Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften

www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/teaching/uebungen/topII/2006/

Übungen Topologie II   Sommersemester 2006

Blatt 1 — Abgabe: Donnerstag, 13.4.06

Aufgabe 1: Die Gruppe G sei von den Elementen a, b erzeugt mit den definierenden Relationen $ab^2 = b^3a$ und $ba^2 = a^3b$. Zeigen Sie, daß G nur aus einem Element besteht.

Aufgabe 2: Zeigen Sie: Jede endlich präsentierte Gruppe ist isomorph zur Fundamentalgruppe eines endlichen Polyeders. Dabei heißt eine Gruppe G endlich präsentiert, wenn es eine endliche Menge von Erzeugenden und eine endliche Menge definierender Relatoren in G gibt.
(Ein Relator ist ein Wort in Elementen von G, das das neutrale Element definiert. Wörter der Form gg^{-1} nennt man triviale Relatoren. Eine Menge $\mathcal{R}$ von Relatoren heißt definierend oder vollständig, wenn sich jeder Relator durch die folgenden Operationen erhalten läßt: (i) Einschieben oder Anfügen eines trivialen Relators, eines Wortes R oder R^{-1} für $r \in \mathcal{R}$; (ii) Streichen eines dieser Relatoren.)

Aufgabe 3: Sei E ein regelmäßiges $2g$-Eck ($g \geq 2$) mit Ecken $p_1, \ldots, p_{2g}$, so daß die Verbindungsstrecke von p_{i-1} nach p_i eine Kante von E ist. Sei M der Identifikationsraum, der durch Identifizieren der Kante von p_{2i-1} nach p_{2i} mit der Kante von p_{2i} nach p_{2i+1} entsteht. Triangulieren Sie M und berechnen Sie die kombinatorische Fundamentalgruppe.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/teaching/uebungen/topII/2006/

Übungen Topologie II Sommersemester 2006

Blatt 2 Abgabe: Donnerstag, 20.4.06

Aufgabe 1: Zeigen Sie: Für jedes endliche Polyeder K ist $\pi_1(K)^{\mathrm{ab}} \cong H_1(K;\mathbb{Z})$.
(Hinweis: Bei der Berechnung der kombinatorischen Fundamentalgruppe wurde jedem 1-Simplex ein geschlossener Kantenweg zugeordnet.)

Aufgabe 2: Sei $(L, \mathfrak{L})$ ein simplizialer Komplex. Sei $(K, \mathfrak{K})$ der Kegel über L, d.h.

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_0 &= \mathfrak{L}_0 \cup \{\infty\}\,, \\ \mathfrak{K}_n &= \mathfrak{L}_n \cup \{\sigma^* \mid \sigma \in \mathfrak{L}_{n-1}\}\,, \quad \sigma^* = \sigma \cup \{\infty\}\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: $H_n(K;\mathbb{Z}) = 0$ für $n > 0$.

Aufgabe 3: Sei $m \geq 1$ eine natürliche Zahl und $\pi = \mathbb{Z}/m$. Definiere einen Kettenkomplex C_* durch

$$\begin{aligned} C_i &= 0 \quad \text{für } i < 0 \\ C_i &= \bigoplus_{j=0}^{m-1} \mathbb{Z}e^i_j \quad \text{für } i > 0 \\ \partial(e^{2i}_j) &= \sum_{k=0}^{m-1} e^{2i-1}_{j+k}\,,\ i \geq 0,\ 0 \leq j \leq m-1 \\ \partial(e^{2i+1}_j) &= e^{2i}_j - e^{2i}_{j+1} \end{aligned}$$

wobei untere Indizes der e^s_r modulo m zu nehmen sind.

(a) Berechnen Sie die Homologie von C_*.

(b) Konstruieren Sie einen Kettenkomplex D_* mit $D_i = \mathbb{Z}e^i$, $i \geq 0$, so daß die durch $e^i_j \mapsto e^i$ definierte Abbildung $C_* \to D_*$ ein Kettenhomomorphismus ist.

