1$  und  $g(x) = x^2$  definierten Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eingeschlossen wird. Sei  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $h(x, y) = 1 + x - y$ . Berechnen Sie den Flächeninhalt von  $D$  sowie das Integral  $\int_D h(x, y) dx dy$ .

**Aufgabe 2:** Der Würfel  $W \subset \mathbb{R}^3$  sei gegeben durch

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$$

und habe die konstante Dichte  $\rho = 1$ . Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der  $z$ -Achse.

**Aufgabe 3:** Es seien die folgenden Flächenstücke im  $\mathbb{R}^2$  gegeben:

$$D_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

$$D_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

$$D_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

Hierbei sei  $a > 0$  eine reelle Zahl. Berechnen Sie die Integrale  $\int_{D_i} f(x, y) dx dy$  für  $i = 1, 2, 3$  und  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Benutzen Sie dazu Polarkoordinaten.

**Aufgabe 4:** Finden Sie die Masse der Kugelschale  $K \subset \mathbb{R}^3$ , die von den Sphären um  $(0, 0, 0)$  mit Radius 1 bzw. Radius 9 begrenzt wird, wenn die Dichte umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes vom Ursprung ist.

**Aufgabe 5:** Sei  $B \subset \mathbb{R}^3$  die Kugel um  $(0, 0, 0)$  mit Radius 2 und  $Z \subset \mathbb{R}^3$  der Zylinder, der die  $xy$ -Ebene im Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt  $(0, 1)$  schneidet. Beschreiben Sie den Körper  $K = B \cap Z$  in Zylinderkoordinaten und berechnen Sie sein Volumen.