Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/FT2/

Übungen Funktionentheorie II   Wintersemester 2005/2006

Blatt 1 Abgabe: Montag, 7.11.2005

Aufgabe 1: Sei $\mathbb{D} = \overline{\mathbb{E}}$. Zeigen Sie: $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2$ bildet $\mathbb{H} - \mathbb{D}$ konform äquivalent auf $\mathbb{H}$ ab.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionen harmonisch sind und finden Sie Konjugierte.

(a) $x^2 - y^2$ (b) $\sinh(x)\sin(y)$ (c) $\tan^{-1}(\frac{y}{x})$.

Aufgabe 3: Sei $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$u(z) = \begin{cases} \operatorname{Im}(z^{-2}) & z \neq 0\,, \\ 0 & z = 0\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Alle partiellen Ableitungen von u nach x bzw. y existieren auf ganz $\mathbb{C}$.

(b) $\Delta u = 0$.

(c) u ist nicht harmonisch.

Aufgabe 4: Zeigen Sie:

(a) In Polarkoordinaten hat die Gleichung $\Delta u = 0$ die Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0\,.$$

(b) $\log|z|$ ist auf $\mathbb{C} - \{0\}$ harmonisch.

(c) $\log|z|$ hat keine auf $\mathbb{C} - \{0\}$ definierte Konjugierte.

(d) $u\colon \mathbb{C}_- \to \mathbb{R}$ mit $u(re^{i\varphi}) := \varphi\log(r)$ definiert eine harmonische Funktion. Finden Sie eine Konjugierte v und beschreiben Sie die holomorphe Funktion $u + i\,v$.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/FT2/

Übungen Funktionentheorie II Wintersemester 2005/2006

Blatt 2 Abgabe: Montag, 14.11.2005

Aufgabe 1: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $u : U \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie, daß u eine konjugierte harmonische Funktion besitzt.

Aufgabe 2: Seien $U \subset U' \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängende Gebiete und sei $p \in U$.

(a) Es gibt genau ein konforme Äquivalenz $f : U \to \mathbb{E}$ mit den Eigenschaften

$$f(p) = 0,\ f'(p) \in \mathbb{R} \text{ und } f'(p) > 0 \ .$$

Die Zahl $\rho(U; p) := f'(p)^{-1}$ heißt der Abbildungsradius von U im Punkte p.

(b) Es ist $\rho(U; p) \leq \rho(U'; p)$. Gilt hierin die Gleichheit, so ist $U = U'$.

Aufgabe 3: Sei $\mathbb{E}_- = \mathbb{E} \cap \mathbb{C}_-$.

(a) Konstruieren Sie ein konforme Äquivalenz $f : \mathbb{E}_- \to \mathbb{E}$.

(b) Finden Sie eine Folge von Punkten $z_n \in \mathbb{E}_-$, die in $\mathbb{C}$ konvergiert, während die Folge der $f(z_n)$ nicht konvergiert.

Aufgabe 4: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so daß zu jeder holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C} - \{0\}$ eine holomorphe Funktion g auf U existiert mit $g^2 = f$. Zeigen Sie, daß U einfach zusammenhängend ist.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/FT2/

Übungen Funktionentheorie II Wintersemester 2005/2006

Blatt 3 Abgabe: Montag, 21.11.2005

Aufgabe 1: Sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $R_\Gamma := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda\Gamma \subset \Gamma\}$. Zeigen Sie:

(a) R_Γ ist ein kommutativer Ring.

(b) $R_\Gamma^\times = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda\Gamma = \Gamma\}$ (wobei $\mathbb{R}_\Gamma^\times$ die Einheiten in R_Γ bezeichne).

(c) $R_\Gamma \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$.

(d) Berechnen Sie R_Γ für $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot i$ und $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot e^{2\pi i/3}$.

Aufgabe 2: (a) Seien $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot \omega_1 + \mathbb{Z} \cdot \omega_2$ und $\Gamma' = \mathbb{Z} \cdot \omega_1' + \mathbb{Z} \cdot \omega_2'$ zwei Gitter. Zeigen Sie: es ist $\Gamma = \Gamma'$ genau dann, wenn es eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ gibt mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $\Gamma'' = \mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$. Dann ist $\Gamma = \omega_1 \cdot \Gamma''$.

Aufgabe 3: (a) Schreiben Sie $\wp''(z)$ und $\wp''''(z)$ als Polynome in $\wp(z)$.