(c) Berechnen Sie die Homologie von D_* mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ und in $\mathbb{Z}/m$.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/teaching/uebungen/topII/2006/

Übungen Topologie II Sommersemester 2006

Blatt 3 Abgabe: Donnerstag, 27.4.06

Aufgabe 1: Für Untermoduln eines R-Moduls A gilt:

(a) Ist $C \subset B \subset A$, so gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \to B/C \to A/C \to A/B \to 0 \ .$$

(b) Ist $B_1 \subset A_1$ und $B_2 \subset A_2$, so gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \to (A_1 \cap A_2)/(B_1 \cap B_2) \to A_1/B_1 \oplus A_2/B_2 \to (A_1 + A_2)/(B_1 + B_2) \to 0 \ .$$

Aufgabe 2: Man führe den Beweis des Satzes von der langen exakten Homologie-Sequenz direkt aus, ohne das Schlangen-Lemma zu benutzen.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/teaching/uebungen/topII/2006/

Übungen Topologie II Sommersemester 2006

Blatt 4 Abgabe: Donnerstag, 4.5.06

Aufgabe 1: Sei $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Zeigen Sie: Genau dann existiert ein Homomorphismus $s\colon C \to B$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_C$, wenn es einen Homomorphismus $t\colon B \to A$ mit $t \circ i = \mathrm{id}_A$ gibt, und in diesem Fall gilt $B \cong A \oplus C$.

Aufgabe 2: Sei

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C'_* \arrow[r] \arrow[d] & C_* \arrow[r] \arrow[d] & C''_* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D'_* \arrow[r] \arrow[d] & D_* \arrow[r] \arrow[d] & D''_* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & E'_* \arrow[r] \arrow[d] & E_* \arrow[r] \arrow[d] & E''_* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen mit exakten Zeilen und Spalten. Zeigen Sie, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(E''_*) \arrow[r, "\partial^E_*"] \arrow[d, "\partial''_*"'] & H_n(E'_*) \arrow[d, "\partial'_*"] \\
H_n(C''_*) \arrow[r, "\partial^C_*"'] & H_{n-1}(C'_*)
\end{tikzcd}$$

antikommutativ ist ($\partial'_* \partial^E_* = -\partial^C_* \partial'_*$).

Aufgabe 3: Sei $f\colon C_* \to D_*$ ein Homomorphismus von Kettenkomplexen. Definiere graduierte Moduln ΣC_* und E_* durch $(\Sigma C_*)_n := C_{n-1}$ sowie $E_* := D_* \oplus \Sigma C_*$; sei $\sigma\colon C_{n-1} \xrightarrow{\cong} (\Sigma C_*)_n$ als Identität von C_{n-1} erklärt. Zeigen Sie:

(a) Durch $d_n(\sigma x) := -\sigma d_{n-1}(x)$ wird ΣC_* zu einem Kettenkomplex, und $H_{n-1}(C_*) \to H_n(\Sigma C_*)$, $[x] \mapsto [\sigma x]$ ist ein Isomorphismus.

(b) Durch $d_n(x, \sigma y) := (d_n(x) + f_{n-1}(y), -\sigma d_{n-1}(y))$ wird E_* zu einem Kettenkomplex.

(c) Seien $i\colon D_* \to E_*$ und $j\colon E_* \to \Sigma C_*$ die Inklusion bzw. Projektion. Dann ist $0 \to D_* \xrightarrow{i} E_* \xrightarrow{j} \Sigma C_* \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen.

