Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
PD Dr. Schuster

Übungen Mathematik 3 Wintersemester 2010/2011

Blatt 7 27.11.2010

Aufgabe 1: Seien $\vec{F}, \vec{G}$ Vektorfelder, φ ein Skalarfeld und c eine Konstante. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{div}(\varphi \vec{F}) = \langle \operatorname{grad} \varphi, \vec{F} \rangle + \varphi \operatorname{div} \vec{F}$

(b) $\operatorname{rot}(\varphi \vec{F}) = \operatorname{grad} \varphi \times \vec{F} + \varphi \operatorname{rot} \vec{F}$

(c) $\operatorname{rot}(c\vec{F}) = c \operatorname{rot} \vec{F}$

(d) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \vec{0}$

(e) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$

Aufgabe 2: Das Vektorfeld $\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + xy^2 + 2z \\ x^2y + \alpha z \\ \beta x + y \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\int_{C_i} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle$ $(i = 1,2)$ für die Kurven

$$C_1 : \ \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \\ 3t \end{pmatrix}, \ 0 \le t \le 1, \quad \text{und} \quad C_2 : \ \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 3t \end{pmatrix}, \ 0 \le t \le 1\,.$$

(b) Bestimmen Sie α und β, so dass $\int_C \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle$ wegunabhängig wird und finden Sie eine Stammfunktion.

Aufgabe 3: Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin y \\ x \cos y + \sin z \\ y \cos z \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld konservativ ist.

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle$ für einen beliebigen Verbindungsweg C der beiden Punkte $P(0,0,0)$ und $Q(5,\pi,3\pi)$.

Aufgabe 4: Welche Arbeit verrichtet das Kraftfeld $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \\ yz \end{pmatrix}$ an einer Masse, die entlang der Schraubenlinie $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 2\pi$, bewegt wird?