

Modul: Mathematik III, Bachelor-Studiengang Maschinenbau

Aufgabe 1: (20 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -13 & 9 & -6 \\ -12 & 8 & -6 \\ 12 & -9 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der Matrix A ist.
- (b) Zeigen Sie, dass -1 ein Eigenwert der Matrix A ist.
- (c) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(Hinweis: Man kommt ohne die Berechnung des charakteristischen Polynoms aus!)

Aufgabe 2: (20 Punkte) Das Vektorfeld \vec{F} sei gegeben durch

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy + 2yz + 3x^2y \\ x^3 + x^2 + 2xz \\ 2xy + x^3y \end{pmatrix}.$$

- (a) Sei C_1 die Strecke von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 1, 1)$ und C_2 die Kurve, die aus der Strecke von $(0, 0, 0)$ nach $(0, 0, 2)$ gefolgt von der Strecke von $(0, 0, 2)$ nach $(1, 1, 2)$ besteht. Berechnen Sie

$$\int_{C_1} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle \quad \text{und} \quad \int_{C_2} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle.$$

- (b) Hat \vec{F} eine Stammfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3: (20 Punkte) Bei der Endkontrolle von Mobiltelefonen eines Herstellers wird ein fehlerhaftes Gerät mit Wahrscheinlichkeit 0.9 entdeckt, und mit Wahrscheinlichkeit 0.8 wird ein fehlerfreies Gerät auch als fehlerfrei eingestuft. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Telefon einen Fehler hat, sei 6%.

- (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Telefon als defekt eingestuft?
- (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Telefon, das als defekt eingestuft wird, wirklich defekt?
- (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Gerät in Ordnung, wenn die Kontrolle dies behauptet?

Aufgabe 4: (20 Punkte) Das Gewicht der Orangen der Ernte einer Obstplantage sei normalverteilt mit Erwartungswert 250g und Standardabweichung 15g.

- (a) Ein Großhändler verlangt, dass 80% der Orangen einer Lieferung zwischen 230g und 275g wiegen müssen. Genügt die Ernte der Obstplantage dieser Bedingung?
- (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält ein Korb von 100 Orangen wenigstens 2, die nicht mehr als 220g wiegen?

Tabelle der Normalverteilung

Tabelle des Integrals $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$. Beispiel: $\Phi(1.23) = 0.8907$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8079	.8106	.8133
0.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.00	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.10	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.20	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.30	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.40	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.50	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.60	.9452	.9463	.9474	.9485	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.70	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.80	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.90	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767
2.00	.9773	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.10	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.20	.9861	.9865	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.30	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.40	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.50	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.60	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.70	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.80	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9980	.9980	.9981
2.90	.9981	.9982	.9983	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986