Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/Top1/

Übungen Topologie I   Wintersemester 2005/2006

Blatt 1 Abgabe: Freitag, 28.10.2005 (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Seien $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ und $Y_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$, $i = 1, 2$, Teilmengen und $f_i : X_i \to Y_i$ stetige Abbildungen. Dann ist durch $((1-t)x_1, t, tx_2) \mapsto ((1-t)f_1(x_1), t, tf_2(x_2))$, $x_i \in X_i$, $0 \le t \le 1$, eine Abbildung $f_1 * f_2 : X_1 * X_2 \to Y_1 * Y_2$ definiert. Zeigen Sie:

(a) Sind Y_1 und Y_2 beschränkt, so ist $f_1 * f_2$ stetig.

(b) Sind alle vier Teilmengen beschränkt und f_1, f_2 Homöomorphismen, so ist auch $f_1 * f_2$ ein Homöomorphismus.

(c) Ist die Voraussetzung in (a) notwendig?

Aufgabe 2: Zeigen Sie, daß der Join kommutativ und assoziativ ist, d.h. geben Sie Homöomorphismen

(a) $X * Y \to Y * X$ und

(b) $X * (Y * Z) \to (X * Y) * Z$

an.

Aufgabe 3: Sei Δ^n das Standard-n-Simplex.

(a) Finden Sie einen Homöomorphismus

$$\Delta^n \longrightarrow \widetilde{\Delta}^n := \{(t_1, \dots, t_n) \,|\, 0 \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_n \le 1\} \subset \mathbb{R}^n .$$

(b) Sei B_i das Bild der Abbildung

$$\varphi_i : \widetilde{\Delta}^{n+1} \longrightarrow \widetilde{\Delta}^n \times \mathbf{I}, \quad (t_1, \dots, t_{n+1}) \mapsto (t_1, \dots, \hat{t}_i, \dots, t_{n+1}; t_i) .$$

Zeigen Sie: die B_i liefern eine Triangulierung von $\widetilde{\Delta}^n \times \mathbf{I}$.

$\star$ (c) Konstruieren Sie eine Triangulierung von $\widetilde{\Delta}^n \times \widetilde{\Delta}^m$.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/Top1/

Übungen Topologie I   Wintersemester 2005/2006

Blatt 2   Abgabe: Freitag, 4. 11. 2005

Aufgabe 1: Sei $A = \{(x, \sin(\frac{\pi}{x})) \,|\, x > 0\}$ und $B = \{(0, y) \,|\, -1 \leq y \leq 1\}$. Zeigen Sie: $A \cup B$ ist nicht wegzusammenhängend.

Aufgabe 2: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $M_k \subset \mathbb{R}^2$ wegzusammenhängend. Ferner gelte stets $M_{k+1} \subset M_k$. Ist dann $M := \bigcap_k M_k$ ebenfalls wegzusammenhängend?
Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 3: Seien

$$M = \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \mid r - 1 = \lambda \sin(\tfrac{\varphi}{2}), z = \lambda \cos(\tfrac{\varphi}{2}), -\tfrac{1}{2} \leq \lambda \leq \tfrac{1}{2}\}$$

und

$$Z = \{(\cos(\varphi), \sin(\varphi), z) \mid -\tfrac{1}{2} \leq z \leq \tfrac{1}{2}\}$$

das Möbiusband bzw. der Zylinder. Triangulieren Sie M und Z mit möglichst wenigen 2-Simplizes.

Aufgabe 4: Seien $A \subset X \subset \mathbb{R}^n$ und $i : A \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung. Eine stetige Abbildung $r : X \to A$ heißt *Retraktion* (und A ein *Retrakt* von X), wenn $r \circ i = \mathrm{id}_A$ ist.
Für $n > 0$ sei L_n die Strecke im $\mathbb{R}^2$, die die Punkte $p_n = (0, 1/n)$ und $(1, 0)$ verbindet, L_0 die Strecke von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$ und $A := \bigcup_{n \geq 0} L_n$. Zeigen Sie: A ist kein Retrakt des Einheitsquadrats $X = [0, 1] \times [0, 1]$.
(Hinweis: Jeder Verbindungsweg von p_n nach p_{n+1} in A muß durch $(1, 0)$ laufen.)

Übungen Topologie I Wintersemester 2005/2006

Blatt 3 Abgabe: Freitag, 18. 11. 2005

Aufgabe 1: Seien $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ und $g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ stetig. Zeigen Sie:

$$\mathrm{UZ}(f \circ g; p) = \mathrm{grad}(g)\,\mathrm{UZ}(f; p)$$

für jedes $p \in \mathbb{R}^2 - \mathrm{Bild}(f)$.

