Vorlesung Funktionentheorie I — SS 05
Inhaltsübersicht
des ersten Teils

Erich Ossa

Vorläufige Version

Inhaltsverzeichnis

Dieses Skript ist noch nicht in seiner endgültigen Gestalt.
Für Fehlermeldungen, Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge wäre ich dankbar.

E. Ossa

1 Wiederholung: Die komplexen Zahlen

Die komplexen Zahlen sind dadurch definiert, daß die Abbildung

$$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{C} \text{ mit } (x,y) \mapsto x+iy$$

eine Bijektion ist. Das Bild von $(0,1)$ ist die imaginäre Einheit i. Ist $z = x+iy$ mit $x, y \in \mathbf{R}$, so ist $\mathrm{Re}(z) = x$ der Realteil von z und $\mathrm{Im}(z) = y$ der Imaginärteil von z. Die konjugiert komplexe Zahl zu z ist dann $\overline{z} = x - iy$.

Die Multiplikation mit z als $\mathbf{R}$-lineare Abbildung $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ wird bezüglich der Basis $(1, i)$ von $\mathbf{C}$ durch die Matrix

$$\mu_z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die Abbildung

$$\mu : \mathbf{C} \to \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbf{R}) \bigm| d = a,\, c = -b\}$$

ist ein Isomorphismus von Ringen. Insbesondere ist $\mu_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $i^2 = -1$. Es wird

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} \ .$$

Ist $(x, y) \in \mathbf{R}^2 - \{0\}$, so gibt es eindeutig bestimmte $r, \varphi \in \mathbf{R}$ mit

$$r > 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

und

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \ .$$

Wir setzen mit $z = x + iy$

$$|z| = r \quad \text{und} \quad \arg(z) = \varphi \ .$$

Genau genommen ist arg der Hauptwert des Arguments von z, denn der Übergang zu $\psi = \varphi + 2k\pi$ mit $k \in \mathbf{Z}$ führt zu

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos\psi + i\sin\psi) \ .$$

Für $z = 0$ vereinbaren wir als Hauptwert $\arg(0) = 0$.

Es wird dann

$$\mu_z = r\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =: \sigma_{r,\varphi}$$

die Drehstreckung mit Drehwinkel φ und Streckungsfaktor r.

Wichtig ist die Dreiecksgleichung

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \ . \tag{1}$$

Ist $z_1 \neq 0 \neq z_2$, so gilt in (1) genau dann die Gleichheit, wenn $\arg(z_1) = \arg(z_2)$ ist. Zum Beweis von (1) sei $r_j = |z_j|$ und $\varphi_j = \arg(z_j)$. Dann wird

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2)^2 + (r_1\sin\varphi_1 + r_2\sin\varphi_2)^2 \\ &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ . \end{aligned}$$

Nun ist $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \leq 1$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ ist. Damit ist (1) bewiesen.

Bezüglich der Multiplikation gilt offensichtlich

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

und

$$\arg(z_1 \cdot z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi\mathbf{Z}} .$$

Die 2-Sphäre ist

$$\mathbf{S}^2 = \{(z,\zeta) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R} \;\big|\; |z|^2 + \zeta^2 = 1\} .$$

Es sei

$$\mathbf{n} := (0,1) \in \mathbf{S}^2$$

der Nordpol von $\mathbf{S}^2$. Die stereographische Projektion

$$\Phi : \mathbf{S}^2 - \{\mathbf{n}\} \to \mathbf{C}$$

ist wie folgt definiert: Für $p \in \mathbf{S}^2 - \{\mathbf{n}\}$ sei $\Phi(p)$ der Schnittpunkt des Strahls $\{\mathbf{n} + t\cdot(p - \mathbf{n}) \mid t \geq 0\}$ mit $\mathbf{C} = \mathbf{C} \times 0$.

1.1 Lemma: *Für* $(z,\zeta) \in \mathbf{S}^2 - \{\mathbf{n}\}$ *ist*

$$\Phi(z,\zeta) = \frac{z}{1-\zeta} .$$

$\Phi : \mathbf{S}^2 - \{\mathbf{n}\} \to \mathbf{C}$ *ist bijektiv mit Umkehrabbildung*

$$\Phi^{-1}(w) = \left(\frac{2w}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right) .$$

Beweis: als Übungsaufgabe. □

1.2 Lemma: *Für* w_1, $w_2 \in \mathbf{C}$ *ist*

$$\|\,\Phi^{-1}(w_1) - \Phi^{-1}(w_2)\,\| = \frac{2\,|w_2 - w_1|}{\sqrt{|w_1|^2+1}\sqrt{|w_2|^2+1}}$$

und

$$\|\,\Phi^{-1}(w_1) - \mathbf{n}\,\| = \frac{2w_1}{\sqrt{|w_1|^2+1}} .$$

Beweis: als Übungsaufgabe. □

Man nennt

$$\chi(w_1,w_2) := \|\,\Phi^{-1}(w_1) - \Phi^{-1}(w_2)\,\|$$

auch den chordalen Abstand von w_1 und w_2.

Wir setzen $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ und erweitern Φ zu einer Bijektion

$$\overline{\Phi} : \mathbf{S}^2 \to \overline{\mathbf{C}}$$

durch $\overline{\Phi}(\mathbf{n}) = \infty$.

Wir erinnern daran, daß eine Folge (z_n) komplexer Zahlen genau dann den Grenzwert $a \in \mathbf{C}$ hat,

$$\lim_{n \to \infty} z_n = a \ ,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbf{N}$ gibt, so daß für $n \geq n_0$ stets $|z_n - a| < \varepsilon$ ist.
Wir schreiben

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \infty \ ,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbf{N}$ gibt, so daß für $n \geq n_0$ stets $|z_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ ist.

Sei $U \subset \mathbf{C}$ eine Teilmenge, $f : U \to \mathbf{R}^m$ eine Abbildung. Ist $z_* \in \mathbf{C}$ ein Häufungspunkt von U, so ist

$$\lim_{z \to z_*} f(z) = a$$

genau dann, wenn für jede Folge (z_n) mit $z_n \in U - \{z_*\}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_*$ der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = a$ ist. Ist $z_* \in U$, so heißt f stetig in z_*, wenn $\lim\limits_{z \to z_*} f(z) = f(z_*)$ ist.

