Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/ft1/

Übungen Funktionentheorie I   Sommersemester 2005

Blatt 1 | Abgabe: Montag, 18.04.05

Aufgabe 1: Sei $\mathbb{S}^2 = \{(z,\zeta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid\ |z|^2 + \zeta^2 = 1\}$ und $\mathbf{n} := (0,1) \in \mathbb{S}^2$. Zeigen Sie:

(a) Für $p \in \mathbb{S}^2 - \{\mathbf{n}\}$ ist der Schnittpunkt $\Phi(p)$ des Strahls $\{\mathbf{n} + t \cdot (p - \mathbf{n}) \mid t \geq 0\}$ mit $\mathbb{C} = \mathbb{C} \times 0$ der Punkt $\dfrac{z}{1-\zeta}$.

(b) $\Phi\colon \mathbb{S}^2 - \{\mathbf{n}\} \to \mathbb{C}$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung

$$\Phi^{-1}(w) = \left(\frac{2w}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right).$$

(c) $\|\Phi^{-1}(w_1) - \Phi^{-1}(w_2)\| = \dfrac{2|w_2 - w_1|}{\sqrt{|w_1|^2+1}\sqrt{|w_2|^2+1}},$

$\|\Phi^{-1}(w_1) - \mathbf{n}\| = \dfrac{2}{\sqrt{|w_1|^2+1}}.$

Aufgabe 2: Bezeichnungen wie in Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) Seien $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ mit $|\gamma|^2 - \alpha\delta > 0$. Dann ist $\{z \in \mathbb{C} \mid \alpha z\overline{z} + \gamma z + \overline{\gamma}\,\overline{z} + \delta = 0\}$ ein Kreis oder eine affine Gerade. Jeder Kreis und jede affine Gerade läßt sich so erhalten.

(b) Ist $K \subset \mathbb{S}^2$ ein Kreis, so ist $\Phi(K - \{\mathbf{n}\}) \subset \mathbb{C}$ ein Kreis oder eine affine Gerade. Jeder Kreis und jede affine Gerade läßt sich so erhalten.

Aufgabe 3: Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, $a \in \overline{\mathbb{C}}$ und bezeichne χ den chordalen Abstand. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \chi(z_n, a) = 0\,.$$

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/ft1/

Übungen Funktionentheorie I Sommersemester 2005

Blatt 2 Abgabe: Montag, 25.04.05

Aufgabe 1: Sei M eine Möbiustransformation und seien $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene Punkte. Sei $z_j' = M(z_j)$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{DV}(z_0', z_1', z_2', z_3') = \mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3)$$

Aufgabe 2: Für $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ sei $T(F)(z) = \frac{1}{i} F(iz)$. Zeigen Sie:

(a) F ist komplex linear $\Leftrightarrow T(F) = F$.

(b) $T(F) = -F \Leftrightarrow$ es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $F(z) = \lambda \overline{z}$. ($F$ heißt dann $\mathbb{C}$-antilinear.)

(c) $T(T(F)) = F$.

(d) Jedes $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ läßt sich zerlegen in $F = F_+ + F_-$ mit F_+ $\mathbb{C}$-linear und F_- $\mathbb{C}$-antilinear.

Aufgabe 3: In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen komplex differenzierbar? ($z = x + iy$)

(a) $f(z) = x^3 y^2 + i x^2 y^3$

(b) $f(z) = x^2 \cos(y) + iy$

(c) $f(z) = z|x|^3$

(d) $f(z) = |z|^2(|z|^2 - 2)$

(e) $f(z) = -\sin(x)(e^{-y} + e^y) + i\cos(x)(e^{-y} - e^y)$

(f) $f(z) = \cos(x)(e^{-y} + e^y) + i\sin(x)(e^{-y} - e^y)$

Aufgabe 4: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann heißt φ *harmonisch*, falls $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ gilt.

(a) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie: Ist f holomorph, so sind $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ harmonisch.

(b) Finden Sie alle Polynome $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Gestalt $p(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$), so daß p eine harmonische Funktion ist.

(c) Sei p ein Polynom wie in b). Finden Sie – wenn möglich – eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $p = \mathrm{Re}(f)$.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/ft1/

Übungen Funktionentheorie I   Sommersemester 2005

Blatt 3 | Abgabe: Montag, 2.5.05

Aufgabe 1: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $F\colon U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, $u = \mathrm{Re}(F)$, $v = \mathrm{Im}(F)$. Zeigen Sie: $\mathrm{Re}(F'(z)) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ und $\mathrm{Im}(F'(z)) = \dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Aufgabe 2: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie:

(a) f hat nur reelle Werte $\Rightarrow$ f ist konstant.

