Vorlesung Analysis I — WS 07/08

Erich Ossa

Vorläufige Version 07/12/04
— Ausdruck 8. Januar 2008 —

Inhaltsverzeichnis

Dieses Skript ist noch nicht in seiner endgültigen Gestalt.
Für Fehlermeldungen, Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge wäre ich dankbar.

E. Ossa

4 Differentialrechnung

4.1 Die Ableitung

4.1.A Definitionen

Im folgenden betrachten wir der Einfachheit halber nur reelle Funktionen $f : I \to \mathbf{R}$, die auf einem Intervall I von positiver Länge definiert sind.

Definition 4.1.1: *$f : I \to \mathbf{R}$ heißt differenzierbar im Punkte $x_* \in I$, wenn der folgende Grenzwert existiert:*

$$f'(x_*) := \lim_{x \to x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} \ .$$

Dieser Grenzwert wird dann als die Ableitung von f im Punkte x_* bezeichnet.

Bemerkung: Oft schreibt man $\Delta f := f(x) - f(x_*)$ und $\Delta x := x - x_*$. Den Grenzwert der Differenzenquotienten $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ bezeichnet man dann als den Differentialquotienten $\dfrac{df}{dx}(x_*) = f'(x_*)$. Eine andere übliche Bezeichnung ist $Df(x_*) = f'(x_*)$. Man schreibt auch oft $f'(x_*) := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_* + h) - f(x_*)}{h}$.

Mit Koordinaten ξ, η beschreibt die Gleichung $\eta = f(x_*) + \dfrac{\Delta f}{\Delta x}(\xi - x_*)$ die Sekante des Graphen von f durch die Punkte $(x_*, f(x_*))$ und $(x, f(x))$. Im Grenzwert $\Delta x \to 0$ erhalten wir $\eta = f(x_*) + f'(x_*)(\xi - x_*)$ als Gleichung der Tangente im Punkte $(x_*, f(x_*))$.
Eine weitere Notation ist $\dot{y}(t) := y'(t)$, wobei die Variable t als Zeit interpretiert wird. Für eine Kurve $(x(t), y(t))$ ist $\vec{v}(t) := (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ der Geschwindigkeitsvektor.

Definition 4.1.2: *$f : I \to \mathbf{R}$ heißt differenzierbar auf I, wenn f in jedem Punkt $x_* \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall bezeichnet man die Funktion $f' : I \to \mathbf{R}$ mit $x \mapsto f'(x)$ als die Ableitung von f.*

V18-19.12.

Satz 4.1.3: *Sei $f : I \to \mathbf{R}$ und $x_* \in I$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *f ist differenzierbar in x_*,*
2. *Es existiert eine lineare Funktion $L(x) = mx + b$, so daß gilt*
$$f(x) = L(x) + (x - x_*)r(x)$$
mit $\lim\limits_{x \to x_*} r(x) = 0$,
3. *Es ist*
$$f(x) = f(x_*) + (x - x_*)\varphi(x) \ ,$$
für eine Funktion $\varphi(x)$, welche stetig in x_* ist.

In der dritten Beschreibung ist dann $\varphi(x_*) = f'(x_*)$.

Satz 4.1.4: *Sei f differenzierbar in x_*. Dann gibt es ein $\delta > 0$ und eine Konstante $K > 0$, so daß gilt*

$$|x - x_*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_*)| < K|x - x_*| \ .$$

Insbesondere ist f stetig im Punkt x_*.

4.1.B Ableitungsregeln

Satz 4.1.5: *Es gelten die folgenden Ableitungsregeln:*

1. *Ist $f(x) = cx^n$ (für $c \in \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{N}$), so ist $f'(x) = ncx^{n-1}$.*
2. $\sin'(x) = \cos(x)$ *und* $\cos'(x) = -\sin(x)$.
3. $\exp'(x) = \exp(x)$.
4. $\sinh'(x) = \cosh(x)$ *und* $\cosh'(x) = \sinh(x)$.