(d) Sei ∂_* der verbindende Homomorphismus in der langen exakten Homologiesequenz der kurzen exakten Sequenz in (c). Dann ist ∂_* die Komposition

$$H_{n+1}(\Sigma C_*) \cong H_n(C_*) \xrightarrow{f_*} H_n(D_*)\,.$$

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/teaching/uebungen/topII/2006/

Übungen Topologie II Sommersemester 2006

Blatt 5 Abgabe: Donnerstag, 11.5.06

Aufgabe 1: Beweisen Sie das Schmetterlingslemma: Sei

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & 0 \\
& A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & A' \arrow[ur] & \\
& & C \arrow[ur, "\delta"'] \arrow[dr, "\zeta"] & & \\
& B \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[rr, "\beta"'] & & B' \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & & & 0
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von Moduln und Modulhomomorphismen mit exakten Diagonalen. Dann gilt:

$$\mathrm{Bild}(\zeta)/\,\mathrm{Bild}(\beta) \cong \mathrm{Bild}(\delta)/\,\mathrm{Bild}(\alpha)\,.$$

Aufgabe 2: (a) Definieren Sie Kategorien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ mit folgenden Objekten:

$\mathbf{A}$: kurze exakte Sequenzen von Kettenkomplexen abelscher Gruppen;

$\mathbf{B}$: lange exakte Sequenzen abelscher Gruppen.

(b) Konstruieren Sie einen (nichttrivialen) Funktor $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

Aufgabe 3: Seien C und C' Objekte der Kategorie $\mathbf{C}$ und seien $F, F' \colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ die darstellbaren Funktoren mit $F(X) = \mathbf{C}(X, C)$ und $F'(X) = \mathbf{C}(X, C')$. Zeigen Sie: Es gibt eine kanonische Bijektion zwischen der Menge der natürlichen Transformationen von F in F' und der Menge der $\mathbf{C}$-Morphismen von C nach C'.

Aufgabe 4: Sei $\mathbf{C}$ die Kategorie mit Objekten $\underline{n} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ für $n \in \mathbb{N}$ (wobei $\underline{0} = \emptyset$) und Morphismen $\mathbf{C}(\underline{m}, \underline{n}) = \mathrm{Abb}(\underline{m}, \underline{n})$. Bezeichne $\mathbf{Set}_f$ die Kategorie der endlichen Mengen und $F \colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}_f$ den Inkklusionsfunktor. Konstruieren Sie einen Funktor $G \colon \mathbf{Set}_f \to \mathbf{C}$ sowie natürliche Äquivalenzen $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ und $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{Set}_f}$.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/teaching/uebungen/topII/2006/

Übungen Topologie II   Sommersemester 2006

Blatt 6 — Abgabe: Donnerstag, 18.5.06

Aufgabe 1: (a) Sei A ein Retrakt von X. Zeigen Sie: die lange exakte Homologiesequenz des Paares (X, A) zerfällt in spaltende kurze exakte Sequenzen.

(b) Sei A ein wegzusammenhängender Teilraum von X. Zeigen Sie, daß die Inklusion $(X, \emptyset) \to (X, A)$ einen Epimorphismus $H_1(X) \to H_1(X, A)$ induziert.

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe bezeichne H_n Homologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.

(a) Berechnen Sie $H_n(\mathbb{R}^k)$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$.

(b) Berechnen Sie $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$.

Aufgabe 3: Sei $X = Y \times \mathbb{I}$ und $A = Y \times \{0, 1\} \subset X$.

(a) Konstruieren Sie einen Isomorphismus $H_n(A) \cong H_n(Y) \oplus H_n(Y)$.

(b) Berechnen Sie $H_n(X, A)$.