Wir betrachten nun noch Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{2}$$

Es folgt leicht: Ist (2) für ein $z_1 \in \mathbf{C}$ konvergent, so ist $f(z)$ für alle z mit $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ absolut konvergent.
Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe (2) und

$$\lambda := \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \in \overline{\mathbf{R}} \ .$$

Wie in der reellen Analysis beweist man die Formel von Cauchy-Hadamard

1.3 Satz: *Es ist*

$$R = \begin{cases} \infty & \text{\textit{für} } \lambda = 0 \ , \\ 0 & \text{\textit{für} } \lambda = \infty \ , \\ \dfrac{1}{\lambda} & \text{\textit{sonst}} \quad . \end{cases}$$

Hieraus folgt unmittelbar

1.4 Lemma: *Sei* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ *und*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} (z - z_0)^n$$

die durch gliedweise Differentiation von $f(z)$ erhaltene Potenzreihe. Dann haben $g(z)$ und $f(z)$ den gleichen Konvergenzradius.

Schon aus dem Quotienten-Kriterium folgt leicht, daß

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

und

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

den Konvergenzradius ∞ haben. Damit sind diese Reihen für alle $z \in \mathbf{C}$ absolut konvergent. Man erhält so die Funktionalgleichung

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \ .$$

Es gilt die wichtige Formel

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \ .$$

Wir merken noch an, daß

$$e^{\pi i} = -1$$

und

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

ist. Für $n \in \mathbf{N}_+$ hat die Gleichung

$$z^n = 1$$

genau die Lösungen

$$z = e^{\frac{2\pi j i}{n}}, \quad j = 1, \ldots, n \ .$$

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine reelle 2×2-Matrix mit $\det(A) \neq 0$. Für $z \in \mathbf{C}$ mit $cz + d \notin 0$ sei

$$M_A(z) := \frac{az+b}{cz+d} \ .$$

Die Zuordnung $z \mapsto M_A(z)$ heißt eine Möbius-Transformation (oder auch gebrochen lineare Transformation). Es gilt

$$M_{A_1}(M_{A_2}(z)) = M_{A_1 A_2}(z) \ ,$$

denn es wird (mit offensichtlicher Notation)

$$\begin{aligned} M_{A_1}\Big(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\Big) &= \frac{a_1(a_2 z + b_2) + b_1(c_2 z + d_2)}{c_1(a_2 z + b_2) + d_1(c_2 z + d_z)} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2) z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)} \ . \end{aligned}$$

Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist

$$M_A(z) = \frac{1}{z}$$

die sogenannte Inversion.
Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wird

$$M_A(z) = az + b$$

eine affin-lineare Abbildung.
Wir erweitern M_A für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zu einer Abbildung

$$M_A : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$$

wie folgt:
Ist $c = 0$, so ist M_A auf ganz $\mathbf{C}$ definiert; wir setzen $M_A(\infty) := \infty$.
Ist $c \neq 0$, so ist M_A auf $\mathbf{C} - \{-\frac{d}{c}\}$ definiert; wir setzen

$$\begin{aligned} M_A(-\frac{d}{c}) &:= \infty \ , \\ M_A(\infty) &:= \frac{a}{c} \ . \end{aligned}$$

Jede Möbius-Transformation ist Produkt von Inversionen und affin-linearen Abbildungen, denn es ist für $c \neq 0$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bc & A + Bd \\ c & d \end{pmatrix} ,$$

was für $B = \frac{a}{c}$ und $A = b - \frac{ad}{c}$ zu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ wird.

Für vier paarweise verschiedene komplexe Zahlen z_0, z_1, z_2, z_3 heißt

$$DV(z_0, z_1, z_2, z_3) := \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{z_0 - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_0 - z_3}$$

ihr Doppelverhältnis.

1.5 Lemma: *Seien z_1, z_2, z_3 drei paarweise verschiedene komplexe Zahlen. Dann gibt es genau eine Möbius-Transformation M mit*

$$M(z_1) = 0, \quad M(z_2) = 1 \textit{ und } M(z_3) = \infty \ .$$

Beweis: Man verifiziert leicht, daß die Möbius-Transformation

$$M(z) := \mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$$

diese Eigenschaften hat. Für die Eindeutigkeit reicht es, den Fall $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$ zu betrachten. Aber aus $M_A(z_j) = z_j$ erhalten wir in diesem Fall die Gleichungen

$$\frac{b}{d} = 0, \quad \frac{a+b}{c+d} = 1 \text{ und } \frac{a}{c} = \infty \ .$$

Es folgt $M_A = \mathrm{id}$. □

2 Komplexe Differenzierbarkeit

2.1 Definition: *Sei $U \subset \mathbf{C}$ eine offene Teilmenge und $z_* \in U$. Eine Funktion $f : U \to \mathbf{C}$ heißt in z_* komplex differenzierbar, wenn der Grenzwert*

$$f'(z_*) := \lim_{z \to z_*} \frac{f(z) - f(z_*)}{z - z_*}$$

existiert. Dieser heißt dann die Ableitung von f im Punkte z_*.

Wir erinnern daran, daß die Funktion f im Punkte z_* reell differenzierbar ist, wenn es eine $\mathbf{R}$-lineare Abbildung $Df(z_*) : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ gibt, so daß

$$\lim_{z \to z_*} \frac{f(z) - f(z_*) - Df(z_*)(z - z_*)}{|z - z_*|} = 0$$

ist.

2.2 Lemma: *Ist f in z_* komplex differenzierbar, so ist f in z_* auch reell differenzierbar, und es ist*

$$Df(z_*)(\zeta) = f'(z_*) \cdot \zeta \ .$$

Wir wollen eine Umkehrung hiervon finden.

2.3 Hilfssatz: *Sei $A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ eine $\mathbf{R}$-lineare Abbildung. Dann ist A genau dann $\mathbf{C}$-linear, wenn es ein $\lambda \in \mathbf{C}$ gibt mit*

$$A(z) = \lambda z \ .$$

Beweis: Es ist $A(z) = A(z \cdot 1) = z \cdot A(1)$. □

Wir erhalten nun:

2.4 Satz: *Sei $f : U \to \mathbf{C}$ in $z_* \in U$ reell differenzierbar. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *f ist in z_* komplex differenzierbar.*
2. *Die Ableitung $Df(z_*) : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ist $\mathbf{C}$-linear.*
3. *Mit $u := \mathrm{Re}(f)$ und $v := \mathrm{Im}(f)$ gelten im Punkte z_* die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ . \tag{3}$$

Beweis: 1. ⇒ 2. ist gerade das obige Lemma.