(b) $|f|$ ist konstant $\Rightarrow$ f ist konstant.

Aufgabe 3: Seien $\omega\colon [a,b] \to U$ und $\eta\colon [c,d] \to U$ Integrationswege mit $\omega(b) = \eta(c)$. Sei $\omega * \eta\colon [a, b+d-c] \to U$ der Weg mit

$$\omega * \eta(t) = \begin{cases} \omega(t) & \text{für } a \leq t \leq b, \\ \eta(t-b+c) & \text{für } b \leq t \leq b+d-c, \end{cases}$$

sowie $\omega^{-1}\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ der zu ω engegengesetzte Weg mit $\omega^{-1}(t) = \omega(a+b-t)$. Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\int_{\omega*\eta} f(z)dz = \int_\omega f(z)dz + \int_\eta f(z)dz;$

(b) $\displaystyle\int_{\omega^{-1}} f(z)dz = -\int_\omega f(z)dz.$

Aufgabe 4: (a) Sei R das Rechteck mit Ecken $0, 1, 1+i, i$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\partial R} \mathrm{Re}(z)dz$.

(b) Sei $\omega(t) = a\cos(t) + i\,b\sin(t)$ für $0 \leq t \leq 2\pi$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_\omega |z|^2 dz$.

Aufgabe 5: Sei $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein komplexes Polynom, $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie:

$$\int_{|z-a|=r} p(\overline{z})dz = 2\pi i\, r^2 p'(\overline{a})\,.$$

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/ft1/

Übungen Funktionentheorie I   Sommersemester 2005

Blatt 4 Abgabe: Montag, 9.5.05

Aufgabe 1: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig. Für jedes Dreieck $\Delta \subset U$ gelte $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$. Zeigen Sie: f ist holomorph.
[Hinweis: Es genügt, sich zu überlegen, daß f auf jeder offenen Kreisscheibe in U eine Stammfunktion hat.]

Aufgabe 2: Sei $r > 0$ und $U = \{z \mid |z - z_0| < r\}$. Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig und auf $U - \{z_0\}$ holomorph. Zeigen Sie: f ist holomorph auf U.
[Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1.]

Aufgabe 3: Sei $U = \{z \mid |z| < 1\}$ und $U_+ = \{z \in U \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Sei $f\colon U_+ \to \mathbb{C}$ stetig, so daß f auf $U_+ - \mathbb{R}$ holomorph ist und auf $U_+ \cap \mathbb{R}$ nur reelle Werte annimmt. Definiere $g\colon U \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in U_+, \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{für } z \in U - U_+. \end{cases}$$

Zeigen Sie: g ist holomorph.
[Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1.]

Aufgabe 4: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\overline{D_r(z_0)} \subset U$, $z \in D_r(z_0)$, $\delta > 0$ und $|z - z_0| \leq r - \delta$. Zeigen Sie:

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{r \cdot n!}{\delta^{n+1}} \cdot M(f; z_0, r)$$

(wobei $M(f; z_0, r) = \sup\{f(\zeta) \mid |\zeta - z_0| = r\}$.)

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/ft1/

Übungen Funktionentheorie I Sommersemester 2005

Blatt 5 Abgabe: Montag, 23.5.05

Aufgabe 1: Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel.

(a) $\displaystyle\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}$

(b) $\displaystyle\int_{|z+2i|=3} \frac{dz}{z^2+\pi^2}$

(c) $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m}$ für $|a| < r < |b|$ und $n, m \geq 1$.

Aufgabe 2: Sei f eine ganze Funktion, die auf $\mathbb{R}$ nur reelle Werte annimmt. Zeigen Sie: es gilt $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

Aufgabe 3: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z_0| < 1$. Sei $U = \{z \in \mathbb{C} \mid z\overline{z}_0 \neq 1\}$ und $V = \{z \in \mathbb{C} \mid z\overline{z}_0 \neq -1\}$. Sei $f(z) = \dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$ für $z \in U$. Zeigen Sie:

(a) f bildet U biholomorph auf V ab.

