Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/teaching/uebungen/topIII/2006/

Übungen Homotopietheorie   Wintersemester 2006/2007

Blatt 1   Abgabe: Montag, 30.10. (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Sei $(X, A) \in \mathbf{Top}_*^{(2)}$ ein Raumpaar und seien $u, v\colon (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (X, A)$, $n \geq 2$, zwei punktierte Abbildungen. Definiere $u + v$ durch die Komposition

$$\mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}^n/\mathbb{D}^{n-1} \cong \mathbb{D}^n \vee \mathbb{D}^n \xrightarrow{u \vee v} X\,.$$

Für $u, v\colon \mathbb{S}^n \to X$ und $n \geq 1$ definiere $u + v$ als

$$\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n \xrightarrow{u \vee v} X\,;$$

dies ist offenbar kompatibel mit der Definition für Paare.
Zeigen Sie:

(a) Die Homotopieklasse von $u + v$ hängt nur von den Homotopieklassen von u bzw. v ab.

(b) Für $n \geq 2$ (bzw. $n \geq 1$) definiert $[u] + [v] := [u + v]$ eine Gruppenstruktur auf $\pi_n(X, A)$ (bzw. auf $\pi_n(X)$).

(c) Für $n \geq 3$ (bzw. $n \geq 2$) ist $\pi_n(X, A)$ (bzw. $\pi_n(X)$) abelsch.
[Hinweis: benutzen Sie Würfel statt Scheiben.]

Aufgabe 2: Sei $(X, A) \in \mathbf{Top}_*^{(2)}$. Definiere

$$\partial_*\colon \pi_n(X, A) \longrightarrow \pi_{n-1}(A)$$

durch $[u] \mapsto [u|_{\mathbb{S}^{n-1}}]$. Seien $i\colon A \hookrightarrow X$ und $j\colon (X, x_0) \hookrightarrow (X, A)$ die Inklusionen. Zeigen Sie:

(a)
$$\cdots \to \pi_n(A) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(X) \to \cdots$$
ist eine exakte Sequenz von Gruppen bzw. punktierten Mengen.

⋆ (b) die Abbildungen i_*, j_* und ∂_* sind äquivariant bezüglich der Operation von $\pi_1(A)$.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/teaching/uebungen/topIII/2006/

Übungen Homotopietheorie   Wintersemester 2006/2007

Blatt 2 Abgabe: Montag, 6.11. (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Sei $j\colon A =]0,1] \hookrightarrow [0,1] = X$ die Inklusion und (a_n) die Folge $a_n = (1/n, 1/n)$ in $X \times \{0\} \cup A \times \mathbb{I}$. Zeigen Sie: In Z_j' konvergiert (a_n) gegen $(0,0)$, in Z_j jedoch nicht.

Aufgabe 2: (a) Sei $j\colon A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung. Zeigen Sie: Ist X hausdorffsch, so ist j eine abgeschlossene Kofaserung.

(b) Sei $X = \{a, b\}$ mit der Topologie $\{\varnothing, \{a\}, X\}$ und $A = \{a\}$. Zeigen Sie: die Inklusion $A \subset X$ ist eine Kofaserung.

Aufgabe 3: Sei $j\colon A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung und eine Homotopieäquivalenz. Zeigen Sie: A ist starker Deformationsretrakt von X.

Aufgabe 4: (a) Sei $\beta\colon C \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie: $\beta^*\colon \mathbf{Top}/B \to \mathbf{Top}/C$ ist ein Funktor.

(b) Sei $\gamma\colon D \to C$. Dann gilt $\gamma^* \circ \beta^* = (\beta \circ \gamma)^*$.

Aufgabe 5: Seien $p\colon E \to B$ und $q\colon D \to B$ Faserungen und $f\colon E \to B$ eine Homotopieäquivalenz. Zeigen Sie: Ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & D \arrow[dl, "q"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

kommutativ, so existiert ein Homotopieinverses g zu f mit $p \circ g = q$.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/teaching/uebungen/topIII/2006/

Übungen Homotopietheorie   Wintersemester 2006/2007

Blatt 3   Abgabe: Montag, 13.11. (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Für eine Faserung $p\colon E \to B$ bezeichne $L_p\colon W(p) = E \times_B B^{\mathbb{I}} \to E^{\mathbb{I}}$ eine Liftungsfunktion.