2. ⇒ 1. folgt aus dem Hilfssatz: Ist $Df(z_*)(\zeta) = \lambda\zeta$, so wird

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{z \to z_*} \frac{f(z) - f(z_*) - \lambda(z - z_*)}{(z - z_*)} \\ &= \lim_{z \to z_*} \Big(\frac{f(z) - f(z_*)}{z - z_*} - \lambda \Big) \ . \end{aligned}$$

2. $\Leftrightarrow$ 3.: Die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

von f im Punkte z_* repräsentiert genau dann die Multiplikation mit einer komplexen Zahl, wenn die Gleichungen (3) erfüllt sind. $\square$

2.5 Definition: *Sei $U \in \mathbf{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbf{C}$ heißt holomorph, wenn f in jedem Punkt $z_* \in U$ komplex differenzierbar ist.*

2.6 Satz: *Die Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

habe den Konvergenz-Radius $R > 0$. Dann ist f auf

$$D_R(z_0) = \{z \bigm| |z - z_0| < R\}$$

holomorph mit Ableitung

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, c_{n+1}\, (z - z_0)^n \ .$$

Beweis: Dies folgt sofort aus Lemma 1.4. $\square$

Wegen Satz 2.4 können wir alle Folgerungen aus der reellen Differenzierbarkeit auf die komplexe Differenzierbarkeit anwenden.

2.7 Satz: *Seien $f,\, g : U \to \mathbf{C}$ in $z_* \in U$ komplex differenzierbar.*

1. *Seien $\lambda,\ \nu \in \mathbf{C}$ und $h = \lambda f + \nu g$. Dann ist h in z_* komplex differenzierbar mit $h'(z_*) = \lambda f'(z_*) + \nu g'(z_*)$.*
2. *$h = f \cdot g$ ist in z_* komplex differenzierbar mit $h'(z_*) = f'(z_*) \cdot g(z_*) + f(z_*) \cdot g'(z_*)$.*
3. *Ist $f(z_*) \neq 0$, so ist $h(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ in einer Umgebung $U_1 \subset U$ von z_* definiert und in z_* komplex differenzierbar mit $h'(z_*) = -\dfrac{f'(z_*)}{f(z_*)^2}$.*

2.8 Satz: *Seien $U, V \subset \mathbf{C}$ offen, und seien $f : U \to V$ und $g : V \to \mathbf{C}$. Sei $h(z) := g(f(z))$. Sei f in z_* und g in $f(z_*)$ komplex differenzierbar. Dann ist h in z_* komplex differenzierbar mit $h'(z_*) = g'(f(z_*))f'(z_*)$.*

Die analogen Aussagen gelten dann natürlich auch für Holomorphie.

2.9 Satz: *Seien $U, V \subset \mathbf{C}$ offen und $f : U \to V$ bijektiv und holomorph. Sei f^{-1} stetig und sei $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Dann ist auch $h = f^{-1}$ holomorph und $h'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$.*

Bemerkung: Wir werden später sehen, daß die Stetigkeit von f^{-1} und das Nicht-Verschwinden von $f'(z)$ aus den anderen Voraussetzungen folgen.

Beispiel: Sei $U = \{x + iy \in \mathbf{C} \mid x > 0 \text{ und } -\pi < y < \pi\}$ und $V = \mathbf{C} - \{z \in \mathbf{C} \mid z \text{ reell und } \leq 0\}$. Dann ist $\exp\big|_U : U \to V$ bijektiv. Es sei $\mathrm{Log} : V \to U$ die holomorphe Umkehr-Abbildung. Dies ist der sogenannte Hauptwert des Logarithmus.

Für eine differenzierbare relle Funktion $f : U \to \mathbf{R}$ hatten wir die Ableitung an der Stelle $z_* \in U$ auch mit

$$df\big|_{z_*} = Df(z_*) : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$$

bezeichnet. Es ist üblich, auch für komplexe reell differenzierbare Funktionen $f : U \to \mathbf{C}$ diese Bezeichnung zu verwenden. Ist $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$, so wird also

$$df\big|_{z_*} = du\big|_{z_*} + i\, dv\big|_{z_*} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

als reelle lineare Abbildung. Es wird insbesondere (wenn wir noch den Zusatz $\big|_{z_*}$ unterdrücken)

$$dz = dx + i\, dy \quad \text{und} \quad d\overline{z} = dx - i\, dy \ ,$$

also

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\overline{z}) \quad \text{und} \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\overline{z}) \ .$$

Nun ist

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy \ ,$$

wobei natürlich $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial y}$ gesetzt ist. Es folgt:

$$df = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\, dz + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\, d\overline{z}$$

Dies veranlaßt zu den Bezeichnungen

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \ .$$

Diese werden auch als Wirtinger-Ableitungen bezeichnet. Es gilt dann

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\, dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\, d\overline{z} \ .$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen schreiben sich nun einfach als

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \ .$$

3 Der Integralsatz

3.1 Definition: *Sei $U \subset \mathbf{C}$ offen, $f: U \to \mathbf{C}$ stetig. Sei $\omega: [a,b] \to U$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg (d.h. es gibt eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ von $[a,b]$, so daß ω auf jedem Teilintervall $[t_{j-1}, t_j]$ stetig differenzierbar ist). Für $t \in [a,b]$ sei $\dot{\omega}(t) \in \mathbf{C}$ der Tangentenvektor von ω. Das Integral von f entlang ω ist definiert durch*

$$\int_\omega f(z)\,dz := \int_a^b f(\omega(t))\,\dot{\omega}(t)\,dt \ .$$

Im folgenden werden wir einen stückweise stetig differenzierbaren Weg kurz einen Integrationsweg nennen.

Bemerkung:

1. Ist $g: [a,b] \to \mathbf{C}$ und $u(t) = \mathrm{Re}(g(t))$, $v(t) = \mathrm{Im}(g(t))$, so ist

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt \ .$$

2. Daß $\dot{\omega}(t)$ an endlich vielen Stellen t nicht definiert ist, spielt keine Rolle. Ebenso braucht für f nur die Stetigkeit auf der Menge

$$\mathrm{Spur}(\omega) = \{\omega(t) \,\big|\, a \le t \le b\}$$

mit Ausnahme endlich vieler Punkte vorausgesetzt werden.

3. Ist $\varphi: [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar mit $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$, so ist

$$\int_{\omega\circ\varphi} f(z) = \int_\omega f(z)\,dz$$

nach der Substitutionsregel.

3.2 Hilfssatz: *Sei $U \subset \mathbf{C}$ offen, $f: U \to \mathbf{C}$ stetig. Seien $\omega: [a,b] \to U$ und $\eta: [c,d] \to U$ Integrationswege mit $\omega(b) = \eta(c)$. Sei $\omega * \eta\colon [a, b+d-c] \to U$ der Weg mit*

$$\omega * \eta(t) = \begin{cases} \omega(t) & \text{für } a \le t \le b, \\ \eta(t-b+c) & \text{für } b \le t \le b+d-c, \end{cases}$$

sowie $\omega^{-1}\colon [a,b] \to \mathbf{C}$ der zu ω entgegengesetzte Weg mit $\omega^{-1}(t) = \omega(a+b-t)$. Dann ist

1. $\int_{\omega*\eta} f(z)dz = \int_\omega f(z)dz + \int_\eta f(z)dz$;
2. $\int_{\omega^{-1}} f(z)dz = -\int_\omega f(z)dz$.