Aufgabe 2: (a) Sei $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ stetig und ω ein Weg im Komplement von $\mathrm{Bild}(f)$. Zeigen Sie: $\mathrm{UZ}(f; \omega(t))$ ist unabhängig von t.

(b) Sei $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ stetig und $p \in \mathbb{R}^2 - \mathbb{S}^1$. Dann gilt

$$\mathrm{UZ}(f; p) = \begin{cases} \mathrm{grad}(f) & \text{für } p \in \mathbb{E}^2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Sei $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ ein Homöomorphismus und $p \in \mathbb{R}^2 - \mathbb{S}^1$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{UZ}(f; p) = \begin{cases} \pm 1\,, & p \in \mathbb{E}^2\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3: Seien f und g stetige Abbildungen $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ mit $\mathrm{grad}(f) = \mathrm{grad}(g)$. Zeigen Sie: Es gibt eine stetige Abbildung $H : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^1$.

Aufgabe 4: Seien $K_1, K_2, K_3 \subset \mathbb{S}^2$ abgeschlossene Mengen, die $\mathbb{S}^2$ überdecken. Zeigen Sie: Eines der K_i enthält ein Paar von Antipodenpunkten.
(Hinweis: Betrachten Sie die Abstandsfunktionen zu K_i und benutzen Sie den Satz von Borsuk-Ulam.)

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/Top1/

Übungen Topologie I Wintersemester 2005/2006

Blatt 4 Abgabe: Freitag, 25. 11. 2005

Aufgabe 1: Auf $X = \mathbb{R}$ seien folgende Familien von Teilmengen definiert:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{T}_\delta := \mathcal{P}(X) & , & \mathcal{T}_a := \{O \subset X \mid X - O \text{ ist abzählbar}\} \cup \{\emptyset\} \\ \mathcal{T}_k := \{\emptyset, X\} & , & \mathcal{T}_e := \{O \subset X \mid X - O \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset\}\,. \end{array}$$

Zeigen Sie: Diese Familien sind Topologien auf X, und die Abbildungen

$$(X, \mathcal{T}_\delta) \xrightarrow{\text{id}} (X, \mathcal{T}_a) \xrightarrow{\text{id}} (X, \mathcal{T}_e) \xrightarrow{\text{id}} (X, \mathcal{T}_k)$$

sind stetig und bijektiv, aber keine Homöomorphismen.

Aufgabe 2: Sei jedem Element x der Menge X eine nicht leere Familie $\mathcal{U}_x$ von Teilmengen zugeordnet. Dann gibt es genau dann eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, so daß $\mathcal{U}_x$ jeweils die Familie der Umgebungen von x bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$ ist, wenn gilt:

1. $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow x \in U$;
2. $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_x$;
3. $U \in \mathcal{U}_x, V \supset U \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x$;
4. ist $U \in \mathcal{U}_x$, so gibt es ein $V \in \mathcal{U}_x$ für das gilt: $y \in V \Rightarrow U \in \mathcal{U}_y$.

Aufgabe 3: Sei X eine Menge und sei jeder Teilmenge $M \subset X$ eine Teilmenge $\mathcal{K}(M) \subset X$ zugeordnet. Dann gibt es genau dann eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, so daß $\mathcal{K}(M)$ für jedes M der offene Kern von M bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$ ist, wenn $\mathcal{K}$ die folgenden Eigenschaften hat:

1. $\mathcal{K}(M) \subset M$ und $\mathcal{K}(X) = X$;
2. $\mathcal{K}(\mathcal{K}(M)) = \mathcal{K}(M)$;
3. $\mathcal{K}(M_1 \cap M_2) = \mathcal{K}(M_1) \cap \mathcal{K}(M_2)$.

Aufgabe 4: Ein Filter $\mathcal{G}$ auf X heißt Ultrafilter, wenn es keinen Filter auf X gibt, der echt feiner ist als $\mathcal{G}$. Zeigen Sie:

(a) Sei $\mathcal{G}$ Ultrafilter auf X. Sind $A, B \subset X$ mit $A \cup B \in \mathcal{G}$, so ist $A \in \mathcal{G}$ oder $B \in \mathcal{G}$.

(b) Ein Filter $\mathcal{G}$ ist genau dann Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ gilt: $A \in \mathcal{G}$ oder $(X - A) \in \mathcal{G}$.