(a) Seien $X \xrightarrow{f} Y$ und $Y \xrightarrow{g} Z$ Faserungen. Konstruieren Sie eine Liftungsfunktion L_{gf} für die Komposition $g \circ f$.

(b) Seien $E_1 \xrightarrow{p_1} B_1$ und $E_2 \xrightarrow{p_2} B_2$ Faserungen. Konstruieren Sie eine Liftungsfunktion $L_{p_1 \times p_2}$ für $E_1 \times E_2 \xrightarrow{p_1 \times p_2} B_1 \times B_2$.

(c) Sei $E \xrightarrow{p} B$ eine Faserung und $B' \xrightarrow{f} B$ eine Abbildung. Konstruieren Sie eine Liftungsfunktion $L_{f^*(p)}$ für $f^*(p)\colon E \times_B B' \to B'$.

Aufgabe 2: Sei $j\colon A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung und $p\colon E \to B$ eine Faserung. Seien $\Phi\colon A \times \mathbb{I} \to B$ und $\varphi\colon X \to E$ Abbildungen mit $p\varphi(a) = \Phi_0(a)$ für $a \in A$. Zeigen Sie: es gibt eine Homotopie $\psi\colon X \times \mathbb{I} \to E$ mit $p \circ \psi(a,t) = \Phi(a,t)$ für $a \in A$ und $\psi_0 = \varphi$.

Aufgabe 3: Sei $p\colon E \to B$ ein numerierbares lokal triviales Faserbündel. Sei $e_0 \in E$ und $b_0 = p(e_0)$. Zeigen Sie: $p\colon (E, e_0) \to (B, b_0)$ ist eine punktierte Faserung.

Aufgabe 4: Sei $j\colon A \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Kofaserung zwischen lokal lokalkompakten Räumen und sei (Y, y_0) ein punktierter Raum. Zeigen Sie:

(a) $j^*\colon \mathscr{C}(X,Y) \to \mathscr{C}(A,Y)$ ist eine punktierte Faserung, wenn in den Abbildungsräumen die konstante Abbildung mit Wert y_0 als Basispunkt genommen wird.

(b) Mit Basispunkten $* \in A \subset X$ ist auch $\bar{j}^*\colon \mathscr{C}_*(X,Y) \to \mathscr{C}_*(A,Y)$ eine punktierte Faserung.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/teaching/uebungen/topIII/2006/

Übungen Homotopietheorie Wintersemester 2006/2007

Blatt 4 Abgabe: Montag, 20.11. (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Eine Abbildung $p\colon E \to B$ heißt *Serre-Faserung*, wenn sie die HHE für alle Räume $\mathbb{D}^n$ hat.

(a) Zeigen Sie: eine Serre-Faserung hat die HHE für alle CW-Komplexe.

(b) Sei A Unterkomplex des CW-Komplexes X, so daß die Inklusion $j\colon A \hookrightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz ist. Zeigen Sie: j hat die LHE für alle Serre-Faserungen.

Aufgabe 2: Seien $A \subset X$ und $B \subset Y$ und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung mit $f(A) \subset B$. Sei $g = f|_A$ ein Retrakt von f, d.h. es gebe Abbildungen $r\colon X \to A$ und $s\colon Y \to B$ mit $r|_A = \mathrm{id}_A$, $s|_B = \mathrm{id}_B$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, hook] & Y \arrow[r, "s"'] & B \end{tikzcd}$$

kommutiert. Zeigen Sie:

(a) Ist f eine Kofaserung, so auch g.