Beweis: als Übungsaufgabe. □

3.3 Satz: *Sei $F: U \to \mathbf{C}$ holomorph mit stetiger Ableitung $f(z) = F'(z)$. Dann gilt*

$$\int_\omega f(z)\,dz = F(\omega(b)) - F(\omega(a)) \ .$$

Insbesondere ist für einen geschlossenen Weg ω (d.h. mit $\omega(a) = \omega(b)$) das Integral

$$\oint_\omega f(z)\,dz = 0 \ .$$

Beweis: Die Funktion $F(\omega(t))$ hat als Ableitung die Funktion $f(\omega(t))\,\dot\omega(t)$. $\square$
Wegen der vorausgesetzten (stückweisen) Stetigkeit werden alle unsere Integranden absolut integrierbar sein. Insbesondere ist also

$$\begin{aligned}\Big|\int_\omega f(z)\,dt\Big| &= \Big|\int_a^b f(\omega(t))\dot\omega(t)\,dt\Big| \\ &\le \int_a^b \big|f(\omega(t))\cdot\dot\omega(t)\big|\,dt\ .\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Standard-Abschätzung

3.4 Hilfssatz:

$$\Big|\int_\omega f(z)\,dz\Big| \le M\cdot L(\omega)$$

wobei $M = \sup\{|f(\omega(t))| \;\big|\; a\le t\le b\}$ *und*

$$L(\omega) = \int_a^b \big|\dot\omega(t)\big|\,dt$$

die Länge von ω *ist.*

3.5 Beispiel: *Sei* $\omega(t) = z_0 + re^{it}$ *für* $0\le t\le 2\pi$. *Dann ist für* $n\in\mathbf{Z}$ *mit* $n\ne -1$

$$\int_\omega (z-z_0)^n\,dz = 0\ ,$$

denn $(z-z_0)^n$ *hat die Stammfunktion* $\dfrac{1}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$. *Für* $n=-1$ *erhalten wir aber*

$$\int_\omega \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i\ .$$

3.6 Satz: *Sei* $f: U\to\mathbf{C}$ *stetig. Dann besitzt* f *genau dann eine Stammfunktion, wenn für jeden geschlossenen Integrationsweg* ω *in* U *gilt:*

$$\int_\omega dz = 0$$

Beweis: Sei o.B.d.A. U zusammenhängend. Sei $z_*\in U$ und für jedes $z\in U$ sei ω_z ein Integrationsweg in U mit Anfangspunkt z_* und Endpunkt z. Dann ist

$$F(z) := \int_{\omega_z} f(\zeta)\,d\zeta$$

unabhängig von der Wahl des Verbindungsweges ω_z. Für $k\in\mathbf{C}-\{0\}$ sei $\gamma(t) := z+tk$ für $0\le t\le 1$. Ist $|k|$ so klein, daß γ ganz in U verläuft, so ist

$$\begin{aligned}\frac{F(z+k)-F(z)}{k} &= \frac{1}{k}\int_{\omega_{z+k}} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{k}\int_{\omega_z} f(\zeta)\,d\zeta \\ &= \frac{1}{k}\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta \\ &= \int_0^1 f(z+tk)\,dt\ .\end{aligned}$$

Es folgt

$$\lim_{k \to 0} \frac{F(z+k) - F(z)}{k} = f(z) \ .$$

$\square$

Als Übungsaufgabe zeige man (mit dem gleichen Beweis):

3.7 Lemma (Lemma von Morera): *Sei $U \in \mathbf{C}$ offen und sternförmig bezüglich $z_* \in U$. Sei $f : U \to \mathbf{C}$ stetig. Ist für jedes ganz in U enthaltene Dreieck D*

$$\int_{\partial D} f(z)\, dz = 0 \ ,$$

so hat f eine Stammfunktion.

Hierbei ist ∂D der Rand des Dreiecks D. Hat D die Eckpunkte z_0, z_1 und z_2 (in dieser Reihenfolge), so ist ∂D der Weg

$$t \mapsto \begin{cases} z_0 + t(z_1 - z_0) & , \quad 0 \le t \le 1 \ , \\ z_1 + (t-1)(z_2 - z_1) & , \quad 1 \le t \le 2 \ , \\ z_2 + (t-2)(z_0 - z_2) & , \quad 2 \le t \le 3 \ . \end{cases}$$

Sei $R = \{z \in \mathbf{C} \,\big|\, a \le \mathrm{Re}(z) \le b \text{ und } c \le \mathrm{Im}(z) \le d\}$ ein abgeschlossenes (nicht-entartetes, achsenparalleles) Rechteck. Die Eckpunkte von R sind $r_0 = a + c\,i$, $r_1 = b + c\,i$, $r_2 = b + d\,i$ und $r_3 = a + d\,i$. Unter dem Rand ∂R von R verstehen wir den Weg

$$t \mapsto \begin{cases} r_0 + t(r_1 - r_0) & , \quad 0 \le t \le 1 \ , \\ r_1 + (t-1)(r_2 - r_1) & , \quad 1 \le t \le 2 \ , \\ r_2 + (t-2)(r_3 - r_2) & , \quad 2 \le t \le 3 \ , \\ r_3 + (t-3)(r_0 - r_3) & , \quad 3 \le t \le 4 \ . \end{cases}$$

3.8 Satz (Integralsatz für Rechtecke): *Sei $U \subset \mathbf{C}$ offen und $f : U \to \mathbf{C}$ holomorph. Dann ist für jedes ganz in U liegende (achsenparallele) Rechteck R*

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0 \ .$$

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß

$$I := \left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \neq 0$$

ist. Es sei L die Länge von ∂R und $\mathrm{diam}(R) = D$ der Durchmesser von R.

Wir finden dann durch fortgesetztes Vierteln eine Folge von achsenparallelen Rechtecken

$$R = R^{(0)} \supset R^{(1)} \supset \ldots \supset R^n \supset R^{(n+1)} \supset \ldots$$

mit

$$L(\partial R^{(n)}) = 2^{-n} L \text{ sowie } \mathrm{diam}(R^{(n)}) = 2^{-n} D$$

und

$$\Big| \int_{\partial R^{(n)}} f(z)dz \Big| \geq 4^{-n} I \ . \tag{4}$$

Sei $p \in \bigcap_n R^{(n)}$. Dann ist für z in einer Umgebung von p

$$f(z) = f(p) + f'(p)(z-p) + \varrho(z) \ ,$$

wobei

$$\lim_{z \to p} \frac{\varrho(z)}{|z-p|} = 0$$

ist.