(c) Sei $\mathcal{G}$ Ultrafilter auf X und $\text{Fix}(\mathcal{G}) = \bigcap_{G \in \mathcal{G}} G$. Ist $\text{Fix}(\mathcal{G}) \neq \emptyset$, so ist $\mathcal{G}$ ein trivialer Ultrafilter $\mathcal{F}_p = \{F \subset X \mid p \in F\}$ für ein $p \in X$.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/Top1/

Übungen Topologie I   Wintersemester 2005/2006

Blatt 5   Abgabe: Freitag, 2. 12. 2005

Aufgabe 1: Seien X_i, $i \in \mathbb{N}$, nichtleere topologische Räume und $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ mit der Produkttopologie. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und bezeichne $\mathcal{F}_i$ den Bildfilter der i-ten Projektion. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter, so sind alle $\mathcal{F}_i$ Ultrafilter.

(b) $\mathcal{F}$ konvergiert gegen $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn jedes $\mathcal{F}_i$ gegen x_i konvergiert.

(c) Seien alle X_i diskret und $\mathcal{F}$ der Umgebungsfilter eines Punktes $p \in X$. Dann ist $\mathcal{F}$ kein Ultrafilter, aber alle $\mathcal{F}_i$ sind Ultrafilter.

Aufgabe 2: Seien X, Y topologische Räume, $A \subset X$ ein Teilraum und $f\colon X \to Y$ eine Quotientenabbildung. Bezeichne $\mathcal{T}'$ die Teilraumtopologie auf $B := f(A) \subset Y$ und $\mathcal{T}''$ die Quotiententopologie auf B bezüglich $f|_A$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{T}''$ ist feiner als $\mathcal{T}'$.

(b) Sei $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $A = \{(t, t\sqrt{2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $f : X \to Y$ gegeben durch $f(t_1, t_2) = (\mathrm{Exp}(t_1), \mathrm{Exp}(t_2))$. Dann ist $\mathcal{T}' \neq \mathcal{T}''$.

Aufgabe 3: Auf $\mathbb{Q}$ (mit der Standard-Topologie) sei die Äquivalenzrelation R definiert durch $xRy \Leftrightarrow (x, y \in \mathbb{Z}$ oder $x = y)$. Definiere auf $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ die Äquivalenzrelation S durch $\mathrm{id} \times R$, d.h. $(x_1, x_2)S(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 = y_1$ und x_2Ry_2. Zeigen Sie:

(a) R ist abgeschlossen.

(b) Die kanonische Abbildung $\varphi : (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})/S \longrightarrow \mathbb{Q} \times (\mathbb{Q}/R)$ ist stetig und bijektiv.

(c) φ ist kein Homöomorphismus.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/Top1/

Übungen Topologie I Wintersemester 2005/2006

Blatt 6 Abgabe: Freitag, 9. 12. 2005

Aufgabe 1: Es seien (U_2) und (U_3) die folgenden Bedingungen an einen topologischen Raum X:

(U_2): Sind $p, q \in X$ verschieden, so gibt es eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{I}$ mit $f(p) = 0$ und $f(q) = 1$.

(U_3): Ist $A \subset X$ abgeschlossen und $p \notin A$, so gibt es eine stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{I}$ mit $f|_A = 0$ und $f(p) = 1$.

Zeigen Sie:

(a) Erfüllt X die Bedingung (U_2), so erfüllt X auch (T_0), (T_1), (T_2) und $(T_{2.5})$.

(b) Erfüllt X die Bedingung (U_3), so erfüllt X auch (T_3).

(c) Erfüllt X die Bedingungen (U_3) und (T_0), so erfüllt X auch (U_2).

Aufgabe 2: Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt *dicht* in X, falls ihr Abschluß ganz X ist. Zeigen Sie:

(a) A ist genau dann dicht in X, wenn A mit jeder nichtleeren offenen Teilmenge von X einen nichtleeren Schnitt hat.

(b) $\mathbb{Q}^n$ ist dicht in $\mathbb{R}^n$.

(c) Sei Y ein (T_2)-Raum. Zwei stetige Abbildungen $f, g\colon X \to Y$, die auf einer dichten Teilmenge von X übereinstimmen, sind gleich.

Aufgabe 3: Zeigen Sie: Ein abgeschlossener Teilraum eines (T_4)-Raums ist wieder (T_4).

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/Top1/

Übungen Topologie I Wintersemester 2005/2006

Blatt 7 Abgabe: Freitag, 16. 12. 2005

Aufgabe 1: Zeigen Sie:

(a) Ist X ein (T_5)-Raum, so auch jeder Teilraum.