Satz 4.1.6: *Seien f, $g : I \to \mathbf{R}$ in $x_* \in I$ differenzierbar. Dann gilt:*

1. *Summenregel: $f + g$ ist in x_* differenzierbar mit*
$$(f + g)'(x_*) = f'(x_*) + g'(x_*) \ .$$
2. *Produktregel: $f \cdot g$ ist in x_* differenzierbar mit*
$$(f \cdot g)'(x_*) = f'(x_*) \cdot g(x_*) + f(x_*) \cdot g'(x_*) \ .$$
3. *Quotientenregel: Ist $g(x_*) \neq 0$, so ist $\dfrac{f}{g}$ für $x \in I$ mit $|x - x_*| < \delta$ definiert und differenzierbar in x_* mit*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_*) = \frac{f'(x_*)g(x_*) - f(x_*)g'(x_*)}{g(x_*)^2} \ .$$

Satz 4.1.7 (Kettenregel): *Seien $f : I \to \mathbf{R}$, $g : J \to \mathbf{R}$ mit $f(I) \subset J$. Sei f differenzierbar in x_* und g differenzierbar in $y_* := f(x_*)$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x_* mit*

$$(g \circ f)'(x_*) = g'(y_*)f'(x_*) \ .$$

Bemerkung: Merkregel: Man schreibt $y = f(x)$ und kürzt in

$$\frac{dg}{dy}\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx}$$

vermöge $dy = df$.

Satz 4.1.8:

1. *Rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.*
2. $\tan'(x) = \cos^{-2}(x)$.
3. $\tanh'(x) = \cosh^{-2}(x)$.

V19-21.12.

Satz 4.1.9 (Ableitung der Umkehrfunktion): *Sei* $f : I \to \mathbf{R}$ *streng monoton. Sei* $J := f(I)$. *Sei* f *in* x_* *differenzierbar mit* $f'(x_*) \neq 0$. *Dann ist die Umkehrfunktion* $g := f^{-1} : J \to I$ *in* $y_* = f(x_*)$ *differenzierbar und es gilt*

$$g'(y_*) = \frac{1}{f'(x_*)} \ .$$

Beweis: Aus der strengen Monotonie und der Differenzierbarkeit folgt, daß y_* ein Häufungspunkt von J ist und daß g im Punkt y_* stetig ist. □

Satz 4.1.10:

1. $\log : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ *ist differenzierbar mit*

$$\log'(y) = \frac{1}{y} \ .$$

2. *Sei* $r \in \mathbf{R}$ *und* $f(y) := y^r$ *für* $y \in \mathbf{R}_+$. *Dann ist* f *differenzierbar und* $f'(y) = ry^{r-1}$.

Beweis: Die erste Behauptung folgt sofort aus dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion. Für die zweite verwende man $y^r = \exp(r\log(y))$. □

4.2 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

7.1.

Definition 4.2.1: *Sei $f : I \to \mathbf{R}$ und $x_* \in I$.*

1. *f hat in x_* ein lokales Maximum, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so daß für $x \in I$ gilt:*

$$|x - x_*| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_*) \ .$$

2. *f hat in x_* ein lokales Minimum, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so daß für $x \in I$ gilt:*

$$|x - x_*| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(x_*) \ .$$

3. *f hat in x_* ein lokales Extremum, wenn f in x_* ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum hat.*

Satz 4.2.2: *$f :]a, b[\to \mathbf{R}$ habe in $x_* \in]a, b[$ ein lokales Extremum. Ist f in x_* differenzierbar, so gilt*

$$f'(x_*) = 0 \ .$$

Beispiel: Brechungsgesetz von Snellius (s. Königsberger).

Satz 4.2.3 (Satz von Rolle): *Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig und differenzierbar auf $]a, b[$. Sei $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $x_* \in]a, b[$ mit*

$$f'(x_*) = 0 \ .$$

Satz 4.2.4 (Mittelwertsatz): *Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig und differenzierbar auf $]a, b[$. Dann gibt es ein $x_* \in]a, b[$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_*) \ .$$

Korollar 4.2.5: *Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig und differenzierbar auf $]a, b[$.*

1. *Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f streng monoton wachsend.*
2. *Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f monoton wachsend.*
3. *Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f konstant.*

Beispiel: $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ mit $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend.

Satz 4.2.6 (Verallgemeinerter MWS): *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig und differenzierbar auf $]a, b[$. Sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $x_* \in]a, b[$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_*)}{g'(x_*)} \ .$$

Satz 4.2.7 (Regel von de l'Hospital): *Seien f, g :$]a,b[\to \mathbf{R}$ differenzierbar. Sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$. Ferner sei eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

1. $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = 0$ *und* $\lim\limits_{x\searrow a} g(x) = 0$,
2. $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = \infty$ *und* $\lim\limits_{x\searrow a} g(x) = \infty$.

Dann ist $g(x) \neq 0$ für x in einer geeigneten Umgebung von a, und

$$\lim_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

sobald der rechts stehende Grenzwert existiert.