(b) Schreiben Sie $\wp(2z)$ als rationale Funktion in $\wp(z)$.

Aufgabe 4: Für $\tau \in \mathbb{H}$ sei $\Gamma_\tau = \mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot \tau$ und für $k > 1$ sei $G_{2k}(\tau) = \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}}$.

Zeigen Sie:

(a) $G_{2k}(\tau)$ konvergiert lokal gleichmäßig auf $\mathbb{H}$.

(b) Sei $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot \omega_1 + \mathbb{Z} \cdot \omega_2$ mit $\mathrm{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$. Dann gilt $\sum_{\omega \in \Gamma - \{0\}} \frac{1}{\omega^{2k}} = \omega_1^{-2k} \cdot G_{2k}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$.

(c) $G_{2k}(\tau + 1) = G_{2k}(\tau)$.

(d) $G_{2k}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau + d)^{2k} G_{2k}(\tau)$ für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/FT2/

Übungen Funktionentheorie II Wintersemester 2005/2006

Blatt 4 Abgabe: Montag, 28.11.2005

Aufgabe 1: Geben Sie eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{E}$ an, die sich in keinen Punkt von $\mathbb{C} - \mathbb{E}$ analytisch fortsetzen läßt.

Aufgabe 2: Diskutieren Sie das analytische Gebilde von $\sqrt{\sqrt{z} - 1}$.

Aufgabe 3: Sei $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter,

$$g_2 = 60 \cdot \sum_{\omega \in \Gamma - \{0\}} \frac{1}{\omega^4} \quad \text{und} \quad g_3 = 140 \cdot \sum_{\omega \in \Gamma - \{0\}} \frac{1}{\omega^6}\,.$$

Sei $f(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$ für $x \in \mathbb{C}$, sei $\mathcal{N}$ die Nullstellenmenge von f in $\mathbb{C}$ und $\mathcal{R}$ das analytische Gebilde von $\sqrt{f(x)}$. Zeigen Sie:

(a) $\pi(\mathcal{R}) = \mathbb{C} - \mathcal{N}$.

(b) Es gibt eine Bijektion zwischen $\mathcal{R}$ und $\mathbb{C}/\Gamma - \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, wobei die a_j die Bilder von 0, $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ bzw. $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ in $\mathbb{C}/\Gamma$ bezeichnen.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/~schuster/FT2/

Übungen Funktionentheorie II Wintersemester 2005/2006

Blatt 5 Abgabe: Montag, 5.12.2005

Aufgabe 1: Sei $\Gamma' \subset \Gamma$ ein Teilgitter vom Index n. Zeigen Sie: die induzierte Abbildung $\mathbb{C}/\Gamma' \to \mathbb{C}/\Gamma$ ist unverzweigt vom Grad n.

Aufgabe 2: Sei Γ ein Gitter mit $g_2 = 0$. Bestimmen Sie den Grad und die Verzweigungsordnungen von $\wp' \colon \mathbb{C}/\Gamma \to \overline{\mathbb{C}}$.

Aufgabe 3: Lösen Sie Aufgabe 2 für $g_2 \neq 0$. (Hinweis: es sind mehrere Fälle zu unterscheiden).

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/FT2/

Übungen Funktionentheorie II Wintersemester 2005/2006

Blatt 6 Abgabe: Montag, 12.12.05

Auf diesem Übungsblatt sei M eine zusammenhängende Riemannsche Fläche und G eine endliche Untergruppe von $\mathrm{Aut}(M)$, der Gruppe der biholomorphen Selbstabbildungen von M. Für $p \in M$ bezeichne $G_p := \{g \in G \mid gp = g\}$ die Isotropiegruppe von p.

Aufgabe 1: Sei $g \neq 1$. Dann ist $M^g := \{p \in M \mid gp = p\}$ eine diskrete Teilmenge von M.

Aufgabe 2: Ist $p \in M^g$, $g \neq 1$, so existiert eine lokale Karte (z, U, V) um p, so daß $f = z \circ g \circ z^{-1}$ eine Drehung ist.

Aufgabe 3: M/G hat in kanonischer Weise die Struktur einer Riemannschen Fläche, so daß die Projektion $\pi \colon M \to M/G$ holomorph ist.

Aufgabe 4: Der Grad von π ist die Ordnung von G.