(b) X ist genau dann ein (T_5)-Raum, wenn jeder Unterraum ein (T_4)-Raum ist.
(Hinweis: Falls $A, B \subset X$ getrennt liegen, betrachten Sie $Y = X - (\overline{A} \cap \overline{B})$ sowie $Y \cap \overline{A}$ und $Y \cap \overline{B}$.)

Aufgabe 2: Seien A, B Teilmengen eines topologischen Raums X. Zeigen Sie:

(a) Sind A und B abgeschlossen in X und sind $A \cup B$ sowie $A \cap B$ zusammenhängend, so sind auch A und B zusammenhängend.

(b) Sind A und B zusammenhängend und ist $\overline{A} \cap B$ nicht leer, so ist $A \cup B$ zusammenhängend.

Aufgabe 3: Seien X, Y zusammenhängende topologische Räume und $A \subset X$, $B \subset Y$ echte Teilmengen. Zeigen Sie: $X \times Y - A \times B$ ist zusammenhängend.

Aufgabe 4: Ein topologischer Raum heißt lokal wegzusammenhängend, wenn jede Umgebung eines Punktes eine wegzusammenhängende Umgebung dieses Punktes enthält.

(a) Zeigen Sie: Ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum ist wegzusammenhängend.

(b) Geben Sie ein Beispiel eines wegzusammenhängenden Raumes, der nicht lokal wegzusammenhängend ist.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/Top1/

Übungen Topologie I Wintersemester 2005/2006

Blatt 8 Abgabe: Dienstag, 10. 1. 2006

Aufgabe 1: Sei $X = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \{0,1\}) = \prod_{r\in\mathbb{R}} \{0,1\}$ mit der Produkttopologie. Zeigen Sie:

(a) X ist ein kompakter Hausdorff-Raum.

(b) Zu k-Tupeln $E = (e_1, \dots, e_k)$, $e_i \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden, und $w = (w_1, \dots, w_k)$, $w_j \in \{0,1\}$ sei
$$\mathcal{O}_{E,w} = \{f\colon \mathbb{R} \to \{0,1\} \mid f(e_j) = w_j\}\,.$$
Dann bilden die Mengen der Form $\mathcal{O}_{E,w}$ eine Basis der Topologie auf X.

(c) Zu $M \subset \mathbb{R}$ bezeichne χ_M die charakteristische Funktion von M. Sei
$$A = \{\chi_I \mid I \subset \mathbb{R} \text{ ist abzählbar}\}\,.$$
Dann hat jede Folge in A eine konvergente Teilfolge.
(Hinweis: Zu einer Folge χ_{I_n} in A sei $J = \{r \in \mathbb{R} \mid r \in\ I_n$ für unendlich viele $n\}$. Untersuchen Sie χ_J.)

(d) $A \subset X$ ist nicht abgeschlossen, also auch nicht kompakt.

Aufgabe 2: Zeigen Sie: ein topologischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn jeder Ultrafilter auf X konvergiert. (Sie können dabei verwenden, daß jeder Filter in einem Ultrafilter enthalten ist.)

Aufgabe 3: Sei X ein Hausdorff-Raum, so daß jeder Teilraum von X kompakt ist. Zeigen Sie: X ist endlich. (Stimmt dies auch noch, wenn X nicht hausdorffsch ist?)

Aufgabe 4: (a) Sei X ein Hausdorff-Raum. Dann sind äquivalent:

(1) jeder Punkt hat eine kompakte Umgebung,
(2) jeder Punkt hat eine kompakte abgeschlossene Umgebung;
(3) jede Umgebung eines Punktes enthält eine kompakte Umgebung;
(4) jede Umgebung eines Punktes enthält eine kompakte abgeschlossene Umgebung.

(b) Finden Sie ein Beispiel eines nicht hausdorffschen Raums, der (3), aber weder (2) noch (4) erfüllt.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/Top1/

Übungen Topologie I   Wintersemester 2005/2006

Blatt 9 — Abgabe: Dienstag, 17. 1. 2006

Aufgabe 1: Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und Y ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\mathcal{C}(X,Y)$ der stetigen Abbildungen von X nach Y ist in kanonischer Weise ein metrischer Raum.