(b) f bildet $K = \{z \mid |z| \leq 1\}$ bijektiv auf sich ab. [Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß f die Kreislinie $\{z \mid |z| = 1\}$ bijektiv auf sich abbildet.]

Aufgabe 4: Sei f eine ganze Funktion. Es gebe Konstanten r und M, so daß $|f(z)| < M \cdot |z|^n$ ist für $|z| > r$. Zeigen Sie: f ist ein Polynom von Grad $\leq n$.

Aufgabe 5: Sei U ein beschränktes Gebiet, f holomorph auf U und stetig auf $\overline{U} = U \cup \partial U$. Zeigen Sie: es existiert ein $z_0 \in \partial U$ mit $|f(z_0)| = \sup\{|f(z)| \mid z \in U\}$.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/ft1/

Übungen Funktionentheorie I Sommersemester 2005

Blatt 6 Abgabe: Montag, 30.5.05

Aufgabe 1: Finden Sie in einer Umgebung von 0 holomorphe Funktionen, die die folgenden Bedingungen erfüllen, oder beweisen Sie ihre Nichtexistenz.

(a) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}_+$;

(b) $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{n}$, $f(\frac{1}{2n+1}) = 0$, $n \in \mathbb{N}_+$;

(c) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Laurentreihen-Entwicklung von $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ im Kreisring $\{z \mid r < |z| < R\}$ für

(a) $r = 0$, $R = 1$;

(b) $r = 1$, $R = 2$;

(c) $r = 2$, $R = \infty$.

Aufgabe 3: Klassifizieren Sie die Singularität $0 \in \mathbb{C}$ für die folgenden Funktionen und bestimmen Sie gegebenenfalls den Hauptteil.

(a) $\dfrac{1}{1-e^z}$ (b) $e^{\frac{1}{z}}$

(c) $\cos(\dfrac{1}{z})$ (d) $\dfrac{\sin(z)}{z}$

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/ft1/

Übungen Funktionentheorie I Sommersemester 2005

Blatt 7 Abgabe: Montag, 6.6.05

Aufgabe 1: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ und $r \neq 1$ eine positive reelle Zahl. Sei $\gamma(t) = e^{2\pi imt} + re^{2\pi int}$, $0 \leq t \leq 1$. Bestimmen Sie

(a) $I(\gamma; 0)$,

(b) $I(\gamma; r+2)$.

Aufgabe 2: Sei $U \in \mathbb{C}$ offen. Sei (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen auf U, die gleichmäßig gegen die Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie:

(a) f ist holomorph.

(b) Sei ω ein stetiger geschlossener Weg in U. Dann ist

$$\int_\omega f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\omega f_n(z)dz\,.$$

Aufgabe 3: Sei γ eine stetige geschlossene Kurve. Man sagt, $z \in \mathbb{C} - \mathrm{Spur}(\gamma)$ liege im Äußeren von γ, wenn es eine stetige Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} - \mathrm{Spur}(\gamma)$ gibt mit $\varphi(0) = z$ und $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. Zeigen Sie: Liegt z im Äußeren von γ, so ist $I(\gamma; z) = 0$.

Aufgabe 4: Seien $m, v \in \mathbb{C} - \{0\}$ und $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{C}$ der Weg $\gamma(t) = m + tv$. Sei $D = \{z \mid |z-m| < |v|\}$ und η ein stetiger Weg in $\mathbb{C} - D$ mit Anfangspunkt $\gamma(1)$ und Endpunkt $\gamma(-1)$. Sei ω der geschlossene Weg $\omega = \gamma * \eta$. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon < 1$ sei $p_+ = m + i\varepsilon v$ und $p_- = m - i\varepsilon v$. Beweisen Sie die „Vorfahrtsregel“ (Skizze!)

$$I(\omega; p_+) - I(\omega; p_-) = 1\,.$$

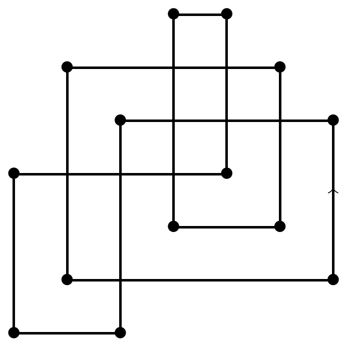
[Hinweis: Nehmen Sie zunächst η stückweise stetig differenzierbar an und betrachten Sie den Limes $\varepsilon \to 0$.]