Sei $\varepsilon > 0$ und sei $\delta > 0$ so gewählt, daß gilt

$$|z-p| < \delta \Rightarrow |\varrho(z)| < |z-p| \cdot \varepsilon \ .$$

Ferner sei n so gewählt, daß für $z \in R^{(n)}$ stets

$$|z-p| < \delta$$

ist. Für $z \in R^{(n)}$ ist dann $|\varrho(z)| < 2^{-n} D\varepsilon$.

Nun ist

$$\int_{\partial R^{(n)}} f(z)dz = \int_{R^{(n)}} \varrho(z)dz \ ,$$

da $f(z) - \varrho(z)$ eine Stammfunktion hat. Es folgt

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\partial R^{(n)}} f(z)dz \Big| &= \Big| \int_{\partial R^{(n)}} \varrho(z)dz \Big| \\ &\leq 2^{-n} D\varepsilon \cdot L(\partial R^{(n)}) \\ &\leq 2^{-n} D\varepsilon \cdot 2^{-n} L \\ &\leq 4^{-n} DL\varepsilon \ . \end{aligned}$$

Wählen wir also $\varepsilon < \dfrac{I}{DL}$, so erhalten wir einen Widerspruch zu der früheren unteren Abschätzung (4). □

3.9 Satz (Integralsatz für singuläre Rechtecke): *Sei $U \subset \mathbf{C}$ offen, $f : U \to \mathbf{C}$ holomorph. Weiter sei $R \subset \mathbf{C}$ ein achsenparalleles Rechteck und $\varphi : R \to U$ stetig differenzierbar. Dann ist*

$$\int_{\varphi \circ \partial R} f(z)\, dz = 0 \ .$$

Beweis: Sei $|D_{\varphi(p)}| \leq C$ für alle $p \in R$. Dann gilt für jeden in R verlaufenden Weg ω die Ungleichung

$$L(\varphi \circ \omega) \leq C \cdot L(\omega) \ .$$

Nun nehmen wir an, daß

$$I := \Big| \int_{\varphi \circ \partial R} f(z)dz \Big| \neq 0$$

ist. Es sei wieder L die Länge von ∂R und $\mathrm{diam}(R) = D$ der Durchmesser von R. Wir finden dann wie oben eine Folge von achsenparallelen Rechtecken

$$R = R^{(0)} \supset R^{(1)} \supset \ldots \supset R^n \supset R^{(n+1)} \supset \ldots$$

mit

$$L(\partial R^{(n)}) = 2^{-n}L \text{ sowie } \mathrm{diam}(R^{(n)}) = 2^{-n}D$$

und

$$\Big| \int_{\varphi\circ\partial R^{(n)}} f(z)dz \Big| \geq 4^{-n}I \ . \tag{5}$$

Sei $q \in \bigcap_n R^{(n)}$ und $p = \varphi(q) \in U$. Wieder schreiben wir für z in einer Umgebung von p

$$f(z) = f(p) + f'(p)(z-p) + \varrho(z) \ ,$$

wobei

$$\lim_{z \to p} \frac{\varrho(z)}{|z-p|} = 0$$

ist.

Sei $\varepsilon > 0$ und sei $\delta > 0$ so gewählt, daß gilt

$$|z-p| < \delta \Rightarrow |\varrho(z)| < |z-p| \cdot \varepsilon \ .$$

Für $w \in R^{(n)}$ ist $|\varphi(w) - p| < 2^{-n}CD$. Sei n so gewählt, daß für $w \in R^{(n)}$ stets

$$|\varphi(w) - p| < \delta$$

ist; dann ist für $w \in R^{(n)}$ stets $|\varrho(\varphi(w))| < 2^{-n}CD\varepsilon$.

Nun ist

$$\int_{\varphi\circ\partial R^{(n)}} f(z)dz = \int_{\varphi\circ\partial R^n} \varrho(z)dz \ ,$$

da $f(z) - \varrho(z)$ eine Stammfunktion hat. Es folgt

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\varphi\circ\partial R^n} f(z)dz \Big| &= \Big| \int_{\varphi\circ\partial R^{(n)}} \varphi^{(z)}dz \Big| \\ &\leq 2^{-n}CD\varepsilon \cdot L(\varphi \circ R^{(n)}) \\ &\leq 2^{-n}CD\varepsilon \cdot 2^{-n}CL \\ &\leq 4^{-n}C^2DL\varepsilon \end{aligned}$$

Wählen wir also $\varepsilon < \dfrac{I}{C^2DL}$, so erhalten wir einen Widerspruch zu der früheren unteren Abschätzung (5). □

3.10 Satz: *Sei $U \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet, das sternförmig bezüglich $z_* \in U$ ist. Ist $f : U \to \mathbf{C}$ holomorph, so hat f eine Stammfunktion.*

Beweis: Dies folgt nun sofort aus dem Integralsatz und dem Lemma 3.7 von Morera. □

3.11 Satz: *Seien $U \subset \mathbf{C}$ offen und $f : U \to \mathbf{C}$ holomorph. Seien $\omega_0, \omega_1 : [a,b] \to U$ Integrationswege. Es gebe eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : [a,b] \times [0,1] \to U$ mit*

$$\varphi(t,0) = \omega_0(t) \quad \text{und} \quad \varphi(t,1) = \omega_1(t) \ .$$

Ferner sei

$$\varphi(a,s) = \omega_0(a) \quad \text{und} \quad \varphi(b,s) = \omega_0(b) \ \text{für alle} \ s \tag{6}$$

oder

$$\varphi(a,s) = \varphi(b,s) \ \text{für alle} \ s \ . \tag{7}$$

Dann ist

$$\int_{\omega_0} f(z)dz = \int_{\omega_1} f(z)dz \ .$$

Man nennt φ eine Homotopie zwischen ω_0 und ω_1. Genauer spricht man im ersten Fall von einer Homotopie mit festgehaltenen Endpunkten und im zweiten Fall von einer Homotopie geschlossener Wege.

3.12 Satz: *Seien $U \subset \mathbf{C}$ offen und $f : U \to \mathbf{C}$ holomorph. Seien $r < R$ positive reelle Zahlen, so daß der Kreisring*

$$\{z \mid r < |z - z_0| < R\}$$

ganz in U enthalten ist. Dann ist

$$\int\limits_{|z-z_0|=R} f(z)\,dz = \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz \ .$$

Hierin bezeichnet $\int\limits_{|z-z_0|=R} f(z)\,dz$ das Integral über den positiv orientierten Rand des Kreises um z_0 mit Radius R, das heißt über den Weg $\omega(t) = z_0 + Re^{2\pi it}$ mit $0 \leq t \leq 1$.