Aufgabe 4: Sei R ein kommutativer Ring und $(M_i, \alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein gerichtetes System von R-Moduln und R-Homomorphismen. Seien $(M_i', \alpha_i')_{i\in\mathbb{N}}$ und $(M_i'', \alpha_i'')_{i\in\mathbb{N}}$ zwei weitere gerichtete Systeme von R-Moduln und $(f_i\colon M_i' \to M_i)$ sowie $(g_i\colon M_i \to M_i'')$ Familien von R-Homomorphismen, so daß $\alpha_i f_i = f_{i+1}\alpha_i'$ und $\alpha_i'' g_i = g_{i+1}\alpha_i$ für jedes i gilt. Zeigen Sie:

(a) Die Familien (f_i) und (g_i) induzieren eindeutig bestimmte Homomorphismen

$$f\colon \varinjlim M_i' \to \varinjlim M_i \quad \text{und} \quad g\colon \varinjlim M_i \to \varinjlim M_i'' .$$

(b) Ist jede Sequenz $0 \to M_i' \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} M_i'' \to 0$ exakt, so auch die resultierende Sequenz

$$0 \to \varinjlim M_i' \longrightarrow \varinjlim M_i \longrightarrow \varinjlim M_i'' \to 0 .$$

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/teaching/uebungen/topII/2006/

Übungen Topologie II Sommersemester 2006

Blatt 7 Abgabe: Montag, 29.5.06

Aufgabe 1: Seien $X \supset Y \supset Z$ topologische Räume. Leiten Sie aus den Eilenberg-Steenrod-Axiomen die lange exakte Sequenz

$$\cdots \to H_n(Y,Z) \to H_n(X,Z) \to H_n(X,Y) \xrightarrow{\partial_*^T} H_{n-1}(Y,Z) \to \cdots$$

des Tripels (X,Y,Z) her.

Aufgabe 2: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x > 0\,, \\ 0 & \text{für } x \leq 0\,. \end{cases}$

(a) Sei X_0 der Graph von f. Zeigen Sie: $H_0(X_0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

(b) Seien

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x)\} \cup \{0\} \times [-1,1]\,, \\ X_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq f(x)\} \cup \{0\} \times [-1,1]\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß die Mayer-Vietoris-Sequenz für das Paar (X_1, X_2) nicht exakt ist.

Aufgabe 3: (a) Sei $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ der Torus, $U \subset \mathbb{T}$ eine kleine offene Scheibe, $\mathbb{T}' = \mathbb{T} - U$ der gelochte Torus und $\partial\mathbb{T}'$ sein Rand. Berechnen Sie die Homologie von $\mathbb{T}'$ sowie die Abbildung $H_1(\partial\mathbb{T}') \to H_1(\mathbb{T}')$.

(b) Sei M das Möbiusband und ∂M sein Rand. Berechnen Sie die Abbildung $H_1(\partial M) \to H_1(M)$.

Aufgabe 4: Für zwei stetige Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ sei

$$Z_{f,g} := Y \cup X \times \mathbb{I} / \big((x,0) \sim f(x),\ (x,1) \sim g(x) \big)$$

der *doppelte Abbildungszylinder* von f und g. Sei weiterhin $i\colon Y \hookrightarrow Z$ die offensichtliche Inklusion.

(a) Zeigen Sie: es gibt eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{f_* - g_*} H_n(Y) \xrightarrow{i_*} H_n(Z_{f,g}) \longrightarrow H_{n-1}(X) \xrightarrow{f_* - g_*} H_{n-1}(Y) \longrightarrow \cdots$$

(b) Benutzen Sie diese exakte Sequenz, um die Homologie der Kleinschen Flasche zu berechnen.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/teaching/uebungen/topII/2006/

Übungen Topologie II Sommersemester 2006

Blatt 8 Abgabe: Donnerstag, 1.6.06

Auf diesem Blatt bezeichne H_n stets Homologie mit Koeffizienten in dem kommutativen Ring R mit Eins.