Beispiele (für $x \searrow 0$):

1. $\dfrac{\sin(x)}{x}$
2. $x \log(x)$
3. $\dfrac{1}{x\sin(x)} - \dfrac{1}{x^2}$

Beweis: (von Satz (4.2.7))
Fall 1. folgt (mit $f(a) := 0 =: g(a)$) sofort aus dem verallgemeinerten MWS.
Unter Voraussetzung 2. schließen wir wie folgt: Zunächst gibt es ein $\delta_1 > 0$, so daß $f(x) \neq 0 \neq g(x)$ ist für $a < x < a + \delta_1$. Sei $A := \lim\limits_{x\searrow a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein δ_2 mit $0 < \delta_2 < \delta_1$ und

$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - A \right| < \varepsilon \text{ für } a < t < a + \delta_2 \ .$$

Wir können schreiben

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}} \ ,$$

wobei $a < x < y < \delta_2$ sei. Wegen

$$\lim_{x\searrow a} \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}} = 1$$

gibt es ein δ_3 mit $0 < \delta_3 < \delta_2$ so daß

$$\left| \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}} - 1 \right| < \varepsilon$$

ist für $a < x < a + \delta_3$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - A &= \left(\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} - A\right) \cdot \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}} \\ &\quad + A \cdot \left(\frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}} - 1\right) \end{aligned}$$

dem Betrag nach $< \varepsilon(1 + \varepsilon) + |A|\varepsilon$. $\square$

4.3 Die Taylorformel

Satz 4.3.1: *Sei* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$. *Sei* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)(x-a)^n$ *die durch Differenzieren der Summanden erhaltene Potenzreihe. Dann hat* $g(x)$ *ebenfalls den Konvergenzradius* R*, die Funktion*

$$f :]a-R, a+R[\to \mathbf{R}$$

ist differenzierbar, und es ist

$$f'(x) = g(x) \ .$$

Beweis: Die Behauptung über den Konvergenzradius folgt aus der Formel von Cauchy-Hadamard.

Sei o.B.d.A. $a = 0$. Sei $0 < r < r_1 < R$. Für x, h mit $|x| < r$ und $0 < |h| < r_1 - r$ sind $f(x+h)$ und $f(x)$ absolut konvergent, so daß wir ausrechnen können

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+j+1} \binom{k+j+1}{k} x^k \right) h^j$$

mit absoluter Konvergenz. Da diese Potenzreihe in h als Funktion von h (bei festem x) stetig ist, können wir den Grenzübergang $h \to 0$ durch Einsetzen von $h = 0$ in die Potenzreihe durchführen. $\square$

Definition 4.3.2: *Sei* $I \subset \mathbf{R}$ *ein Intervall positiver Länge. Eine Funktion* $f : I \to \mathbf{R}$ *heißt* $(n+1)$*-mal differenzierbar mit* $(n+1)$*-ter Ableitung* $f^{(n+1)}$*, wenn* $f' : I \to \mathbf{R}$ n*-mal differenzierbar ist mit* n*-ter Ableitung*

$$(f')^{(n)} = f^{(n+1)} \ .$$

f *heißt* $(n+1)$*-mal stetig differenzierbar, wenn zusätzlich die Abbildung* $f^{(n+1)}$ *stetig ist.*

Korollar 4.3.3: *Sei* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$. *Dann ist* $f :]a-R, a+R[\to \mathbf{R}$ *unendlich oft differenzierbar, und es gilt*

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \ .$$

Satz 4.3.4 (Identitätssatz für Potenzreihen): *Seien* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *und* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n$ *Potenzreihen mit Konvergenzradius* $\geq R > 0$. *Sei* (x_k) *eine Folge mit* $0 < |x_k - a| < R$ *und* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$*, so daß* $f(x_k) = g(x_k)$ *ist für alle* k*. Dann ist* $f(x) = g(x)$.

Definition 4.3.5: *Sei* $f : I \to \mathbf{R}$ n*-mal differenzierbar. Dann heißt*

$$T_n(f;a)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{10}$$

das n*-te Taylor-Polynom von* f *im Punkt* a.

Satz 4.3.6 (Taylor-Formel): *Sei $I \subset \mathbf{R}$ ein offenes Intervall. Sei $f : I \to \mathbf{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann gilt (für x, a in I)*

$$f(x) = T_n(f;a)(x) + R_{n+1}(x;a) \ , \tag{11}$$

wobei

$$R_{n+1}(x;a) = f^{(n+1)}(\xi)\ \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{12}$$

ist für ein $\xi \in I$ mit $|\xi - a| < |x-a|$.