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/ft1/

Übungen Funktionentheorie I Sommersemester 2005

Blatt 8 Abgabe: Montag, 13.6.05

Aufgabe 1: Sei γ der hier aufgezeichnete geschlossene Kantenweg. Bestimmen Sie für jeden Punkt im Komplement der Spur von γ die Umlaufszahl. (Genau an den mit • markierten Punkten biegt die Kurve ab; keine Kante wird zweimal durchlaufen.)



Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Singularitäten und die zugehörigen Residuen für die Funktionen

(a) $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4 + 6z^2 + 13}$,

(b) $f(z) = \dfrac{\cot(z)}{z^2 + a^2}$, $a > 0$.

Aufgabe 3: Sei $f\colon \{z \mid |z| > C\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Definieren Sie das Residuum an der Stelle ∞ durch $\operatorname{Res}_\infty(f) := -\operatorname{Res}_0(\tilde{f})$, wobei $\tilde{f}(z) = z^{-2} f(z^{-1})$ ist. Zeigen Sie:

(a) Für $R > C$ gilt $\displaystyle\int_{|\zeta|=R} f(\zeta)d\zeta = -2\pi i \operatorname{Res}_\infty(f)$.

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^{-1}$ hat in ∞ eine hebbare Singularität, aber es ist $\operatorname{Res}_\infty(f) = -1$.

Aufgabe 4: Berechnen Sie die Integrale

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 6x^2 + 13} dx$,

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$,

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$, $\quad a, b > 0$.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/ft1/

Übungen Funktionentheorie I Sommersemester 2005

Blatt 9 Abgabe: Montag, 20.6.05

Aufgabe 1: Sei $0 < r < 2\pi$ und $f\colon D_r(0) - \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z^3) - 1}$.
Bestimmen Sie die Ordnung des Pols bei 0 sowie $\mathrm{Res}_0(f)$.

Aufgabe 2: Sei $f\colon D_\varepsilon(a) - \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: $\mathrm{Res}_a(f)$ ist die eindeutig bestimmte komplexe Zahl c, für die die Funktion $g(z) = f(z) - \dfrac{c}{z-a}$ in $D_\varepsilon(a)$ eine Stammfunktion hat.

Aufgabe 3: (a) Sei R eine komplexwertige rationale Funktion in zwei Variablen, die keine Singularität auf dem Einheitskreis hat, und f die durch

$$f(z) = z^{-1} R\big(\tfrac{1}{2}(z + z^{-1}), \tfrac{1}{2i}(z - z^{-1})\big)$$

definierte meromorphe Funktion. Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))dt = 2\pi \sum_{z \in D_1(0)} \mathrm{Res}_z(f)\,.$$

(b) Berechnen Sie die Integrale

(b1) $$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sin(t) - 2\cos(t) + 3}$$

(b2) $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5 - 4\cos(t)} dt$$

(b3) $$\int_0^{\pi} \frac{dt}{(a + b\cos(t))^2}, \quad a > b > 0$$

Aufgabe 4: Sei $y > 0$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - 2ixy} dx = \sqrt{\pi}\, e^{-y^2}$$

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/ft1/

Übungen Funktionentheorie I   Sommersemester 2005

Blatt 10   Abgabe: Montag, 27.6.05

Aufgabe 1: Seien $c, s \in \mathbb{R}$ und $c > 0$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{x - ic} dx$.
[Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $s > 0$, $s = 0$, $s < 0$ und integrieren Sie (für $s \neq 0$) über einen geeigneten Halbkreis.]

Aufgabe 2: (a) Sei $f \colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorph mit einer Nullstelle bei ∞. Weiterhin habe f auf $\mathbb{R}$ genau eine Polstelle t_0, welche von erster Ordnung ist. Zeigen Sie, daß für den Cauchyschen Hauptwert gilt:

$$\text{H-}\int_{\infty}^{\infty} f(t)e^{it}dt = \pi i \operatorname{Res}_{t_0}(f(z)e^{iz}) + 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(s)>0} \operatorname{Res}_s(f(z)e^{iz})$$

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\text{H-}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$ und $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Aufgabe 3: (a) Sei $a \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $D := \{z = a + re^{i\varphi} \mid r > 0,\ \alpha < \varphi < \alpha + \pi\}$.
Zeigen Sie: Sind $a_1, \dots , a_n \in D$, so ist $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a - a_j} \neq 0\,.$

(b) Sei $f(z) = c(z - a_1) \cdots (z - a_n)$ mit $a_1, \dots , a_n \in \mathbb{C}$. Sei $b \in \mathbb{C}$ so gewählt, daß der Kreis $K = \{z \mid |z - b| \leq r\}$ alle a_j enthält. Zeigen Sie: Ist a Nullstelle von $f'(z)$, so ist $a \in K$.