Aufgabe 1: Sei (X, A) ein Raumpaar. Definiere einen Kettenkomplex $\widetilde{S}_*(X)$ wie folgt:

$$\widetilde{S}_n(X) := \begin{cases} S_n(X) & \text{für } n \neq -1 \text{ oder } X = \emptyset, \\ R & \text{für } n = -1 \text{ und } X \neq \emptyset. \end{cases}$$

Für $X \neq \emptyset$ ordne der Randoperator d_0 jedem 0-Simplex das Element $1 \in R$ zu. Sei weiterhin $\widetilde{S}_n(X, A) := \widetilde{S}_n(X)/\widetilde{S}_n(A)$. Zeigen Sie: Die Homologie des Komplexes $\widetilde{S}_*(X, A)$ ist kanonisch isomorph zu

$$\widetilde{H}_n(X, A) := \begin{cases} \operatorname{Kern}\big(H_0(X) \to H_0(\mathrm{pt})\big) & \text{falls } n = 0,\ X \neq \emptyset \text{ und } A = \emptyset, \\ H_n(X, A) & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\widetilde{H}_n(X, A)$ nennt man die reduzierte Homologie des Paares (X, A). Wenn $A = \emptyset$ ist, schreibt man auch kürzer $\widetilde{H}_n(X)$ statt $\widetilde{H}_n(X, A)$.

Aufgabe 2: Sei $x_0 \in X$. Zeigen Sie:

(a) Die Inklusion $(X, \emptyset) \hookrightarrow (X, x_0)$ induziert einen Isomorphismus $\widetilde{H}_0(X) \cong H_0(X, x_0)$.

(b) Die Inklusion $\{x_0\} \hookrightarrow X$ induziert eine Spaltung $H_0(X) \cong R \oplus \widetilde{H}_0(X)$.

Aufgabe 3: Sei (X, A) ein Raumpaar. Zeigen Sie: Die lange exakte Homologiesequenz des Paares (X, A) induziert eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \widetilde{H}_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

in reduzierter Homologie.

Aufgabe 4: Sei (X_1, X_2) ein ausschneidendes Paar in $X = X_1 \cup X_2$ und sei $X_0 = X_1 \cap X_2$. Zeigen Sie: Die Mayer-Vietoris-Sequenz von (X_1, X_2) induziert eine wiederum exakte reduzierte Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_n(X_0) \xrightarrow{i} \widetilde{H}_n(X_1) \oplus \widetilde{H}_n(X_2) \xrightarrow{j} \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{\partial_*^{\mathrm{MV}}} \widetilde{H}_{n-1}(X_0) \longrightarrow \cdots .$$

Übungen Topologie II   Sommersemester 2006

Blatt 9 Abgabe: Donnerstag, 15.6.06

Aufgabe 1: Seien X, Y wohlpunktierte topologische Räume und $Z = X \vee Y$ die Einpunktvereinigung von X und Y.

(a) Zeigen Sie: Die Inklusionen $i_1 \colon X \hookrightarrow Z$ und $i_2 \colon Y \hookrightarrow Z$ induzieren Isomorphismen $\widetilde{H}_n(X) \oplus \widetilde{H}_n(Y) \to \widetilde{H}_n(Z)$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $F \colon \Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma X$ gegeben durch

$$F([t,x]) := \begin{cases} i_1([2t,x]) & , \ 0 \leq t \leq 1/2\,, \\ i_2([2t-1,x]) & , \ 1/2 \leq t \leq 1\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Für $u \in H_n(\Sigma X)$ gilt $F_*(u) = (u,u)$ (mit dem Isomorphismus aus (a)).

(c) Seien $f \colon X \to W$ und $g \colon Y \to W$ zwei Abbildungen sowie $h = f \vee g \colon Z \to W$. Zeigen Sie: $h_*(u,v) = f_*(u) + g_*(v)$.

(d) Sei $r \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ die Spiegelung am Äquator. Zeigen Sie: $r_* \colon H_n(\mathbb{S}^n) \to H_n(\mathbb{S}^n)$ ist die Multiplikation mit -1.

(e) Konstruieren Sie eine Abbildung $f \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, so daß $f_* \colon H_n(\mathbb{S}^n) \to H_n(\mathbb{S}^n)$ die Nullabbildung ist.