(b) Ist f eine Faserung, so auch g.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/teaching/uebungen/topIII/2006/

Übungen Homotopietheorie Wintersemester 2006/2007

Blatt 5 Abgabe: Montag, 27.11. (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Definiere eine Abbildung $\mathbb{C}[t] - \{0\} \to \mathbb{CP}^\infty$ durch

$$a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \mapsto [a_0 : a_1 : \ldots : a_n : 0 : 0 : \ldots].$$

Zeigen Sie: die Multiplikation von Polynomen induziert eine H-Multiplikation auf $\mathbb{CP}^\infty$.

Aufgabe 2: Sei (Y, μ) ein H-Raum, so daß $\pi_0(Y)$ mit der von μ induzierten Multiplikation eine Gruppe ist. Zeigen Sie: alle Wegekomponenten von Y sind homotopieäquivalent.

Aufgabe 3: Sei (X, x_0) wohlpunktiert, $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ und $\alpha \in \Omega(Y; y_0)$. Sei $H\colon X \times \mathbb{I} \to Y$ eine Homotopieerweiterung von

$$f \cup \alpha\colon X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times \mathbb{I} \longrightarrow Y$$

und $\tau_\alpha f := H_1\colon X \to Y$. Zeigen Sie:

(a) $[\alpha] = [\beta]$ in $\pi_1(Y; y_0) \Rightarrow [\tau_\alpha f] = [\tau_\beta f]$.

(b) $[f] = [g]$ in $[X, Y]_* \Rightarrow [\tau_\alpha f] = [\tau_\alpha g]$.

(c) $[\tau_{\alpha\beta} f] = [\tau_\beta(\tau_\alpha f)]$.

(d) Sei $X = \mathbb{S}^1$. Dann gilt $[\tau_\alpha f] = [\alpha]^{-1} \cdot [f] \cdot [\alpha]$ in $\pi_1(Y; y_0)$.

Aufgabe 4: Sei (X, x_0) wohlpunktiert und (Y, y_0) ein wohlpunktierter H-Raum. Zeigen Sie: $[\tau_\alpha f] = [f]$ für alle $\alpha \in \Omega(Y; y_0)$ und $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Insbesondere ist $\pi_1(Y; y_0)$ abelsch.

Übungen Homotopietheorie   Wintersemester 2006/2007

Blatt 6   Abgabe: Montag, 4.12. (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Sei $A \subset X$ ein punktierter Retrakt. Zeigen Sie:

(a) Ist X ein H-Raum, so auch A.

(b) Ist X ein H$'$-Raum, so auch A.

Aufgabe 2: Sei (X, ν) ein H$'$-Raum. Dann definiert $\Sigma(\nu)$ eine Ko-H-Raumstruktur auf ΣX. Zeigen Sie, daß diese homotopieassoziativ und -kommutativ ist.

Aufgabe 3: Sei $f\colon X \to Y \in \mathbf{Top}_*$ und $j\colon Y \to C(f)$ die Inklusion. Zeigen Sie: Ist $\varphi\colon T \to Y \in \mathbf{Top}_*$ mit $j \circ \varphi \simeq *$, so existiert ein $\psi\colon \Sigma T \to \Sigma X$ mit $[\Sigma f \circ \psi] = -[\Sigma\varphi]$.
[Hinweis: $\Sigma X \simeq C(j) = C(X) \cup_Y C(Y)$.]

Übungen Homotopietheorie Wintersemester 2006/2007

Blatt 7 Abgabe: Montag, 11.12. (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Sei $f\colon X \to Y \in \mathbf{Top}_*$ und $P_f\colon \operatorname{Fas}(f) \to X$ die Projektion. Zeigen Sie: Ist $\varphi\colon X \to T \in \mathbf{Top}_*$ mit $\varphi \circ P_f \simeq *$, so exisitiert ein $\psi\colon \Omega Y \to \Omega T$ mit $[\psi \circ (-\Omega f)] = [\Omega\varphi]$.