Aufgabe 5: Ist M kompakt, so gilt für die totale Verzweigungsordnung von π:

$$o_\pi = \sum_{p \in M} \big(|G_p| - 1\big)\,.$$

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/FT2/

Übungen Funktionentheorie II Wintersemester 2005/2006

Blatt 7 Abgabe: Montag, 19.12.05

Aufgabe 1: Sei $\mathscr{G}$ eine Garbe über M mit Projektion π.

(a) Für $N \subset M$ sei $\mathscr{G}|_N = \pi^{-1}(N)$. Zeigen Sie: $\mathscr{G}|_N$ ist eine Garbe über N.

(b) Sei $f\colon N \to M$ stetig und

$$f^*\mathscr{G} = \{(x, g) \in N \times \mathscr{G} \mid f(x) = \pi(g)\}\,.$$

Zeigen Sie: $f^*\mathscr{G}$ ist eine Garbe über N.

(c) Ist $N \subset M$ und $i\colon N \to M$ die Inklusion, so gilt $\mathscr{G}|_N \cong i^*\mathscr{G}$.

Aufgabe 2: Sei $\mathscr{G}$ eine Garbe über M mit Projektion π.

(a) Sei $f\colon M \to N$ stetig. Zeigen Sie:

$$U \longmapsto \Gamma(f^{-1}(U); \mathscr{G})$$

ist eine vollständige Prägarbe über N. Die assoziierte Garbe wird mit $f(\mathscr{G})$ bezeichnet und heißt das direkte Bild von $\mathscr{G}$ unter f.

(b) Sei $N \subset M$ und $\mathscr{H}$ eine Garbe über N. Zeigen Sie $(i\mathscr{H})|_N \cong \mathscr{H}$.

Aufgabe 3: Sei $A \subset X$ lokal abgeschlossen (d.h. jeder Punkt $p \in A$ hat eine Umgebung U in X, so daß $U \cap A$ abgeschlossen in U ist) und $\pi\colon \mathscr{H} \to A$ eine Garbe auf A. Sei $\mathscr{G} = \mathscr{H} \cup (X - A) \times \{0\}$. Definiere eine Topologie auf $\mathscr{G}$ wie folgt:

(i) Zu $y = (p, x) \in \mathscr{H}$ existiert eine offene Umgebung $V \subset A$ und ein Schnitt $s \in \Gamma(V, \mathscr{H})$ mit $s(p) = y$, sowie $U \subset X$ mit $U \cap A \subset V$ und $U \cap A \subset A$ abgeschlossen. Die Mengen der Form $s(U \cap A) \cup (U - A) \times \{0\}$ seien eine Umgebungsbasis von y.

(ii) Für $y = (p, 0) \in (X - A) \times \{0\}$ bestehe eine Umgebungsbasis aus Mengen der Form $U \times \{0\}$, wobei U Umgebung von p in X sei.

Sei $\tilde{\pi}\colon \mathscr{G} \to X$ die offensichtliche Projektion. Zeigen Sie:

(a) $\mathscr{G}$ ist eine Garbe über X.

(b) $\mathscr{G}$ ist die einzige Garbe, für die $\mathscr{G}|_A = \mathscr{H}$ und $\mathscr{G}|_{X-A} = (X - A) \times \{0\}$ gilt.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/FT2/

Übungen Funktionentheorie II   Wintersemester 2005/2006

Blatt 8 Abgabe: Montag, 9.1.2006

Aufgabe 1: Zeigen Sie: eine kurze exakte Sequenz von Kokettenkomplexen

$$0 \longrightarrow (C^*, d) \longrightarrow (D^*, d) \longrightarrow (E^*, d) \longrightarrow 0$$

induziert eine lange exakte Sequenz in Kohomologie.

Aufgabe 2: Sei I eine gerichtete Indexmenge und C^* ein Funktor von I in die Kategorie der Kokettenkomplexe. Zeigen Sie: es gibt kanonische Isomorphismen

$$H^q(\operatorname*{colim}_{i \in I} C^*(i)) \cong \operatorname*{colim}_{i \in I} H^q(C^*(i)) \,.$$

Aufgabe 3: Sei

$$0 \longrightarrow C^* \longrightarrow D^*(0) \longrightarrow D^*(1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow D^*(n) \longrightarrow \cdots$$

eine exakte Sequenz von Kokettenkomplexen. Sei $H^q(D^*(n)) = 0$ für $q > 0$. Zeigen Sie:

(a) Sei $K^n = H^0(D^*(n))$. Dann ist

$$0 \longrightarrow K^0 \longrightarrow K^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow K^n \longrightarrow \cdots$$

ein Kokettenkomplex K^*.