4 Die Integralformel von Cauchy

Generalvoraussetzung: $U \subset \mathbf{C}$ ist eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbf{C}$ ist holomorph. Für $z_0 \in U$ und eine positive reelle Zahl r, so daß

$$\overline{D_r(z_0)} = \{z \mid |z - z_0| \leq r\}$$

ganz in U enthalten ist, setzen wir

$$M(f; z_0, r) := \sup\{|f(z)| \mid |z - z_0| = r\} .$$

Wir setzen im folgenden stets stillschweigend voraus, daß $r > 0$ ist.

4.1 Satz (Integralformel von Cauchy): *Sei $z_0 \in U$ und $\overline{D_r(z_0)} \subset U$. Dann ist für $|z - z_0| < r$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} .$$

Beweis: Es ist für genügend kleines $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \int\limits_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} ,$$

wie man leicht mit Satz 3.11 einsieht. Es wird weiter

$$\int\limits_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \int\limits_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta + f(z) \int\limits_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z} .$$

Das rechte Integral haben wir zu $2\pi i$ berechnet. Aber das erste konvergiert gegen 0 für $\varepsilon \to 0$, während die linke Seite unabhängig von ε ist. □

4.2 Korollar (Mittelwert-Eigenschaft): *Unter den Voraussetzungen des Satzes ist*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\, dt .$$

Hieraus erhalten wir:

4.3 Satz (Maximum-Prinzip I): *Nimmt $|f(z)|$ in $z = z_0 \in U$ ein lokales Maximum an, so ist f in einer Umgebung von z_0 konstant.*

Beweis: Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es ein $z_1 \in D_r(z_0)$ mit $|f(z_1)| < |f(z_0|$. Für $r_1 = |z_1 - z_0|$ wäre dann aber

$$\Big| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_1 e^{it})\, dt \Big| < |f(z_0| .$$ □

Wir werden später sehen, daß für zusammenhängendes U sogar die Konstanz von f auf ganz U folgt.

4.4 Satz (Potenzreihen-Entwicklung): *Sei $\overline{D_r(z_0)} \subset U$ und*

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \ .$$

Dann gilt für $z \in D_r(z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

mit absoluter Konvergenz.

Beweis: Für $\zeta \in U$ mit $|\zeta - z_0| = r$ ist

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \Big(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^n \ . \end{aligned}$$

Diese Funktionenreihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\{\zeta \ \big|\, |\zeta - z_0| = 1\}$. Wir dürfen daher gliedweise integrieren und erhalten aus der Integralformel die Behauptung. □

4.5 Korollar: *Eine holomorphe Funktion ist unendlich oft (komplex) differenzierbar.*

4.6 Korollar: *Sei $\overline{D_r(z_0)} \subset U$. Dann ist*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \ .$$

Wie im Beweis von Satz 4.1 erhält man hieraus, daß für $|z - z_0| < r$ auch

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \ .$$

ist.

4.7 Korollar: *Sei $\overline{D_r(z_0)} \subset U$. Dann ist*

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{r^n} M(f; z_0, r) \ .$$

Als Folgerung erhalten wir

4.8 Satz (Satz von Liouville): *Sei $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ holomorph und beschränkt. Dann ist f konstant.*

Beweis: Ist $|f(z)| \le C$ für alle z, so folgt $|f'(z_0)| \le \dfrac{C}{r}$, also $f'(z_0) = 0$. □

Eine auf ganz **C** definierte holomorphe Funktion nennt man auch eine ganze Funktion.

4.9 Hilfssatz: *Sei* $\overline{D_r(z_0)} \subset U$ *und*

$$m := \inf\{|f(z)| \mid |z - z_0| = r\}$$

Gilt $|f(z_0)| < m$, *so hat* f *in* $D_r(z_0)$ *eine Nullstelle.*

Beweis: Andernfalls wäre $g(z) := \dfrac{1}{f(z)}$ in einer Umgebung von $\overline{D_r(z_0)}$ holomorph. Es folgt

$$\frac{1}{|f(z_0)|} = |g(z_0)| \leq M(g; z_0, r) = \frac{1}{m}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Als Folgerung erhalten wir den

4.10 Satz (Fundamentalsatz der Algebra): *Sei* $f(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \in \mathbf{C}[z]$ *ein komplexes Polynom vom Grad* $n > 0$. *Dann hat* f *eine Nullstelle.*

Beweis: Es ist mit $b = \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|$ für $|z| \geq 1$

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |a_n| \cdot |z|^n - \Big| \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j \Big| \\ &\geq |a_n| \cdot |z|^n - b \cdot |z|^{n-1} \ , \end{aligned}$$

was für $z \to \infty$ gegen ∞ geht. Es gibt also ein $r > 0$, so daß für $|z - z_0| \geq r$ stets $|f(z)| > |f(0)|$ ist. Die Behauptung folgt nun aus dem Hilfssatz. □

5 Nullstellen holomorpher Funktionen

5.1 Satz (Identitätssatz für Potenzreihen): *Habe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_*)^n$$

den Konvergenzradius $R > 0$. *Seien* $z_k \in \{z \mid 0 < |z - z_*| < R\}$ *mit*

$$f(z_k) = 0 \text{ und } \lim_{k \to \infty} z_k = z_* \ .$$

Dann ist $f(z) = 0$ *(d.h. alle* c_n *sind Null).*

Beweis: Es ist $f(z_*) = 0$, also $c_0 = 0$ und $f(z) = (z - z_*)g(z)$. Auf $g(z)$ treffen die Voraussetzungen wieder zu. Induktiv erhält man so das Verschwinden aller c_n. □

5.2 Satz (Identitätssatz für holomorphe Funktionen): *Sei* $U \subset \mathbf{C}$ *ein Gebiet und* $f : U \to \mathbf{C}$ *holomorph. Sei* $z_* \in U$ *und seien* $z_k \in U - \{z_*\}$ *mit*

$$f(z_k) = 0 \text{ und } \lim_{k \to \infty} z_k = z_* \ .$$

Dann ist $f(z) = 0$ *für alle* $z \in U$.