Aufgabe 2: Sei $f\colon X \to Y$ eine punktierte Abbildung. Definiere $\varepsilon\colon \Sigma\Omega Y \to Y$ und $\eta\colon X \to \Omega\Sigma X$ als Adjungierte von $\mathrm{id}_{\Omega Y}$ bzw. $\mathrm{id}_{\Sigma X}$. Konstruieren Sie Abbildungen $\varepsilon'\colon \Sigma\operatorname{Fas}(f) \to C(f)$ und $\eta'\colon \operatorname{Fas}(f) \to \Omega C(f)$, so daß folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma\Omega Y \arrow[r, "\Sigma P_f"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \Sigma\operatorname{Fas}(f) \arrow[r, "\Sigma Q_f"] \arrow[d, dotted, "\varepsilon'"] & \Sigma X \arrow[d, "-\mathrm{id}"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "P_f"'] & C(f) \arrow[r, "Q_f"'] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega Y \arrow[r, "Q_f"] \arrow[d, "-\mathrm{id}"'] & \operatorname{Fas}(f) \arrow[r, "P_f"] \arrow[d, dotted, "\eta'"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"] & Y \\
\Omega Y \arrow[r, "\Omega P_f"'] & \Omega C(f) \arrow[r, "\Omega Q_f"'] & \Omega\Sigma X &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 3: Seien $f, g\colon X \to Y \in \mathbf{Top}_*$ punktiert homotop. Zeigen Sie: $\operatorname{Fas}(f) \simeq \operatorname{Fas}(g)$.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/teaching/uebungen/topIII/2006/

Übungen Homotopietheorie Wintersemester 2006/2007

Blatt 8 Abgabe: Montag, 18.12. (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Sei

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "P_f"] \arrow[d, "\beta"'] & C(f) \arrow[r, "Q_f"] \arrow[d, "\gamma"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma\alpha"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "P_{f'}"'] & C(f') \arrow[r, "Q_{f'}"'] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

homotopiekommutativ und seien α, β Homotopieäquivalenzen. Zeigen Sie (für $T \in \mathbf{Top}_*$):

(a) Ist $[\varphi] \in [C(f'), T]_*$ eine Homotopieklasse mit $\gamma^*[\varphi] = *$, so gilt $[\varphi] = *$.

(b) $(\Sigma\gamma)^* \colon [\Sigma C(f'), T] \to [\Sigma C(f), T]$ ist injektiv.

(c) $(\Sigma\gamma)^* \colon [\Sigma C(f'), T] \to [\Sigma C(f), T]$ ist surjektiv.

(d) $(\Sigma\gamma)$ ist Homotopieäquivalenz.

⋆**Aufgabe 2:** Die identische Abbildung von $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ auf sich induziert eine Bijektion

$$\iota \colon (\mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q}) \wedge \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \wedge (\mathbb{Q} \wedge \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie:

(a) ι ist stetig;

(b) ι ist nicht offen.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/teaching/uebungen/topIII/2006/

Übungen Homotopietheorie Wintersemester 2006/2007

Blatt 9 Abgabe: Montag, 15.1. (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Zeigen Sie: der Hurewicz-Homomorphismus bildet die lange exakte Homotopiesequenz eines Raumpaares (X, A) in die lange exakte Homologiesequenz von (X, A) ab.

Aufgabe 2: Zeigen Sie: der Hurewicz-Homomorphismus vertauscht mit Einhängungen, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\sigma"'] & H_n(X) \arrow[d, "\sigma"] \\ \pi_{n+1}(\Sigma X) \arrow[r, "h"'] & H_{n+1}(\Sigma X) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Übungen Homotopietheorie Wintersemester 2006/2007

Blatt 10 Abgabe: Montag, 22.1. (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Sei (X, A) ein Raumpaar und $\pi_2(X) \xrightarrow{j_*} \pi_2(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \pi_1(A)$ ein Ausschnitt aus der langen exakten Homotopiesequenz. Zeigen Sie:

(a) Seien $\alpha, \beta \in \pi_2(X, A)$. Dann gilt $\tau_{\partial_*(\alpha)}(\beta) = -\alpha + \beta + \alpha$.