[Hinweis: Benutzen Sie (a) um zu zeigen, daß für $a \notin K$ die logarithmische Ableitung $\frac{f'(z)}{f(z)}$ bei $z = a$ nicht verschwindet.]

Aufgabe 4: Sei $f(z) = z^4 + 6z + 3$. Wieviele Nullstellen hat f in

(a) $D_1(0)$,

(b) $D_2(0) - D_1(0)$?

[Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Rouché, um f mit den Funktionen $g(z) = z^4$ und $h(z) = 6z + 3$ zu vergleichen.]

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/ft1/

Übungen Funktionentheorie I   Sommersemester 2005

Blatt 11   Abgabe: Montag, 4.7.05

Aufgabe 1: Für $n \geq 1$ sei $a_{2n-1} = n^{-1} - n^{-1/2}$ und $a_{2n} = n^{-1/2}$. Definiere b_n durch $1 + b_n = (1 + a_{2n-1})(1 + a_{2n})$. Sei $p_m = \prod_{n=1}^{m}(1 + a_n)$. Zeigen Sie:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist nicht konvergent.

(b) $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + b_n)$ konvergiert absolut.

(c) Sei b der Grenzwert aus (b). Dann gilt $\lim_{m\to\infty} p_m = b$.

(d) $\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m}(1 + a_{2n}) = \infty$.

Aufgabe 2: Zeigen Sie: Das Produkt $\prod_{n=0}^{\infty}(1 + z^{2^n})$ ist genau dann absolut konvergent, wenn $|z| < 1$ ist, und dann gilt $\prod_{n=0}^{\infty}(1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}$.

Aufgabe 3: Leiten Sie aus der Partialbruchzerlegung für $\pi\cot(\pi z)$ die folgende Partialbruchzerlegung her:

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}\,.$$

Aufgabe 4: Sei $\zeta(z)$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ (wobei $n^z = e^{z\log(n)}$).

(a) Zeigen Sie: $\zeta(z)$ definiert eine holomorphe Funktion auf $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > 1\}$.

(b) Die Zahlen B_{2n} seien definiert durch die Gleichung

$$z \cdot \cot(z) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}\,.$$

Zeigen Sie: $\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2\cdot(2n)!}B_{2n}$.

[Hinweis: Benutzen Sie die Partialbruchzerlegung von $\cot(z)$ aus der Vorlesung.]

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/ft1/

Übungen Funktionentheorie I   Sommersemester 2005

Blatt 12 Abgabe: Montag, 11.7.05

Aufgabe 1: Zeigen Sie, daß für die Weierstraßschen Elementarfaktoren $E_k(z)$, $k \geq 1$, gilt:

(a) $E_k'(z) = -z^k \exp\left(z + \dfrac{z^2}{2} + \cdots + \dfrac{z^k}{k}\right)$.

(b) Ist $E_k(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Taylorreihe von E_k um den Nullpunkt, so ist $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$ und $a_n \leq 0$ für $n > k$.

(c) Für $|z| < 1$ ist $|E_k(z) - 1| \leq |z|^{k+1}$.

Aufgabe 2: Entwickeln Sie $\cos(\pi z)$ in ein unendliches Produkt. [Hinweis: $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$]

Aufgabe 3: Sei $\Psi(z) := \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$. Zeigen Sie:

(a) Ψ ist meromorph mit einfachen Polstellen in den Punkten $z = -n$, $n \in \mathbb{N}$, und $\mathrm{Res}_{-n}(\Psi) = -1$.

(b) $\Psi(z) = -\gamma - \dfrac{1}{z} - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right)$, wobei $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\Big(\big(\sum\limits_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k}\big) - \log(n)\Big)$ ist.

(c) $\Psi(1) + \gamma = 0$.

(d) $\Psi(z+1) - \Psi(z) = \dfrac{1}{z}$.

(e) $\Psi(1-z) - \Psi(z) = \pi \cot(\pi z)$.