Beweis: Sei $W := \{z \in U \mid f(\zeta) = 0 \text{ für } \zeta \text{ in einer Umgebung von } z\}$. Dann ist W offen in U. Es ist $z_* \in W$ nach Satz 5.1. Wäre $W \neq U$, so gäbe es ein $\zeta_* \in U - W$ und $\zeta_k \in W$ mit $\lim_{k \to \infty} \zeta_k = \zeta_*$. Aus Satz 5.1 folgt nun $\zeta_* \in W$. □

5.3 Definition: *Sei* $f : U \to \mathbf{C}$ *holomorph und* $k \geq 1$.

1. f *hat in* $z_0 \in U$ *eine* k*-fache Nullstelle, wenn gilt:*

$$f(z_0) = 0 \text{ und } f^{(r)}(z_0) = 0 \text{ für } 1 \leq r < k, \text{ aber } f^{(k)}(z_0) \neq 0 \ .$$

2. *Sei* $w_0 \in \mathbf{C}$. *Dann hat* f *hat in* $z_0 \in U$ *eine* k*-fache* w_0*-Stelle, wenn* $g(z) = f(z) - w_0$ *in* z_0 *eine* k*-fache Nullstelle hat.*

5.4 Satz: *Sei* $f : U \to \mathbf{C}$ *holomorph. Hat* f *in* $z_0 \in U$ *eine 1-fache* w_0*-Stelle, so ist* f *in einer Umgebung* U' *von* z_0 *biholomorph (d.h.* $f : U' \to f(U')$ *ist bijektiv und auch die Umkehrbildung* $f^{-1} : f(U') \to U'$ *ist holomorph).*

5.5 Satz: *Sei* $f : U \to \mathbf{C}$ *holomorph und sei* $z_0 \in U$ *eine* k*-fache Nullstelle von* f *mit* $k > 1$. *Dann gibt es eine Umgebung* V *von* z_0 *in* U *und eine holomorphe Funktion* $h : V \to \mathbf{C}$, *die in* z_0 *eine einfache Nullstelle hat, so daß gilt:*

$$f(z) = h(z)^k \quad \text{für } z \in V \ .$$

Bemerkung: Es folgt, daß h in einer Umgebung von z_0 biholomorph ist.

Beweis: In einer Umgebung von z_0 ist

$$f(z) = z^k \cdot g(z) ,$$

wobei g holomorph ist mit $g(z_0) =: w_0 \neq 0$.

Nun gibt es eine Umgebung W von w_0, auf der ein Zweig λ des Logarithmus definiert ist. Sei $V := g^{-1}(W)$ und

$$h(z) := z \cdot \exp(\frac{1}{k} \cdot \lambda(g(z)))$$

Dann ist auf V

$$h(z)^k = z^k \cdot \exp(\lambda(g(z))) = z^k \cdot g(z) .$$

□

5.6 Korollar: *Sei $f : U \to \mathbf{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in U$ und $w_0 \in \mathbf{C}$, so daß f in z_0 eine k-fache w_0-Stelle hat mit $k > 1$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß mit*

$$W := \{w \bigm| |w - w_0| < \varepsilon\} \quad \text{und} \quad V = f^{-1}(W) .$$

gilt:

1. *w_0 hat genau ein Urbild unter f in V, nämlich z_0.*
2. *Jedes $w \in W - \{w_0\}$ hat genau k Urbilder unter f in V.*

Bemerkung: Wenn ε diese Eigenschaften hat, so auch jedes ε' mit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.

Beweis: Wir wenden den Satz auf die Funktion $f(z) - w_0$ an. □

5.7 Satz (Satz von der Gebietstreue): *Sei $U \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbf{C}$ holomorph. Ist f nicht konstant, so ist die Bildmenge $f(U) \subset \mathbf{C}$ wieder ein Gebiet.*

Beweis: Daß $f(U)$ zusammenhängend ist, ist klar. Der wesentliche Punkt ist die Offenheit, die nun aus dem Korollar folgt. □

5.8 Korollar: *Seien $U, V \subset \mathbf{C}$ offen. Sei $f : U \to V$ bijektiv und holomorph. Dann ist f biholomorph (d.h. auch die Umkehrbildung $f^{-1} : V \to U$ ist holomorph).*

Beweis: Ist $f(z_0) = w_0$, so hat f nach Korollar 5.6 in z_0 eine einfache w_0-Stelle. □

6 Isolierte Singularitäten

6.1 Definition: *Sei $U \subset \mathbf{C}$ offen und $f : U \to \mathbf{C}$ holomorph. Ein $z_0 \in \mathbf{C} - U$ heißt eine isolierte Singularität von f, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß die Menge $\{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ ganz in U enthalten ist.*

6.2 Satz (Riemannscher Hebbarkeitssatz): *Sei $z_0 \in \mathbf{C} - U$ eine isolierte Singularität von f. Ist f auf $\{z \in U \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ beschränkt, so existiert eine holomorphe Funktion $g : U \cup \{z_0\} \to \mathbf{C}$ mit $g\big|_U = f$.*

Beweis: $V := U \cup \{z_0\}$ ist wieder offen. Sei $h : V \to \mathbf{C}$ definiert durch $h(z_0) = 0$ und $h(z) = (z - z_0)f(z)$ sonst. Dann ist h stetig und außerhalb z_0 holomorph. Mit Hilfe des Lemmas 3.7 von Morera folgt leicht, daß h holomorph auf V ist. Dann ist

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{h(z)}{z - z_0} & , \quad z \neq z_0 \ , \\ h'(z_0) & , \quad z = z_0 \ , \end{cases}$$

die gesuchte Funktion. □

Bemerkung: Unter der Voraussetzung des Satzes nennt man z_0 eine hebbare isolierte Singularität von f.

6.3 Definition: *Sei $z_0 \in \mathbf{C} - U$ eine isolierte Singularität von f, die nicht hebbar ist. Dann heißt z_0 eine Polstelle von f, wenn es ein $k \geq 1$ gibt, so daß $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$ in z_0 eine hebbare isolierte Singularität hat. Andernfalls heißt z_0 eine wesentliche Singularität von f.*

Bemerkung: Ist z_0 Polstelle von f und ist die natürliche Zahl k in der Definition minimal gewählt, so ist

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \quad \text{und} \quad g(z_0) \neq 0 \ ,$$

wobei $g : U \to \mathbf{C}$ holomorph ist. Insbesondere ist $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Man nennt dann z_0 genauer eine Polstelle k-ter Ordnung von f.

Beispiel: Sei $f : \mathbf{C} - \{0\} \to \mathbf{C}$ durch

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

definiert. Dann hat f im Nullpunkt eine wesentliche Singularität, denn für jedes $k \in \mathbf{N}$ hat die Funktion $z^k \cdot \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ unendlich viele Nullstellen in einer Umgebung des Nullpunkts.

6.4 Definition: *Sei $U \subset \mathbf{C}$ offen und*

$$f : U \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

eine Abbildung. Sei $U_{\text{reg}} := \{z \in U \mid f(z) \neq \infty\}$. Dann heißt f eine meromorphe Funktion auf U, wenn f auf U_{reg} holomorph ist und wenn alle Punkte von $U - U_{\text{reg}}$ Polstellen von $f\big|_{U_{\text{reg}}}$ sind.