14.1.

Beweis: Setze $F(t) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(t) \dfrac{(x-t)^k}{k!}$. Man rechnet leicht nach, daß

$$F'(t) = f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!}$$

ist. Nach dem verallgemeinerten MWS gibt es zu einer differenzierbaren Funktion G, deren Ableitung zwischen x und a keine Nullstelle hat, ein ξ, so daß gilt

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \ .$$

Für $G(t) = (x-t)^{n+1}$ erhält man die Formel (11) mit dem Restglied (12) von Lagrange. □

Definition 4.3.7: *Sei I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbf{R}$ ∞-oft differenzierbar. f heißt analytisch im Punkt $a \in I$, wenn die Taylorreihe von f um a*

$$T(f;a)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

in einer Umgebung von a gegen $f(x)$ konvergiert.

Satz 4.3.8: *Sei $f : I \to \mathbf{R}$ analytisch in $a \in I$ und $g : J \to \mathbf{R}$ analytisch in $b := f(a) \in J$. Dann ist $g \circ f$ analytisch in a.*

Korollar 4.3.9: *Sei $g : J \to \mathbf{R}$ analytisch in $b \in J$. Dann ist f analytisch in jedem Punkt einer geeigneten Umgebung von b.*

Korollar 4.3.10: *Sei $f : I \to \mathbf{R}$ analytisch in $a \in I$ und $f(a) \neq 0$. Dann ist $\dfrac{1}{f}$ analytisch in a.*

Beispiele:

$$
\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \text{ für } |x|<1 && (13)\\
\log(1+x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \text{ für } |x|<1 && (14)\\
\arcsin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ für } |x|<1 && (15)\\
\arctan(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ für } |x|<1 && (16)\\
\frac{x}{e^x-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \text{ für } |x|<2\pi && (17)\\
\tan(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} 2^{2k}(2^{2k}-1) x^{2k} \text{ für } |x|<\frac{\pi}{2} && (18)
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Gleichung (17) definiert die Bernoulli-Zahlen. Es ist $B_1 = -\frac{1}{2}$ und $B_{2k+1} = 0$ für $k > 0$.

4.4 Kurvendiskussion

Definition 4.4.1: *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ heißt konvex (auf $[a,b]$), wenn für alle t, x, $y \in [a,b]$ mit $x \le t \le y$ gilt*

$$f(t) \le f(x)\frac{y-t}{y-x} + f(y)\frac{t-x}{y-x} \ . \tag{19}$$

Sie heißt streng konvex, wenn in obiger Ungleichung niemals die Gleichheit gilt.
Eine Funktion f heißt (streng) konkav, wenn die Funktion $-f$ (streng) konvex ist.

Satz 4.4.2: *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ist genau dann konvex, wenn für alle x, y, $t \in [a,b]$ mit $x < t < y$ gilt*

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \le \frac{f(y)-f(t)}{y-t} \ . \tag{20}$$

Dann gilt sogar

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(y)-f(t)}{y-t} \ . \tag{21}$$

Hilfssatz 4.4.3: *Sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex, wenn $f' : [a,b] \to \mathbf{R}$ monoton wachsend ist.*

Definition 4.4.4: *Sei $I \subset \mathbf{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbf{R}$ eine Funktion. f hat in $\xi \in I$ einen Wendepunkt, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so daß für Intervalle I_1, I_2 mit $[\xi - \delta, \xi + \delta] = I_1 \cup I_2$ und $I_1 \cap I_2 = \{\xi\}$ gilt:*

$$f \quad \text{ist auf } I_1 \text{ konvex und auf } I_2 \text{ konkav.}$$

Satz 4.4.5: *Sei $I \subset \mathbf{R}$ ein offenes Intervall. Sei $f : I \to \mathbf{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, und im Punkt $a \in I$ sei*

$$f^{(k)}(a) = 0 \text{ für } 1 \leq k \leq n \text{ , aber } f^{(n+1)}(a) > 0 \text{ .}$$

Dann gilt für $n \geq 1$:

1. *Ist $n + 1$ gerade, so hat f im Punkt a ein strenges lokales Minimum.*
2. *Ist $n + 1$ ungerade, so hat f im Punkt a einen Wendepunkt und ist in einer Umgebung von a streng monoton wachsend.*