Aufgabe 2: Sei $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ und $Y = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ die Einpunktvereinigung von $\mathbb{S}^2$ und zwei Kopien von $\mathbb{S}^1$.

(a) Zeigen Sie: $H_k(X) \cong H_k(Y)$ für alle k.

(b) Sei $\widetilde{X}$ die universelle Überlagerung von X. Zeigen Sie: $H_k(\widetilde{X}) = 0$ für $k > 0$.

(c) Sei $\widetilde{Y}$ die universelle Überlagerung von Y. Zeigen Sie: $H_2(\widetilde{Y}) \neq 0$.

Übungen Topologie II Sommersemester 2006

Blatt 10 Abgabe: Montag, 26.6.06

Aufgabe 1: Sei X ein (T_0)-Raum und $x \in X$. Die k-te lokale Homologie von X bei x sei definiert durch

$$H_k^{\mathrm{loc}}(X;x) := H_k(X, X - \{x\}) .$$

Zeigen Sie:

(a) Sei U eine Umgebung von x in X. Dann induziert die Inklusion $U \hookrightarrow X$ Isomorphismen $H_k^{\mathrm{loc}}(U;x) \cong H_k^{\mathrm{loc}}(X;x)$.

(b) Ist X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, so gilt

$$H_k^{\mathrm{loc}}(X;x) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Sei $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ und $x \in X$ der Doppelpunkt. Berechnen Sie $H_k^{\mathrm{loc}}(X;x)$.

Aufgabe 2: Sei $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine stetige Abbildung ($n > 0$) und $y \in \mathbb{S}^n$ ein Punkt mit endlichem Urbild, etwa $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Seien $U_1, \ldots, U_m$ disjunkte Umgebungen der x_i und V eine Umgebung von y mit $f(U_i) \subset V$. Definiere den lokalen Grad $\mathrm{grad}(f; x_i)$ von f bei x_i als Bild der 1 unter der Komposition

$$\mathbb{Z} = H_n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\cong} H_n^{\mathrm{loc}}(\mathbb{S}^n; x_i) \xleftarrow{\cong} H_n^{\mathrm{loc}}(U_i; x_i) \xrightarrow{f_*} H_n^{\mathrm{loc}}(V; y) \xrightarrow{\cong} H_n^{\mathrm{loc}}(\mathbb{S}^n; y) \xleftarrow{\cong} H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z} .$$

Zeigen Sie:

$$\mathrm{grad}(f) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{grad}(f; x_i) .$$

Aufgabe 3: Sei $f \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grad d und $\hat{f}\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ die Erweiterung von f auf die Einpunktkompaktifizierung $\mathbb{S}^2$ von $\mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{grad}(\hat{f}) = d$.

(b) Der lokale Grad von $\hat{f}$ bei p ist die Vielfachheit von p als Nullstelle von f.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
`www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/teaching/uebungen/topII/2006/`

Übungen Topologie II Sommersemester 2006

Blatt 11 Abgabe: Montag, 3.7.06

Ziel dieses Blattes ist die Berechnung der Homologie der projektiven Räume.
Betrachte die CW-Zerlegung der n-Sphäre mit zwei Zellen in jeder Dimension i, $0 \leq i \leq n$:

$$\mathbb{S}^n = e^0_+ \cup e^0_- \cup \ldots \cup e^q_+ \cup e^q_- \cup \ldots \cup e^n_+ \cup e^n_- \,;$$

hierbei sei e^q_+ (bzw. e^q_-) die obere (bzw. untere) Hemisphäre von $\mathbb{S}^q$. Die charakteristischen Abbildungen sind gegeben durch

$$\chi^q_\pm \colon \mathbb{D}^q \to \mathbb{S}^q\,, \quad x \mapsto (x, \pm\sqrt{1-|x|^2})\,.$$

Dann ist $\chi^q_\pm|_{\mathbb{S}^{q-1}}$ die Einbettung des Äquators (d.h. des $(q-1)$-Skeletts).