6.5 Lemma: *Sei $U \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet und seien $g, h : U \to \mathbf{C}$ holomorph, wobei h nicht konstant gleich Null ist. Dann definiert*

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{g(z)}{h(z)} & , \quad h(z) \neq 0 \ , \\ \lim\limits_{\zeta \to z} \dfrac{g(\zeta)}{h(\zeta)} & , \quad h(z) = 0 \ , \end{cases}$$

eine meromorphe Funktion auf U.

Bemerkung: Die Nullstellen von h sind entweder Polstellen von f oder hebbare isolierte Singularitäten von f.

Beispiel: $\tan(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)}$ definiert eine meromorphe Funktion auf $\mathbf{C}$, welche (für $k \in \mathbf{Z}$) in den Punkten $n_k = k\pi$ einfache Nullstellen und in den Punkten $p_k = \dfrac{2k+1}{2}\pi$ Polstellen erster Ordnung hat.

6.6 Lemma: *Sei $U \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{M}(U)$ die Menge der meromorphen Funktionen auf U. Dann ist $\mathcal{M}(U)$ ein Körper.*

Es ist klar, daß die Ableitung einer meromorphen Funktion wieder meromorph ist. Eine meromorphe Funktion braucht aber keine Stammfunktion zu haben, wie das Beispiel der meromorphen Funktion $f(z) = z^{-1}$ auf $\mathbf{C}$ zeigt.

6.7 Satz (Casorati-Weierstraß): *Sei $U \subset \mathbf{C}$ offen und $f : U \to \mathbf{C}$ holomorph. Sei $z_* \in \mathbf{C} - U$ eine wesentliche isolierte Singularität von f. Dann gibt es zu jedem $w_* \in \mathbf{C}$ eine Folge (z_k) von Punkten von U mit*

$$\lim_{k \to \infty} z_k = z_* \textit{ und } \lim_{k \to \infty} f(z_k) = w_* \ .$$

Beweis: Die Behauptung ist äquivalent dazu, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $z \in U$ gibt mit $|z - z_*| < \varepsilon$ und $|f(z) - w_*| < \varepsilon$. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$|z - z_*| < \varepsilon \Longrightarrow |f(z) - w_*| \geq \varepsilon \ .$$

Dann hätte aber

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w_*}$$

bei z_* als beschränkte Funktion eine hebbare Singularität, und $f(z)$ wäre nach Lemma 6.5 bei z_* meromorph. □

Bemerkung: Es gilt sogar der folgende Satz von Picard: Ist $f : U \to \mathbf{C}$ holomorph und z_* eine wesentliche Singularität von f, so gibt es ein $w_0 \in \mathbf{C}$, so daß zu jedem $w_* \in \mathbf{C} - \{w_0\}$ eine Folge (z_k) von Punkten von U existiert mit

$$\lim_{k \to \infty} z_k = z_* \text{ und } f(z_k) = w_* \ .$$

6.8 Definition: *Eine Laurent-Reihe um z_0 ist eine Reihe der Gestalt*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_o)^n \ .$$

Bemerkung: Genauer sollte man $f(z)$ als ein Paar von Potenzreihen

$$f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

und

$$f_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \Big(\frac{1}{z - z_0}\Big)^n$$

auffassen. Man nennt $f_-(z)$ den Hauptteil von f und $f_+(z)$ den Nebenteil von f.

6.9 Hilfssatz: *Sei R der Konvergenzradius von $f_+(z)$ und s der Konvergenzradius von*

$$\widetilde{f}_-(\zeta) := \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\, \zeta^n$$

sowie $r = \dfrac{1}{s}$. Ist $r < R$, so ist

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

für alle z mit $r < |z - z_0| < R$ absolut konvergent. Insbesondere ist dann f eine holomorphe Funktion auf dem Kreisring $\{z \,\big|\, r < |z - z_0| < R\}$.

6.10 Satz (Cauchy-Formel für Laurentreihen): *Ist*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

in dem Kreisring $\{z \,\big|\, r < |z - z_0| < R\}$ konvergent, so gilt (für jedes ϱ mit $r < \varrho < R$)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \varrho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \ .$$

6.11 Korollar: *Unter den Voraussetzungen des Satzes ist*

$$|c_n| \le \varrho^{-n} \cdot M(f; z_0, \varrho) \ .$$

6.12 Satz (Laurentreihen-Entwicklungssatz): *Die Funktion f sei auf dem Kreisring $U := \{z \,\big|\, r < |z - z_0| < R\}$ holomorph. Sei $r < \varrho < R$. Dann ist für $z \in U$*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

mit

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \varrho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \ ,$$

wobei die Laurentreihe auf jedem Kreisring $U' := \{z \,\big|\, r' \le |z - z_0| \le R'\}$ mit $r < r' < R' < R$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Beweis: Zunächst ist klar, daß c_n unabhängig von der Wahl von ϱ ist. Sei $z = ue^{i\varphi}$ mit $r < u < R$.

Wir definieren für positive reelle Zahlen ε, ϱ', ϱ'' sowie a geschlossene Integrationswege

$$\gamma(t) := z + \varepsilon e^{2\pi i t} \text{ für } 0 \le t \le 1$$

und

$$\delta_a(t) := \begin{cases} z_0 + \varrho'' e^{(\varphi+(2t-1)a)i} & , \quad 0 \le t \le 1 \ , \\ z_0 + ((t-1)\varrho' + (2-t)\varrho'')e^{(\varphi+a)i} & , \quad 1 \le t \le 2 \ , \\ z_0 + \varrho' e^{(\varphi+(5-2t)a)i} & , \quad 2 \le t \le 3 \ , \\ z_0 + ((4-t)\varrho' + (t-3)\varrho'')e^{(\varphi-a)i} & , \quad 3 \le t \le 4 \ . \end{cases}$$

Für

$$r < \varrho' < u - \varepsilon < u + \varepsilon < \varrho'' < R$$

verlaufen beide Wege ganz in dem betrachteten Kreisring; ist ε klein im Vergleich zu a und $a \le \pi$, so liegt γ ganz im Inneren von δ_a.

Unter diesen Voraussetzungen haben wir dann

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_a} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \ ,$$

wie man leicht mit dem Integralsatz 3.9 für singuläre Rechtecke einsieht. Für $a = \pi$ ist aber

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_a} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta - z_0| = \varrho''} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta - z_0| = \varrho'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \ .$$

Nun schreiben wir für $|\zeta - z_0| = \varrho''$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\Big(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

und für $|\zeta - z_0| = \varrho'$

$$\frac{-1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0}\Big(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\Big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \ .$$

Mit gliedweiser Integration folgt die Behauptung. □

Der Satz 6.12 lässt sich insbesondere anwenden auf Funktionen, welche in z_0 eine isolierte Singularität haben, da diese in einem Kreisring um z_0 holomorph sind.