(b) $H^q(C^*) \cong H^q(K^*)$ für jedes q.

Übungen Funktionentheorie II Wintersemester 2005/2006

Blatt 9 Abgabe: Montag, 16.1.2006

Aufgabe 1: Sei M eine Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ abgeschlossen und $\mathscr{F}$ eine Garbe auf M. Sei $\mathscr{G}$ die Garbe mit

$$\mathscr{G}_x = \begin{cases} \mathscr{F}_x & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

vgl. Blatt 7, Aufgabe 3. Zeigen Sie: Der Homomorphismus $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ induziert einen Isomorphismus

$$H^*(M; \mathscr{G}) \cong H^*(A; \mathscr{F}|_A) .$$

[Hinweis: Ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von A, so gibt es eine offene Überdeckung von M, deren Schnitt mit A gerade $\mathcal{U}$ ist.]

Aufgabe 2: Sei M eine Mannigfaltigkeit, A_1, A_2 abgeschlossene Teilmengen mit $M = A_1 \cup A_2$ und $\mathscr{F}$ eine Garbe auf M.

(a) Definiere Garben $\mathscr{F}_i$, $i = 0, 1, 2$, auf M durch

$$(\mathscr{F}_0)_x = \begin{cases} \mathscr{F}_x & \text{für } x \in A_1 \cap A_2, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$(\mathscr{F}_1)_x = \begin{cases} \mathscr{F}_x & \text{für } x \in A_1, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$(\mathscr{F}_2)_x = \begin{cases} \mathscr{F}_x & \text{für } x \in A_2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: es gibt Homomorphismen von Garben und eine kurze exakte Sequenz von Garben

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2 \longrightarrow \mathscr{F}_0 \longrightarrow 0 .$$

(b) Folgern Sie: es gibt eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \to H^q(M; \mathscr{F}) \to H^q(A_1; \mathscr{F}|_{A_1}) \oplus H^q(A_2; \mathscr{F}|_{A_2}) \to H^q(A_1 \cap A_2; \mathscr{F}|_{A_1 \cap A_2}) \to \cdots$$

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
www.math.uni-wuppertal.de/∼schuster/FT2/

Übungen Funktionentheorie II Wintersemester 2005/2006

Blatt 10 Abgabe: Montag, 30.1.2006

Aufgabe 1: Sei M eine Riemannsche Fläche. Sei S eine diskrete Teilmenge von M und $\mathcal{W}_S$ die durch

$$(\mathcal{W}_S)_x = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{für } x \in S, \\ 0 & \text{für } x \notin S \end{cases}$$

definierte *Wolkenkratzergarbe* mit Träger S. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{W}_S$ ist eine feine Garbe.

(b) Ist S endlich, so hat $H^0(M; \mathcal{W}_S)$ die Dimension $\sharp S$.

Aufgabe 2: Sei M eine Riemannsche Fläche, $K \subset M$ abgeschlossen und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf M. Zeigen Sie: für jedes $q > 0$ gilt

$$H^q(K; \mathcal{F}|_K) \cong \operatorname*{colim}_U H^q(U; \mathcal{F}|_U)$$

wobei U die offenen Umgebungen von K in M durchläuft.

Aufgabe 3: Seien M, M_1, M_2 kompakte (glatte) Flächen, eventuell mit Rand.

$$\chi(M) := \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(M; \mathbb{C})$$

heißt die *Eulercharakteristik* von M. Zeigen Sie:

(a) $\chi(M_1 \cup M_2) + \chi(M_1 \cap M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2)$.

(b) Ist $M \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, so gilt $\chi(M) = 1$.

(c) $\chi(S^1 \times I) = 0$.

(d) Seien e_j, $1 \leq j \leq r$, offene Kreisscheiben mit $\overline{e}_i \cap \overline{e}_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann gilt

$$\chi(S^2 - \textstyle\bigcup_{i=1}^{r} e_i) = 2 - r\,.$$

(e) Für die orientierbare Fläche F_g vom Geschlecht g gilt $\chi(F_g) = 2 - 2g$.