Mathematik 3 WS 2010/2011: Lösungen Probeklausur

Aufgabe 1. (a) Wegen $A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\vec{v}_1$ ist $\vec{v}_1$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2.

(b) Die Matrix

$$A - (-1)E_3 = \begin{pmatrix} -12 & 9 & -6 \\ -12 & 9 & -6 \\ 12 & -9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat den Rang 1 und damit das lineare Gleichungssystem $(A-(-1)E_3)\vec{v} = \vec{0}$ zwei linear unabhängige Lösungen, etwa $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Folglich ist -1 ein Eigenwert, und $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind zwei linear unabhängige Eigenvektoren zu diesem Eigenwert.

(c) Ja, denn A hat drei linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

Aufgabe 2. (a) C_1 wird parametrisiert durch $\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$, mit $\dot{\vec{r}}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es folgt

$$\int_{C_1} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = \int_0^1 \left\langle \vec{F}\big(\vec{r}_1(t)\big), \dot{\vec{r}}_1(t) \right\rangle dt = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 4t^2 + 3t^3 \\ t^3 + 3t^2 \\ 2t^2 + t^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$
$$= \int_0^1 (9t^2 + 4t^3 + t^4)\, dt = 3 + 1 + \frac{1}{5} = \frac{21}{5}$$

Die Kurve C_2 setzt sich aus den beiden Teilstrecken C_{2a} und C_{2b} zusammen, die durch $\vec{r}_a(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_b(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$, jeweils für $0 \le t \le 1$, parametrisiert werden können. Damit gilt

$$\int_{C_2} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = \int_{C_{2a}} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle + \int_{C_{2b}} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = \int_0^1 \left\langle \vec{F}\big(\vec{r}_a(t)\big), \dot{\vec{r}}_a(t) \right\rangle dt + \int_0^1 \left\langle \vec{F}\big(\vec{r}_b(t)\big), \dot{\vec{r}}_b(t) \right\rangle dt$$
$$= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle dt + \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 2t^2 + 4t + 3t^3 \\ t^3 + t^2 + 4t \\ 2t^2 + t^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$
$$= 0 + \int_0^1 (3t^2 + 4t^3 + 8t)\, dt = 1 + 1 + 4 = 6$$

(b) $\vec{F}$ hat keine Stammfunktion, denn wegen $\dfrac{\partial F_3}{\partial y} = 2x + x^3$, aber $\dfrac{\partial F_2}{\partial z} = 2x$ ist $\operatorname{rot} \vec{F} \neq \vec{0}$.

Aufgabe 3. Es seien A, B die beiden Ereignisse

A: Das Telefon ist fehlerhaft

B: Die Kontrolle sagt, das Telefon sei fehlerhaft

Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten $P(B)$ in (a), $P(A|B)$ in (b) und $P(\overline{A}|\overline{B})$ in (c). Gegeben sind die Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.06 \\ P(B|A) &= 0.9 && \text{(„Fehler wird gefunden, wenn das Telefon fehlerhaft ist“)} \\ P(\overline{B}|\overline{A}) &= 0.8 && \text{(„es wird kein Fehler gefunden, wenn kein Fehler vorhanden ist“)} \end{aligned}$$

(a) $$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) \\ &= P(B|A)P(A) + \big(1 - P(\overline{B}|\overline{A})\big)\big(1 - P(A)\big) = (0.9)(0.06) + (0.2)(0.94) = 0.242\,. \end{aligned}$$

(b) $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{(0.9)(0.06)}{0.242} = 0.223.$$

(c) $$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{B}|\overline{A})P(\overline{A})}{1 - P(B)} = \frac{(0.8)(0.94)}{0.758} = 0.992.$$

Aufgabe 4. (a) Sei X das Gewicht einer Orange. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(230 \leq X \leq 275) &= P\left(\frac{230-250}{15} \leq \frac{X-250}{15} \leq \frac{275-250}{15}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{25}{15}\right) - \Phi\left(-\frac{20}{15}\right) = \Phi(5/3) + \Phi(4/3) - 1 = 0.86 \end{aligned}$$

Da dies größer als die geforderten 80% ist, genügt die Ernte der Bedingung des Großhändlers.

(b) Sei Y die Anzahl der Orangen im Korb, die nicht mehr als 220g wiegen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine einzelne Orange nicht mehr als 220g wiegt, ist

$$p := P(X \leq 220) = P\left(\frac{X-250}{15} \leq \frac{220-250}{15}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

Y ist normalverteilt mit Parametern $n = 100$ und $p = 0.0228$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) \\ &= 1 - \binom{100}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{100} - \binom{100}{1} \cdot p \cdot (1-p)^{99} \\ &= 1 - (0.9772)^{100} - 100 \cdot (0.0228) \cdot (0.9772)^{99} = 0.666 \end{aligned}$$