PD Dr. B. Schuster **17.02.2011**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik III, Bachelor-Studiengang Maschinenbau

Aufgabe 1: (20 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der Matrix A ist.

(b) Zeigen Sie, dass 1 ein Eigenwert der Matrix A ist.

(c) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(Hinweis: Man kommt ohne die Berechnung des charakteristischen Polynoms aus!)

Lösung: (a) Es ist

$$A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\vec{v}_1\,,$$

also $\vec{v}_1$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.
(b) Die Matrix

$$A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat den Rang 1 und damit das lineare Gleichungssystem $(A - 1 \cdot E_3)\vec{v} = \vec{0}$ zwei linear unabhängige Lösungen, etwa $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Folglich ist 1 ein Eigenwert, und $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind zwei linear unabhängige Eigenvektoren zu diesem Eigenwert.
(c) Ja, denn A hat drei linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

Aufgabe 2: (20 Punkte) Das Vektorfeld $\vec{F}$ sei gegeben durch

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} (y-3)z \\ xz + 2 \\ x(y-3) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{F}$ eine Stammfunktion hat.

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion.

(c) Sei C die durch $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t-1 \\ 1-t^2 \end{pmatrix}$, $1 \le t \le 3$, parametrisierte Kurve. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_C \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle\,.$$

Lösung: (a) Wegen

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = x = \frac{\partial F_2}{\partial z}\,, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = y - 3 = \frac{\partial F_3}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = z = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

ist $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$, und da $\vec{F}$ auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert ist, genügt das für die Existenz einer Stammfunktion.

(b) Gesucht ist eine Funktion φ mit $\operatorname{grad} \varphi = \vec{F}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= yz - 3z && \Rightarrow && \varphi = xyz - 3xz + \psi_1(y,z) \\
\frac{\partial \varphi}{\partial y} &= xz + 2 && \Rightarrow && \varphi = xyz + 2y + \psi_2(x,z) \\
\frac{\partial \varphi}{\partial z} &= xy - 3x && \Rightarrow && \varphi = xyz - 3xz + \psi_3(x,y)
\end{aligned}$$

Durch Vergleich findet man

$$\varphi(x,y,z) = xyz + 2y - 3xz\,.$$

(c) Da das Feld eine Stammfunktion φ hat, ist das Integral wegunabhängig mit

$$\begin{aligned}
\int_C \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = \varphi\big(\vec{r}(3)\big) - \varphi\big(\vec{r}(1)\big) &= \varphi(6,2,-8) - \varphi(2,0,0) \\
&= 6 \cdot 2 \cdot (-8) - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 6 \cdot (-8) - 0 = 52\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: (20 Punkte) Ein Prüfverfahren für Festplatten zeigt mit Wahrscheinlichkeit 0.95 einen Fehler an, wenn tatsächlich einer vorhanden ist, und zeigt mit Wahrscheinlichkeit 0.98 keinen Fehler an, wenn die Festplatte fehlerfrei ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Festplatte fehlerfrei ist, sei 0.94.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Festplatte einen Fehler, wenn das Prüfverfahren dies behauptet?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Festplatte fehlerfrei, wenn das Prüfverfahren keinen Fehler anzeigt?

Lösung: Es seien A, B die beiden Ereignisse

A: Die Festplatte hat einen Fehler

B: Das Prüfverfahren zeigt einen Fehler an

Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten $P(A|B)$ in (a) und $P(\overline{A}|\overline{B})$ in (b); gegeben sind

$$P(\overline{A}) = 0.94\,, \quad P(B|A) = 0.95\,, \quad P(\overline{B}|\overline{A}) = 0.98\,.$$

(a) Es ist zunächst

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) = P(B|A)(1 - P(\overline{A})) + \big(1 - P(\overline{B}|\overline{A})\big)P(\overline{A}) \\
&= (0.95)(1 - 0.94) + (1 - 0.98)(0.94) = 0.0758\,.
\end{aligned}$$

und damit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{(0.95)(0.06)}{0.0758} \approx 0.752 = 75.2\%\,.$$

(b) $$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{B}|\overline{A})P(\overline{A})}{1 - P(B)} = \frac{(0.98)(0.94)}{1 - 0.0758} \approx 0.997 = 99.7\%.$$

Aufgabe 4: (20 Punkte) Die jährliche Schneefallmenge einer Stadt, als Gesamthöhe angegeben, sei normalverteilt mit Erwartungswert 120cm und Standardabweichung 45cm.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt in einem Jahr die Gesamthöhe über 200cm?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr mehr als 180cm Schnee fallen, wenn es schon mehr als 150cm geschneit hat?

Lösung: Sei X die jährliche Schneefallmenge, als Gesamthöhe angegeben. Laut Aufgabenstellung ist X normalverteilt mit $\mu = 120$ und $\sigma = 45$.

(a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X > 200)$. Mit Hilfe der Tabelle (und den entsprechenden Rundungen) erhält man

$$P(X \leq 200) = P\left(\frac{X - 120}{45} \leq \frac{200 - 120}{45}\right) = \Phi\left(\frac{80}{45}\right) = \Phi(1.78) = 0.9625$$

und damit $P(X > 200) = 1 - P(X \leq 200) = 0.0375 = 3.75\%$.

Es seien A, B die beiden Ereignisse

A: in einem Jahr fallen mehr als 180cm Schnee

B: in einem Jahr fallen mehr als 150cm Schnee

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$. Wegen $A \subset B$ ist $A \cap B = A$ und daher

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}\,.$$

Es ist (wieder mit Hilfe der Tabelle und den entsprechenden Rundungen)

$$P(A) = 1 - P(X \leq 180) = 1 - P\left(\frac{X - 120}{45} \leq \frac{180 - 120}{45}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right) = 0.0918$$
$$P(B) = 1 - P(X \leq 150) = 1 - P\left(\frac{X - 120}{45} \leq \frac{150 - 120}{45}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = 0.2514$$

Es folgt

$$P(A|B) = \frac{0.0918}{0.2514} \approx 0.365 = 36.5\%\,.$$