Aufgabe 1: Sei $(C_*(\mathbb{S}^n), d_*)$ der zelluläre Kettenkomplex zu dieser Zerlegung. Zeigen Sie: Der zelluläre Randoperator ist gegeben durch

$$d_{q+1}(e^{q+1}_+) = d_{q+1}(e^{q+1}_-) = \pm(e^q_+ - e^q_-)\,.$$

Aufgabe 2: Bezeichne A die Antipodenabbildung $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Zeigen Sie: Für die von A induzierte Kettenabbildung A_* gilt

$$A_*(e^q_+) = (-1)^q e^q_-\,.$$

(Hinweis: Sei $\widetilde{A} \colon \mathbb{D}^q \to \mathbb{D}^q$ gegeben durch $\widetilde{A}(x) = -x$; dann gilt $A \circ \chi^q_+ = \chi^q_- \circ \widetilde{A}$ und $\widetilde{A}|_{\mathbb{S}^{q-1}} = A|_{\mathbb{S}^{q-1}}$.)

Aufgabe 3: Sei $\mathbb{S}^n$ mit obiger CW-Struktur versehen und $\pi \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ die Projektion. Dadurch wird $\mathbb{RP}^n$ zu einem CW-Komplex mit einer Zelle $e^q = \pi(e^q_+) = \pi(e^q_-)$ in jeder Dimension q von 0 bis n.

(a) Sei π_* die durch π induzierte Abbildung zellulärer Komplexe. Zeigen Sie:

$$\pi_*(e^q_-) = (-1)^q e^q\,.$$

(b) Folgern Sie, daß der zelluläre Randoperator durch

$$d_q(e^q) = \begin{cases} 2e^{q-1} & q \text{ gerade} \\ 0 & q \text{ ungerade} \end{cases}$$

gegeben ist.

(c) Berechnen Sie die Homologie von $\mathbb{RP}^n$ mit ganzzahligen und mit $\mathbb{Z}/2$-Koeffizienten.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/teaching/uebungen/topII/2006/

Übungen Topologie II   Sommersemester 2006

Blatt 12 Abgabe: Montag, 10.7.06

Aufgabe 1: Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein CW-Komplex. Ein Teilraum $Y \subset X$ heißt Unterkomplex von X, wenn es eine Teilmenge $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X}$ gilt, so daß gilt:

(i) $Y = \coprod_{\sigma \in \mathfrak{Y}} \sigma$,

(ii) $\overline{\sigma} \subset Y$ für jedes $\sigma \in \mathfrak{Y}$.

Zeigen Sie:

(a) Seien X_1, X_2 Unterkomplexe von X. Dann sind auch $X_1 \cap X_2$ und $X_1 \cup X_2$ Unterkompleze von X.

(b) Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein endlicher CW-Komplex und X_1, X_2 Unterkomplexe von X. Dann gilt

$$e(X_1 \cup X_2) + e(X_1 \cap X_2) = e(X_1) + e(X_2)\,.$$

Aufgabe 2: Seien X und Y endliche CW-Komplexe. Zeigen Sie:

(a) $X \times Y$ ist in kanonischer Weise wieder ein CW-Komplex.

(b) $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$.

Aufgabe 3: Sei X ein endlicher CW-Komplex und k ein Körper. Zeigen Sie:

$$e(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k H_i(X; k)\,.$$

Aufgabe 4: Sei X ein endlicher simplizialer Komplex und $\tilde{X}$ eine n-fache Überlagerung von X.

(a) Zeigen Sie: $\tilde{X}$ ist in kanonischer Weise wieder ein endlicher simplizialer Komplex.

(b) Zeigen Sie: $e(\tilde{X}) = n \cdot e(X)$.

(c) Berechnen Sie die Euler-Charakteristik von $\mathbb{RP}^n$.