(b) Das Bild von j_* liegt im Zentrum von $\pi_2(X, A; x_0)$.

Aufgabe 2: Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen einfach zusammenhängenden Räumen, die für $q < n$ Isomorphismen und für $q = n$ einen Epimorphismus in H_q induziert. Zeigen Sie: f ist n-zusammenhängend.

Aufgabe 3: (a) Sei $X = \mathbb{RP}^n \times \mathbb{S}^m$, $Y = \mathbb{RP}^m \times \mathbb{S}^n$ für $m, n > 1$, $m \neq n$. Zeigen Sie: $\pi_i(X) \cong \pi_i(Y)$ für alle i, aber $H_*(X) \ncong H_*(Y)$.

(b) Finden Sie zwei Räume X, Y mit isomorpher Homologie, so daß $\pi_*(X) \ncong \pi_*(Y)$.

Aufgabe 4: Sei $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$, seien α und β die Homotopieklassen von $\mathbb{S}^2 \xhookrightarrow{\mathrm{in}_2} X$ bzw. $\mathbb{S}^1 \xhookrightarrow{\mathrm{in}_1} X$, und $f\colon \mathbb{S}^2 \longrightarrow X$ repräsentiere $2\alpha - \tau_\beta(\alpha)$. Sei $Y = X \cup_f e^3$. Zeigen Sie: Die Inklusion $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow Y$ induziert Isomorphismen in π_1 und H_*, aber nicht in π_2.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/teaching/uebungen/topIII/2006/

Übungen Homotopietheorie   Wintersemester 2006/2007

Blatt 11 Abgabe: Montag, 29.1. (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Kohomologie von $SU(n)$ und $U(n)$.

[Hinweis: Betrachen Sie die Faserung $SU(n-1) \to SU(n) \to \mathbb{S}^{2n-1}$.]

Aufgabe 2: (a) Sei $i_n \colon U(n) \hookrightarrow U(2n)$ gegeben durch $A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right)$ und bezeichne $\mu \colon U(n) \times U(n) \to U(n)$ die Multiplikation sowie $T \colon U(n) \times U(n) \to U(n) \times U(n)$ die Vertauschungsabbildung. Zeigen Sie, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U(n) \times U(n) \arrow[rr, "T"] \arrow[d, "\mu"'] & & U(n) \times U(n) \arrow[d, "\mu"] \\
U(n) \arrow[dr, "i_n"'] & & U(n) \arrow[dl, "i_n"] \\
& U(2n) &
\end{tikzcd}$$

homotopiekommutativ ist.

(b) Berechnen Sie die Homologie von $U(n)$ als Pontrjagin-Ring.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/teaching/uebungen/topIII/2006/

Übungen Homotopietheorie Wintersemester 2006/2007

Blatt 12 Abgabe: Montag, 5.2. (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Sei R ein Ring und $P_n(x)$ der Polynomring über R auf einem Erzeugenden vom Grad $n > 0$.

(a) Zeigen Sie, daß $P_n(x)$ genau eine Diagonale hat, die $P_n(x)$ zu einer Hopfalgebra macht.

(b) Bestimmen Sie die Struktur der dualen Hopfalgebra $\Gamma_n(x)$.

[Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $n \equiv 0, 1 \bmod 2$.]

Aufgabe 2: Sei $R = \mathbb{F}_p$ und n gerade.

(a) Zeigen Sie: für jedes $h \in \mathbb{N}$ ist $P_n(x)/(x^{p^h})$ eine Quotienten-Hopfalgebra von $P_n(x)$.

(b) Bestimmen Sie die Struktur der dualen Hopfalgebra.

⋆**Aufgabe 3:** Sei A eine zusammenhängende, assoziative, kommutative Hopfalgebra über $\mathbb{Q}$ von endlichem Typ. Zeigen Sie: A ist isomorph zu $\Lambda \otimes P$, wobei Λ eine äußere Algebra auf Erzeugenden ungeraden Grades und P eine Polynomalgebra auf Erzeugenden geraden Grades ist.