(b) Für eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ und eine offene Teilmenge $U \subset Y$ sei

$$C_{K,U} := \{ f \in \mathcal{C}(X,Y) \mid f(K) \subset U \} .$$

Zeigen Sie: Die Mengen der Form $C_{K,U}$ bilden eine Subbasis der metrischen Topologie von $\mathcal{C}(X,Y)$.

Aufgabe 2: Sei G eine Gruppe von Homöomorphismen eines Raumes X (mit der Komposition von Abbildungen als Gruppenoperation). Definiere eine Äquivalenzrelation R auf X durch

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow \text{ es gibt ein } g \in G \text{ mit } g(x) = y .$$

Zeigen Sie, daß R eine offene Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 3: Sei R eine offene Äquivalenzrelation auf dem lokal-kompakten Hausdorff-Raum X. Zeigen Sie, daß X/R wieder lokal-kompakt ist.

Aufgabe 4: Zeigen Sie: $\mathbb{R}P^1 \cong \mathbb{S}^1$, $\mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{S}^2$ und $\mathbb{H}P^1 \cong \mathbb{S}^4$.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/Top1/

Übungen Topologie I Wintersemester 2005/2006

Blatt 10 Abgabe: Dienstag, 24. 1. 2006

Aufgabe 1: Sei $X := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ mit dem Basispunkt $(1,1)$ versehen. Berechnen Sie die von den folgenden stetigen Abbildungen induzierten Homomorphismen von Fundamentalgruppen:

(a) $i_1,\, i_2 : \mathbb{S}^1 \to X$ mit $i_1(z) = (z,1)$ und $i_2(z) = (1,z)$,

(b) $\mu : X \to \mathbb{S}^1$ mit $\mu(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$,

(c) $\Delta : \mathbb{S}^1 \to X$ mit $\Delta(z) = (z,z)$,

(d) $f_{m,n} : X \to \mathbb{S}^1$ mit $f_{m,n}(z_1,z_2) = z_1^m \cdot z_2^n$ (für $m,n \in \mathbb{Z}$).

Aufgabe 2: Sei $\widetilde{\omega} : \mathbb{I} \to \mathbb{S}^2$ durch $\widetilde{\omega}(t) = \cos(\pi t)\cdot e_1 + \sin(\pi t)\cdot e_2$ definiert. Sei $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}P^2$ die Projektion und $\omega := p \circ \widetilde{\omega}$. Zeigen Sie, daß ω eine Schleife in $\mathbb{R}P^2$ ist und daß $\omega * \omega$ nullhomotop ist.

Aufgabe 3: Sei X ein Raum, so daß jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to X$ nullhomotop ist. Zeigen Sie, daß $\pi_1(X, x_0) = 0$ ist (für jeden Basispunkt x_0).

Aufgabe 4: Berechnen Sie die Fundamentalgruppe des Möbiusbandes. Welches Element repräsentiert die Randkurve?

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/Top1/

Übungen Topologie I Wintersemester 2005/2006

Blatt 11 Abgabe: Dienstag, 31. 1. 2006

Aufgabe 1: (a) Seien $\omega, \eta \in \Omega\mathbb{S}^1$. Sei $\zeta \in \Omega\mathbb{S}^1$ definiert durch $\zeta(t) := \omega(t) \cdot \eta(t)$. Zeigen Sie: $[\zeta] = [\omega] + [\eta]$.

(b) Sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Zeigen Sie: Für $f, g \in [X, \mathbb{S}^1]_*$ ist $\pi_1(f \cdot g) = \pi_1(f) + \pi_1(g)$.

(c) Sei X wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, und $f \in [X, \mathbb{S}^1]_*$. Zeigen Sie: Ist $\pi_1(f) = 0$, so ist f nullhomotop.

(d) Zeigen Sie: $[X, \mathbb{S}^1]_* \to \mathrm{Hom}(\pi_1(X), \pi_1(\mathbb{S}^1))$ ist injektiv.
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß diese Abbildung ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist.)

(e) Zeigen Sie: $[\mathbb{R}P^n, \mathbb{S}^1]_* = 0$ für $n \geq 2$.

Aufgabe 2: Sei G eine endliche Gruppe, die frei auf dem Hausdorffraum X operiere.

(a) Zeigen Sie: Die kanonische Projektion $X \to X/G$ ist eine Überlagerung.

(b) G operiere zusätzlich auf der endlichen Menge M. Dann operiert G auf $X \times M$ vermöge $g(x, m) = (gx, gm)$. Zeigen Sie, daß die kanonische Abbildung

$$(X \times M)/G \to X/G$$

eine Überlagerung ist und bestimmen Sie die Blätterzahl.